

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 12. - 14. travnja 2018.

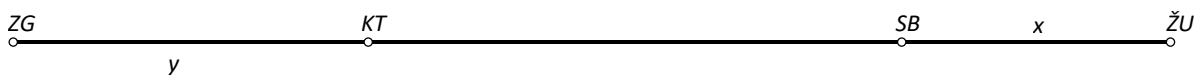
5. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način: Grafički prikazimo udaljenosti navedenih gradova:



Ako udaljenost između Slavonskog Broda i Županje označimo s x , onda je udaljenost Slavonskog Broda i Zagreba $3x$ i vrijedi $x + 3x = 256$. Iz $4x = 256$ izračuna se $x = 64$.
Udaljenost između Slavonskog Broda i Županje iznosi 64 km.



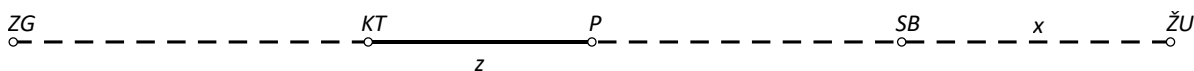
Ako udaljenost između Kutine i Zagreba označimo s y , onda između Kutine i Županje ima $y + 92$ i vrijedi $y + y + 92 = 256$. Iz $2y = 164$ dobiva se $y = 82$.
Udaljenost između Kutine i Zagreba iznosi 82 km.

Konačno, udaljenost između Kutine i Slavonskog Broda je $256 - (82 + 64) = 110$ km.

Drugi način: Grafički prikazimo udaljenosti navedenih gradova:



Ako udaljenost između Slavonskog Broda i Županje označimo s x , onda je udaljenost Slavonskog Broda i Zagreba $3x$ i vrijedi $x + 3x = 256$. Iz $4x = 256$ izračuna se $x = 64$.
Udaljenost između Slavonskog Broda i Županje iznosi 64 km, a između Zagreba i Slavonskog Broda udaljenost je 192 km.

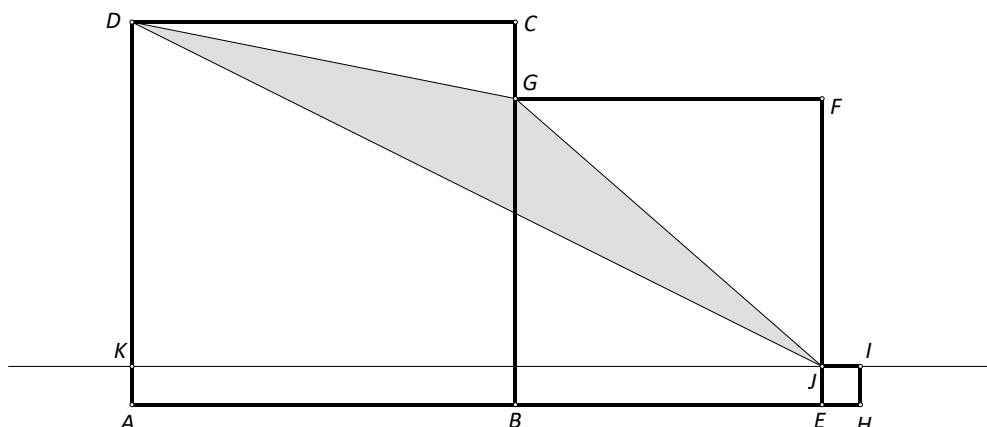


Ako je točka P točno na pola puta između Zagreba i Županje, ona je od Zagreba i Županje udaljena 128 km, a od Slavonskog Broda $128 - 64 = 64$ km. Uz oznake kao na slici udaljenost Zagreba i Kutine iznosi $(128 - z)$ km, a udaljenost Kutine i Županje $(z + 128)$ km. Budući da je udaljenost Kutine i Županje 92 km veća od udaljenosti Zagreba i Kutine vrijedi $(128 - z) + 92 = z + 128$. Zaključuje se da je $2z = 92$, tj. da je $z = 46$ km.

Konačno, udaljenost Kutine i Slavonskog Broda iznosi $46 + 64 = 110$ km.

2. Prvi način:

Ako je površina kvadrata $ABCD$ 1 dm^2 , onda je duljina njegove stranice $a = 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$, a ako je površina kvadrata $BEFG$ 64 cm^2 , onda je duljina njegove stranice $b = 8 \text{ cm}$ te ako je površina kvadrata $EHJI$ 100 mm^2 , onda je duljina njegove stranice $c = 10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$.



