ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

5. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način: Neka je prvi dan pročitao x stranica knjige.

1. dan: x stranica
2. dan: $x + 8$ stranica
3. dan: $(x + 8) + 15 = x + 23$ stranice
4. dan: $x + x$ stranica
5. dan: $x + x + 8$ stranica — 3 BODA

Vrijedi jednadžba:

$x + x + 8 + x + 23 + x + x + x + x + 8 = 200$ — 1 BOD

Pojednostavljivanjem dobivamo:

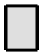
$7\,x = 200 – 39$,

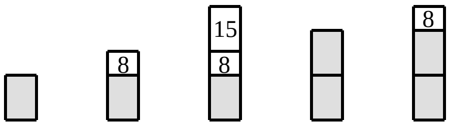
$x = 161 : 7$,

$x = 23$. — 3 BODA

Prvi dan je pročitao 23 stranice knjige, drugi dan 31 stranicu, treći i četvrti dan po 46 stranica, a peti dan 54 stranice knjige. — 3 BODA

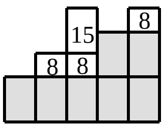
…………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način: Označimo li s  broj stranica pročitanih prvog dana, za ostale dane vrijedi:

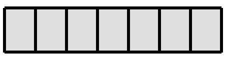


1. dan 2. dan 3. dan 4. dan 5. dan

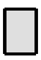
3 BODA

Ukupno pročitan broj stranica je: 

1 BOD

Zaključujemo da  vrijedi:

$200 – (8 + 8 + 8 + 15) = 200 – 39 = 161$, — 2 BODA

tj. da  vrijedi $161 : 7 = 23$. — 1 BOD

Prvi dan je pročitao 23 stranice knjige, drugi dan 31 stranicu, treći i četvrti dan po 46 stranica, a peti dan 54 stranice knjige. — 3 BODA

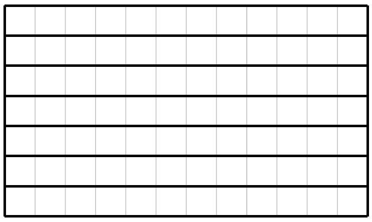
………………………………………………………………........ UKUPNO 10 BODOVA

2. Broj je djeljiv brojem 72, ako je djeljiv i brojem 8 i brojem 9. 1 BOD
Znamenke a, b, c i d mogu imati vrijednost 2, 3, 5 i 7. 1 BOD
Tada je 2 + 3 + 5 + 7 = 17. 1 BOD
Da bi broj bio djeljiv brojem 9, mora biti $x = 1$. 1 BOD
Broj $\overline{1abcd}$ je djeljiv brojem 8, pa samim tim i brojem 2. To jedino vrijedi za $d = 2$. 1 BOD
Da bi broj bio djeljiv brojem 8, troznamenkasti završetak $\overline{bc2}$ mora biti djeljiv brojem 8, pri čemu b i c mogu imati vrijednost 3, 5 ili 7. 1 BOD
Postoji 6 mogućnosti: 352, 372, 532, 572, 732 i 752. 1 BOD
Dijeljenjem brojem 8 provjeri se da djeljivost vrijedi samo za 352 i 752. 1 BOD
Za 352 je $a = 7$, a za 752 je $a = 3$. 1 BOD
Postoje dva tražena broja: 13 752 i 17 352. 1 BOD
…………………………………………………………..………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

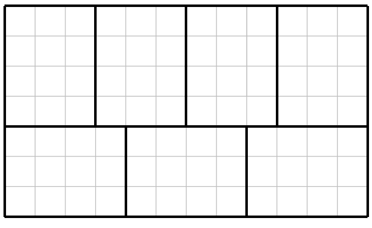
Napomena: Provjera djeljivosti brojem 9 i otkrivanje prve znamenke broja može se napraviti i nakon određivanja četveroznamenkastog završetka broja.

3. Površina pravokutne ploče 7 × 12 jednaka je 7 · 12 = 84. 1 BOD
Kako bismo je popločali sa 7 sukladnih pravokutnika, površina svakog od tih pravokutnika mora biti jednaka 12. 2 BODA
Dimenzije pravokutnika čije su duljine prirodni brojevi mogu biti samo jedne od sljedećih: 1 × 12, 2 × 6 ili 3 × 4. 2 BODA

Pravokutnicima dimenzija 1 × 12 možemo popločati ploču dimenzija 7 × 12, jer 7 takvih pravokutnika možemo složiti jednog do drugog, kao na slici:



Međutim, stranice tih pravokutnika nisu prirodni brojevi veći od jedan, pa to nije rješenje. 1 BOD
Popločavanje dimenzije pravokutnika 2 × 6 nije moguće jer se takvim pravokutnicima može popločiti samo ploča kojoj su širina i dužina parni brojevi, a naša ploča nije takva. 2 BODA
Pravokutnicima dimenzija 3 × 4 možemo popločati ploču 7 × 12, jer ih možemo složiti tako da 4 stavimo jednog do drugog po duljini ploče, a preostala 3 okomito na njih, kao na slici: 2 BODA



…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Za popločavanje pravokutnicima dimenzija 3 × 4 učenik mora dati primjer, ali taj je primjer dovoljno ili nacrtati ili opisati riječima (nije potrebno oboje).

