Zadaci za općinsko natjecanje 2018. – 3. skupina
Rješenja

Zadatak 1 (10 bodova)

Smjer sile nam određuje smjer struje I_x. Ako pretpostavimo da I_x teče prema gore, tada bi sila između I_1 i I_x bila privlačna (struje u istom smjeru) a između I_2 i I_x odbojna (suprotni smjer) što je točno naš slučaj. U suprotnom, sila od I_1 bi bila odbojna a I_2 privlačna, što bi značilo ukupnu silu u desno. **(2 boda)**

Sila na žicu I_x je dana relacijom:

$$F_1 = L\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1 I_x}{\frac{2}{3}D} + \frac{I_2 I_x}{\frac{1}{3}D}\right)$$

(2 boda)

U slučaju promjene smjera struje $I_1 \to -I_1$ relacija je sada:

$$F_2 = L\frac{\mu_0}{2\pi}\left(-\frac{I_1 I_x}{\frac{2}{3}D} + \frac{I_2 I_x}{\frac{1}{3}D}\right)$$

(2 boda)

Ako zbrojimo obje relacije prvi član se poništi i preostaje:

$$F_1 + F_2 = L\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{2I_2 I_x}{\frac{1}{3}D} = \frac{3\mu_0 L I_x}{\pi D} I_2$$

$$I_2 = \frac{(F_1 + F_2)\pi D}{3\mu_0 L I_x} = 12.5 \text{ A}$$

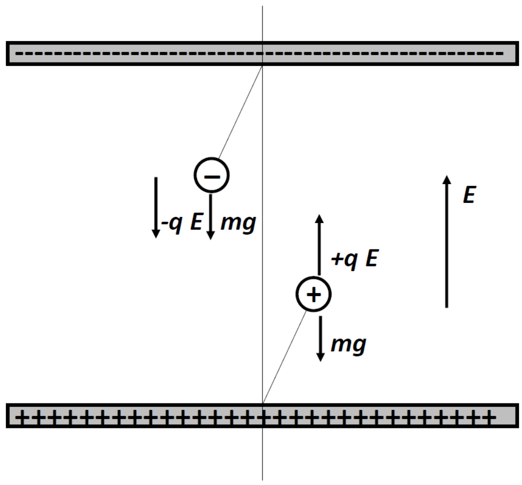
(2 boda)

Sada I_2 možemo uvrstiti u bilo koju jednadžbu (relacija s F_1 ili F_2) i dobiti vrijednost $I_1 = 8.33$ A. **(2 boda)**

Zadatak 2 (10 bodova)

Električno polje između dvije ploče je povezano s naponom između tih ploča kao $U = E \cdot L$, tj. polje je $E = U/L$. **(1 bod)**

Raspišimo sile na obje kuglice kada su pomaknute malo izvan ravnoteže. Raspis je identičan kao i za obično matematičko njihalo, osim što postoji dodatna sila zbog električnog polja. Za donju kuglicu, da bi stajala uspravno, električna sila mora biti prema gore, i mora biti jača od gravitacije. Neto sila na kuglicu je dakle $F_e - F_g$ u slučaju donje i $F_e + F_g$ u slučaju gornje kuglice. **(3 boda)**



Periodi ova dva njihala su stoga

$$T_+ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{\frac{eE}{m} - g}} \quad ; \quad T_- = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{\frac{eE}{m} + g}}$$

(2 boda)

T_+ je uvijek veći od T_- (zbog manjeg nazivnika) pa zaključujemo da T_+ mora biti višekratnik od T_-. To znači da omjer T_+/T_- mora biti cijeli broj $n \in \mathbb{N} > 1$. Dakle:

$$\frac{T_+}{T_-} = \sqrt{\frac{eE/m + g}{eE/m - g}} = n$$

(2 boda)

$$\frac{eE}{m} + g = n^2 \left(\frac{eE}{m} - g \right)$$

Kratkim sređivanjem izraza dobije se:

$$E = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \frac{mg}{e}$$

Naponi kod kojih je jedan period višekratnik drugog perioda su:

$$U = E \cdot L = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \frac{mgL}{e}$$

(2 boda)

Zadatak 3 (10 bodova)

Masa na opruzi titra periodom $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Iz poznatog perioda i mase možemo izvući k:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 79\ \mathrm{N/m}$$

(2 boda)

Metak se sudara sa masom u trenutku kada je opruga najrastegnutija. U toj točki titranja brzina mase je nula tik prije sudara, pa je zakon očuvanja količine gibanja:

$$p_{metak} = p_{masa}$$
$$mv_m = Mv_M$$

i brzina koju dobije masa M je:

$$v_M = \frac{m}{M} v_m = 4\ \mathrm{m/s}$$

(2 boda)