Neka je K točka na dužini \overline{AD} pri čemu je $|AK| = 1$ cm.

$$p(DJG) = p(ABCD) + p(BEFG) - (p(AEJK) + p(KJD) + p(JFG) + p(GCD))$$

$$p(AEJK) = (a + b) \cdot c = (10 + 8) \cdot 1 = 18 \text{ cm}^2$$

$$p(KJD) = (a + b) \cdot (a - c) : 2 = (10 + 8) \cdot (10 - 1) : 2 = 18 \cdot 9 : 2 = 81 \text{ cm}^2$$

$$p(JFG) = b \cdot (b - c) : 2 = 8 \cdot (8 - 1) : 2 = 8 \cdot 7 : 2 = 28 \text{ cm}^2$$

$$p(GCD) = a \cdot (a - b) : 2 = 10 \cdot (10 - 8) : 2 = 10 \cdot 2 : 2 = 10 \text{ cm}^2$$

$$p(DJG) = p(ABCD) + p(BEFG) - (p(AEJK) + p(KJD) + p(JFG) + p(GCD))$$

$$p(DJG) = 100 + 64 - (18 + 81 + 28 + 10)$$

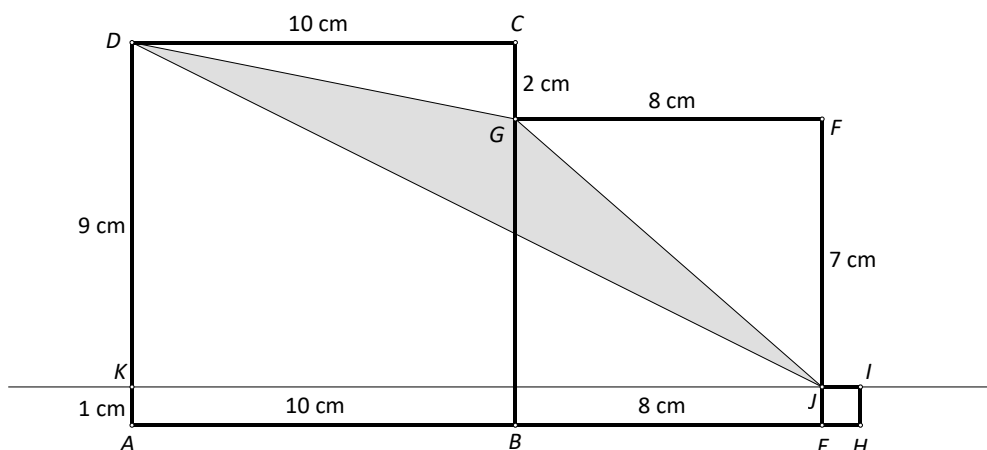
$$p(DJG) = 164 - 137$$

$$p(DJG) = 27 \text{ cm}^2$$

Drugi način:

Ako je površina kvadrata $ABCD$ 1 dm^2 , onda je duljina njegove stranice $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$, a ako je površina kvadrata $BEFG$ 64 cm^2 , onda je duljina njegove stranice 8 cm te ako je površina kvadrata $EHIJ$ 100 mm^2 , onda je duljina njegove stranice $10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$.

Neka je K točka na dužini \overline{AD} pri čemu je $|AK| = 1$ cm.



$$p(DJG) = p(ABCD) + p(BEFG) - (p(AEJK) + p(KJD) + p(JFG) + p(GCD))$$

Uvažavajući duljine stranica trokuta i četverokuta naznačenih na slici izračunava se:

$$p(AEJK) = (10 + 8) \cdot 1 = 18 \text{ cm}^2$$

$$p(KJD) = (10 + 8) \cdot 9 : 2 = 18 \cdot 9 : 2 = 81 \text{ cm}^2$$

$$p(JFG) = 8 \cdot 7 : 2 = 28 \text{ cm}^2$$

$$p(GCD) = 10 \cdot 2 : 2 = 10 \text{ cm}^2$$

Tada je:

$$p(DJG) = p(ABCD) + p(BEFG) - (p(AEJK) + p(KJD) + p(JFG) + p(GCD))$$

$$p(DJG) = 100 + 64 - (18 + 81 + 28 + 10)$$

$$p(DJG) = 164 - 137$$

$$p(DJG) = 27 \text{ cm}^2$$

- 3. Prvi način:** Plaćanje s dva bona znači da je Petra za sastojke za ručak potrošila ili 30 kn ili 35 kn ili 40 kn, a to je $\frac{1}{5}$ ukupnog iznosa.