Napomena 2: Učenici mogu pokazati da popločavanje pravokutnicima dimenzija 2×6 nije moguće i na neki drugačiji način od gore navedenog, a svaki ispravan način zaključivanja da takve dimenzije nisu moguće treba, kao i u gornjem slučaju, bodovati s 2 BODA.

4. Prvi način:

Promatramo skupine od tri kuće s parnim i dvije kuće s neparnim brojem.
To je zajedno pet kuća, a budući da je $105 : 5 = 21$, zaključujemo da u ulici ima 21 takva skupina.
U ulici ima $21 \cdot 3 = 63$ kuće s parnim i $21 \cdot 2 = 42$ kuće s neparnim kućnim brojem. 3 BODA
S parne su strane kuće označene brojevima od 2 do 126.
Dakle, 4 su kuće s jednoznamenkastim brojevima (od 2 do 8),
45 kuća s dvoznamenkastim brojevima (od 10 do 98),
te 14 kuća s troznamenkastim brojevima (od 100 do 126).
Za njihovo označavanje upotrijebljeno je $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 14 \cdot 3 = 136$ znamenaka. 3 BODA

S neparne su strane kuće označene brojevima od 1 do 83.
Dakle, 5 je kuća s jednoznamenkastim brojevima (od 1 do 9),
a 37 kuća s dvoznamenkastim brojevima (od 11 do 83).
Za njihovo označavanje upotrijebljeno je $5 \cdot 1 + 37 \cdot 2 = 79$ znamenaka. 3 BODA

Za označavanje kuća s obje strane ulice upotrijebljeno je $136 + 79 = 215$ znamenaka. 1 BOD
……………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Promatramo skupine od tri kuće s parnim i dvije kuće s neparnim brojem.
To je zajedno pet kuća, a budući da je $105 : 5 = 21$, zaključujemo da u ulici ima 21 takva skupina.
1 BOD
S parne su strane kuće označene brojevima od 2 do 126, a s neparne su strane kuće označene brojevima od 1 do 83. 1 BOD
Do broja 84 pojavljuju se svi prirodni brojevi redom, a od 86 do 126 samo parni. 1 BOD
Za prvih 9 jednoznamenkastih prirodnih brojeva upotrijebljeno je $9 \cdot 1 = 9$ znamenaka. 1 BOD
Za dvoznamenkaste brojeve od 10 do 84 upotrijebljeno je $75 \cdot 2 = 150$ znamenaka. 2 BODA
Za parne brojeve 86, 88, 90, 92, 94, 96 i 98 upotrijebljeno je $7 \cdot 2 = 14$ znamenaka. 1 BOD
Za troznamenkaste parne brojeve 100, 102, … , 126 upotrijebljeno je $14 \cdot 3 = 42$ znamenke.
2 BODA
Za označavanje kuća s obje strane ulice upotrijebljeno je $9 + 150 + 14 + 42 = 215$ znamenaka.
1 BOD
……………………………………………………………………..….. UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Zbroj umnožaka u 1. retku / 1. stupcu jednak je
$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12 = (12 \cdot 13) : 2 = 156 : 2 = 78$. 2 BODA
Zbroj umnožaka u 2. retku / 2. stupcu je
$2 + 4 + 6 + \ldots + 20 + 22 + 24 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12) = 2 \cdot 78$. 2 BODA
Analogno, zbroj umnožaka u 3. retku / 3. stupcu je $3 \cdot 78$ i dalje redom do $12 \cdot 78$. 3 BODA
Zbroj zbrojeva svih umnožaka po svim retcima / stupcima je
$78 + 2 \cdot 78 + 3 \cdot 78 + \ldots + 10 \cdot 78 + 11 \cdot 78 + 12 \cdot 78 =$
$= 78 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12)$ 2 BODA
$= 78 \cdot 78 = 6084$. 1 BOD
…………………………………………………….…………...…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Zbroj umnožaka u 1. retku je

$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12 = (12 \cdot 13) : 2 = 156 : 2 = 78.$ 2 BODA

Zbroj umnožaka u 2. retku je

$2 + 4 + 6 + \ldots + 20 + 22 + 24 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + 12) = 2 \cdot 78 = 156.$ 2 BODA

Analogno, zbroj umnožaka u 3. retku je $3 \cdot 78 = 234$, u 4. retku 312,
u 5. retku 390, u 6. retku 468, u 7. retku 546, u 8. retku 624,
u 9. retku 702, u 10. retku 780, u 11. retku 858 i u 12. retku 936. 5 BODOVA

(po 1 BOD za dva zbroja)

Zbroj zbrojeva svih umnožaka po svim retcima je

$78 + 156 + 234 + 312 + 390 + 468 + 546 + 624 + 702 + 780 + 858 + 936 = 6084.$ 1 BOD

…………………………………………………………………..……..…. UKUPNO 10 BODOVA