Budući da period titranja ne ovisi o brzini mase, nego samo o masi i konstanti opruge, period se neće mijenjati! **(2 boda)**

Promjenu amplitude možemo vidjeti preko energije:

$$E_{uk} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

U amplitudi $x = A$ je brzina $v = 0$, pa je sva energija u potencijalnoj energiji opruge:

$$E_{uk} = \frac{1}{2}kA^2$$

Poslije sudara ukupna energija sustava se povećala za kinetičku energiju mase:

$$E_{uk} = E_{prije} + \frac{1}{2} M v_M^2$$

(2 boda)

Iz posljednje dvije relacije možemo izraziti novu amplitudu:

$$\frac{1}{2} k A_{nova}^2 = \frac{1}{2} k A_{stara}^2 + \frac{1}{2} M v_M^2$$

$$A_{nova} = \sqrt{\frac{M v_M^2}{k} + A_{stara}^2} = 37.6 \text{ cm}$$

(2 boda)

Ako učenik računa s ukupnom masom $M + m$, bez zanemarivanja metka, priznaju se rješenja. U tom slučaju je i period titranja neznatno dulji!

Zadatak 4 (10 bodova)

Uteg s oprugom čini harmonički oscilator koji titra oko ravnotežnog položaja. Period harmoničkog oscilatora dan je s

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

(2 boda)

a iznos perioda očitamo sa grafa: $T = 0.5$ s. Konstanta opruge je

$$k = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 m = 1.58 \, \text{N/m}$$

(2 boda)

Maksimalnu brzinu utega nalazimo iz zakona očuvanja energije: $E = E_{kin} + E_{el}$. Prepoznajemo da uteg titra oko ravnotežnog položaja što je $y = 2$ cm, te da je amplituda titranja $A = 5 - 2 = 3$ cm. **(2 boda)**

Kada je uteg maksimalno otklonjen, sva energija je pohranjena u energiji opruge $E_{el} = \frac{1}{2} k A^2$. Kada je uteg u ravnoteži, energija opruge je minimalna ($E_{el} = 0$), pa je sva energija pohranjena u kinetičkoj energiji utega. Zato pišemo:

$$E_{kin}^{max} = E_{el}^{max} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

(2 boda)

Iz čega nalazimo maksimalnu brzinu:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A = 37.7 \text{ cm/s}$$

(2 boda)

Zadatak 5 (10 bodova)

Nabijena čestica u magnetskom polju se giba po kružnici zbog utjecaja Lorentzove sile $F_L = qvB$ koja ima ulogu centripetalne sile $F_{cp} = mv^2/r$. Izjednačavanjem izraza možemo dobiti izraz za radijus:

$$r = \frac{mv^2}{qvB} = \frac{mv}{qB}$$

(2 boda)

Brzina čestice je definirana njenom kinetičkom energijom kao $E = \frac{1}{2}mv^2$, pa možemo brzinu izraziti preko energije $v = \sqrt{2E/m}$:

$$r = \frac{m\sqrt{\frac{2E}{m}}}{qB} = \frac{\sqrt{2mE}}{qB}$$

(2 boda)

Ono po čemu se čestice razlikuju su masa m i naboj q, dok je energija ista za svaku česticu, kao i magnetsko polje u kojem se nalaze. Zato je omjer radijusa elektrona i nepoznate čestice:

$$r/r_e = \frac{e}{\sqrt{m_e}} \frac{\sqrt{m}}{q}$$

Sve što možemo saznati o nepoznatoj čestici je omjer korjena mase i naboja čestice, pa taj omjer moramo usporediti s navedenim česticama u tablici. Iz zadatka znamo da je otklon nepoznate čestice u drugom smjeru od otklona elektrona, što nam govori da je naboj nepoznate čestice suprotnog predznaka, tj $+$. **(2 boda)**

Preostaje nam usporediti omjer korjena mase i naboja za pozitivne čestice sa izrazom

$$\frac{\sqrt{m}}{q} = \frac{\sqrt{m_e}}{e} \frac{r}{r_e} \approx 25 \ \mathrm{kg}^{1/2}/\mathrm{C}$$

(2 boda)

U tablici je najbliže tom izrazu čestica Σ_c^{++}: $\sqrt{m}/q\ (\Sigma_c^{++}) = 24.76 \ \mathrm{kg}^{1/2}/\mathrm{C}$ **(2 boda)**