Za ostale dnevne potrebe dala je polovinu preostalog novca, dakle $\frac{1}{2}$ od $\frac{4}{5}$ što je $\frac{2}{5}$ ukupnog iznosa.

Dakle, za ostale dnevne potrebe potrošila je dvostruko više nego za ručak, tj. 60 kn, 70 kn ili 80 kn. Kako je taj iznos plaćen s tri bona tada bi iznosi bili:

$$15 + 15 + 15 = 45$$

$$15 + 15 + 20 = 50$$

$$15 + 20 + 20 = 55$$

$$20 + 20 + 20 = 60$$

To je moguće samo ako je jedna petina svote jednaka 30 kn, a dvije petine svote 60 kuna. Stoga je ukupni iznos bonova jednak $5 \cdot 30 \text{ kn} = 150 \text{ kn}$.

Drugi način: Plaćanje s dva bona znači da je Petra za sastojke za ručak potrošila ili 30 kn ili 35 kn ili 40 kn, a to je $\frac{1}{5}$ ukupnog iznosa. Prema tome, ukupna svota mogla je biti ili 150 kn ili 175 kn ili

200 kn. Za ostale dnevne potrebe potrošila je polovinu preostalog novca, dakle $\frac{2}{5}$ ukupnog iznosa.

Taj iznos plaćen s tri bona što znači da je mogao iznositi $3 \cdot 15 = 45 \text{ kn}$, $2 \cdot 15 + 20 = 50 \text{ kn}$,

$15 + 2 \cdot 20 = 55 \text{ kn}$ ili $3 \cdot 20 = 60 \text{ kn}$. No, $\frac{2}{5}$ svote ne može biti neparan broj, što znači da je za

ostale potrebe Petra potrošila 50 kn ili 60 kn. To znači da bi ukupna svota mogla biti

$$(50 : 2) \cdot 5 = 125 \text{ kn} \text{ ili } (60 : 2) \cdot 5 = 150 \text{ kn}.$$

Oba uvjeta zadovoljava samo iznos od 150 kn.

Treći način: Petra je ručak platila s dva bona i potrošila je $\frac{1}{5}$ ukupne količine novca. To je mogla napraviti na sljedeće načine:

- a) Ručak je platila s dva bona od 15 kn, što iznosi 30 kn.

Ako je $\frac{1}{5}$ količine novca 30 kn, onda je ukupno imala $5 \cdot 30 = 150 \text{ kn}$.

- b) Ručak je platila s jednim bonom od 15 kn i jednim od 20 kn, što iznosi 35 kn.

Ako je $\frac{1}{5}$ količine novca 35 kn, onda je ukupno imala $5 \cdot 35 = 175 \text{ kn}$.

- c) Ručak je platila s dva bona od 20 kn, što iznosi 40 kn.

Ako je $\frac{1}{5}$ količine novca 40 kn, onda je ukupno imala $5 \cdot 40 = 200$ kn.

Polovinu preostalog novca dala je za ostale dnevne namirnice i platila ih je s tri bona. Za to je najviše mogla potrošiti $3 \cdot 20 = 60$ kn.

U prvom slučaju, nakon što je platila ručak, ostalo joj je $150 - 30 = 120$ kn. Polovina od 120 je 60, dakle ostale namirnice je platila s tri bona od 20 kn jer u drugom i trećem slučaju je polovina ostalog novca veća od 60 kn. ($175 - 35 = 140$, $140 : 2 = 70$ i $200 - 40 = 160$, $160 : 2 = 80$).

Dakle, ukupna novčana vrijednost bonova je 150 kn.

4. Prvi način: Označimo s C broj crvenih kuglica, sa \check{Z} broj žutih kuglica, a s P broj plavih kuglica.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je:

$$C + \check{Z} + P = 1500$$

$$3 \cdot C = 5 \cdot \check{Z}$$

$$2 \cdot C = 5 \cdot P$$

Peterokratnik broja crvenih kuglica jednak je peterokratniku zbroja plavih i žutih kuglica, što znači da crvenih kuglica ima isto koliko je žutih i plavih kuglica zajedno, tj. $C = \check{Z} + P$.

Znači da je 1500 dvostruko veći od broja crvenih kuglica, tj. $C + C = 1500$, odnosno $2 \cdot C = 1500$.

Tada je $C = 1500 : 2$, tj. $C = 750$.

Za broj žutih kuglica vrijedi $3 \cdot 750 = 5 \cdot \check{Z}$, a za broj plavih kuglica $2 \cdot 750 = 5 \cdot P$.

$$5 \cdot \check{Z} = 2250$$

$$5 \cdot P = 1500$$

$$\check{Z} = 2250 : 5$$

$$P = 1500 : 5$$

$$\check{Z} = 450$$

$$P = 300$$

U kutiji ima 300 plavih kuglica, 750 crvenih i 450 žutih kuglica.

Dvokratnik broja žutih kuglica je $2 \cdot 450 = 900$, što je tri puta veće od broja plavih kuglica.

Drugi način: Označimo s C broj crvenih, sa \check{Z} broj žutih, a s P broj plavih kuglica.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $3 \cdot C = 5 \cdot \check{Z}$ i $2 \cdot C = 5 \cdot P$.

Tada je $\check{Z} = \frac{3}{5}$ broja crvenih kuglica, odnosno $P = \frac{2}{5}$ broja crvenih kuglica, što znači da žute i plave

kuglice zajedno daju $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5}$ broja crvenih kuglica. Dakle, žutih i plavih kuglica zajedno ima

koliko i crvenih kuglica. Budući da je ukupan broj kuglica jednak 1500, zaključujemo da polovina tog broja, $1500 : 2 = 750$, otpada na crvene kuglice. Žutih kuglica tada ima $(750 : 5) \cdot 3 = 150 \cdot 3 = 450$, a plavih $750 - 450 = 300$.

Dvokratnik broja žutih kuglica je $2 \cdot 450 = 900$, što je tri puta veće od broja plavih kuglica.

Treći način: Označimo s C broj crvenih kuglica, sa \check{Z} broj žutih kuglica, a s P broj plavih kuglica.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je:

$$3 \cdot C = 5 \cdot \check{Z}$$

$$2 \cdot C = 5 \cdot P$$

$$C + \check{Z} + P = 1500$$

To znači da je:

$$5 \cdot C + 5 \cdot \check{Z} + 5 \cdot P = 7500, \text{ odnosno } 5 \cdot C + 3 \cdot C + 2 \cdot C = 7500.$$

$$10 \cdot C = 7500$$

$$C = 750$$

Iz $3 \cdot C = 5 \cdot \check{Z}$ dobijemo $\check{Z} = 450$, a iz $2 \cdot C = 5 \cdot P$ je $P = 300$.

U kutiji ima 300 plavih, 750 crvenih i 450 žutih kuglica.

5. Prvi način: Neka je $n = \overline{abcd}$, gdje su a, b, c i d različite znamenke.

Broj je djeljiv brojem 5 ako je njegova znamenka jedinica 0 ili 5.

Kako je n višekratnik broja 5, znamenka $d = 0$ ili $d = 5$ pa je broj n oblika $\overline{abc0}$ ili $\overline{abc5}$.

Broj je djeljiv brojem 9 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv brojem 9.

n	$\overline{abc0}$	$\overline{abc5}$
Troznamenkasti broj bez tisućice je djeljiv brojem 9:	$\overline{bc0}$ $b + c = 9$ ili $b + c = 18$	$\overline{bc5}$ $b + c + 5 = 9$ ili $b + c + 5 = 18$
	$b + c = 18$ ne može biti, jer bi bilo $b = c = 9$	$b + c = 4$ ili $b + c = 13$
	$b + c = 9 \rightarrow b = 1, c = 8$ $b = 2, c = 7$ $b = 3, c = 6$ $b = 4, c = 5$ $b = 5, c = 4$ $b = 6, c = 3$ $b = 7, c = 2$ $b = 8, c = 1$	$b + c = 4 \rightarrow b = 0, c = 4$ $b = 1, c = 3$ $b = 3, c = 1$ $b = 4, c = 0$ $b + c = 13 \rightarrow b = 4, c = 9$ $b = 6, c = 7$ $b = 7, c = 6$ $b = 9, c = 4$
Troznamenkasti broj bez stotice je djeljiv brojem 11:	$\overline{ac0}$ 110, 220, ... otpadaju zbog jednakih znamenaka	$\overline{ac5}$ $b = 0, c = 4 \rightarrow \overline{a45}$ nema takvog broja djeljivog brojem 11 $b = 1, c = 3 \rightarrow \overline{a35} \rightarrow 935$ (9135) $b = 3, c = 1 \rightarrow \overline{a15} \rightarrow 715$ (7315) $b = 4, c = 0 \rightarrow \overline{a05} \rightarrow 605$ (6405) $b = 4, c = 9 \rightarrow \overline{a95} \rightarrow 495$ (4495) otpada $b = 6, c = 7 \rightarrow \overline{a75} \rightarrow 275$ (2675) $b = 7, c = 6 \rightarrow \overline{a65} \rightarrow 165$ (1765) $b = 9, c = 4 \rightarrow \overline{a45}$ nema takvog broja djeljivog brojem 11

Troznamenkasti broj bez desetice je djeljiv brojem 7:		$9135 \rightarrow 915$ nije djeljiv brojem 7 $7315 \rightarrow 735$ je djeljiv brojem 7 $6405 \rightarrow 645$ nije djeljiv brojem 7 $2675 \rightarrow 265$ nije djeljiv brojem 7 $1765 \rightarrow 175$ je djeljiv brojem 7
---	--	--

Postoje dva četveroznamenkasta broja s traženim svojstvima, to su 7315 i 1765.

Drugi način: Neka je $n = \overline{abcd}$, gdje su a, b, c i d različite znamenke.

Broj je djeljiv brojem 5 ako je njegova znamenka jedinica 0 ili 5.

Kako je n višekratnik broja 5, znamenka $d = 0$ ili $d = 5$ pa je broj n oblika $\overline{abc0}$ ili $\overline{abc5}$.

Kako troznamenkasti broj $\overline{ac0}$ ili $\overline{ac5}$ koji je ostao u zapisu nakon brisanja znamenke stotice mora biti djeljiv brojem 11, on mora biti djeljiv i brojem 55.

Troznamenkasti brojevi djeljivi brojem 55 su: 110, 165, 220, 275, 330, 385, 440, 495, 550, 605, 660, 715, 770, 825, 935 i 990. Kako znamenke traženog broja moraju biti različite, preostaju brojevi: 165, 275, 385, 495, 605, 715, 825 i 935.

Znači, četveroznamenkasti brojevi su oblika: $\overline{1b65}$, $\overline{2b75}$, $\overline{3b85}$, $\overline{4b95}$, $\overline{6b05}$, $\overline{7b15}$, $\overline{8b25}$ i $\overline{9b35}$.

Korištenjem uvjeta da troznamenkasti broj nastao brisanjem znamenke tisućice mora biti djeljiv brojem 9, a broj je djeljiv brojem 9 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv brojem 9, slijedi:

$$\overline{b65} \rightarrow b + 11 \text{ može biti } 18, \text{ odnosno } b = 7 \rightarrow 1765$$

$$\overline{b75} \rightarrow b + 12 \text{ može biti } 18, \text{ odnosno } b = 6 \rightarrow 2675$$

$$\overline{b85} \rightarrow b + 13 \text{ može biti } 18, \text{ odnosno } b = 5 \rightarrow 3585, \text{ otpada zbog dviju jednakih znamenaka}$$

$$\overline{b95} \rightarrow b + 14 \text{ može biti } 18, \text{ odnosno } b = 4 \rightarrow 4495, \text{ otpada zbog dviju jednakih znamenaka}$$

$$\overline{b05} \rightarrow b + 5 \text{ može biti } 9, \text{ odnosno } b = 4 \rightarrow 6405$$

$$\overline{b15} \rightarrow b + 6 \text{ može biti } 9, \text{ odnosno } b = 3 \rightarrow 7315$$

$$\overline{b25} \rightarrow b + 7 \text{ može biti } 9, \text{ odnosno } b = 2 \rightarrow 8225, \text{ otpada zbog dviju jednakih znamenaka}$$

$$\overline{b35} \rightarrow b + 8 \text{ može biti } 9, \text{ odnosno } b = 1 \rightarrow 9135$$

Za brojeve 1765, 2675, 6405, 7315 i 9135 treba ispitati djeljivost brojem 7 troznamenkastih brojeva nastalih brisanjem njihove znamenke desetice.

$$1765 \rightarrow 175 = 7 \cdot 25$$

$$2675 \rightarrow 265 \text{ nije djeljiv brojem } 7$$

$$6405 \rightarrow 645 \text{ nije djeljiv brojem } 7$$

$$7315 \rightarrow 735 = 7 \cdot 105$$

$$9135 \rightarrow 915 \text{ nije djeljiv brojem } 7$$

Postoje dva četveroznamenkasta broja s traženim svojstvima, to su 7315 i 1765.