

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
28. veljače 2018.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. Prvi način:**

Ako je korijen prirodan broj, broj pod korijenom mora također biti prirodan. 1 BOD

Vrijedi:

$$\frac{a+64}{a-64} = 1 + \frac{128}{a-64}. \quad 2 \text{ BODA}$$

Broj  $a - 64$  mora biti djelitelj broja 128. Negativne djelitelje ne treba ni promatrati, jer će za njih promatrani broj biti ili negativan ili jednak 0, pa korijeni ili ne postoje ili su jednaki 0 što nije prirodan broj. 2 BODA

Pogledajmo tablicu:

$a - 64$	1	2	4	8	16	32	64	128
$a$	65	66	68	72	80	96	128	192
$\frac{128}{a-64}$	128	64	32	16	8	4	2	1
$1 + \frac{128}{a-64}$	129	65	33	17	<b>9</b>	5	3	2

3 BODA

Dakle, 9 je jedini kvadrat broja,

tj. postoji samo jedan broj  $a = 80$  za koji je  $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$  također prirodan broj. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Ako je korijen prirodan broj, broj pod korijenom također mora biti prirodan. 1 BOD

Označimo  $x = \frac{a+64}{a-64}$  i iz toga izrazimo  $a$ .

$$ax - 64x = a + 64$$

$$ax - a = 64x + 64$$

$$a \cdot (x - 1) = 64x + 64$$

$$a = \frac{64x + 64}{x - 1} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$a = \frac{64x - 64 + 128}{x - 1}$$

$$a = 64 + \frac{128}{x - 1} \quad 1 \text{ BOD}$$

Broj  $x - 1$  mora biti djelitelj broja 128. Budući da su brojevi  $x$  i  $a$  prirodni brojevi, promatramo samo djelitelje broja 128 koji su također prirodni brojevi. 2 BODA

Djelitelji broja 128 su 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 i 128. 2 BODA

Ako  $x - 1$  poprima te vrijednosti, onda je  $x$  (redom) 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65 i 129. 1 BOD

Među njima je jedino korijen broja 9 prirodan broj.

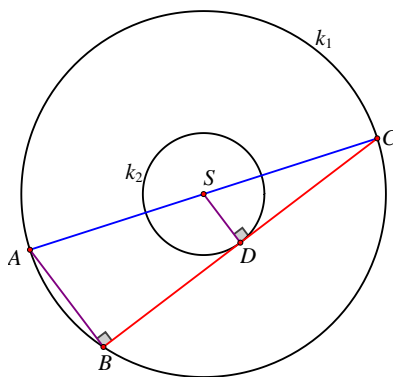
1 BOD

Onda je  $a = 64 + \frac{128}{8} = 80$  jedini broj s traženim svojstvom.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2.



Skica:

1 BOD

$S$  je središte kružnica, a točka  $D$  diralište tangente  $\overline{BC}$  i kružnice  $k_2$ .

Duljine polumjera kružnica  $k_1$  i  $k_2$  označimo redom sa  $r_1$  i  $r_2$ . Iz uvjeta zadatka slijedi omjer

$r_1 : r_2 = 3 : 1$ , odnosno  $r_1 = 3r_2$ .

1 BOD

Prema Talesovom poučku obodni kut  $\angle ABC$  nad promjerom  $\overline{AC}$  je pravi kut.

Prema tome, trokut  $\triangle ABC$  je pravokutan.

1 BOD

Tetiva  $\overline{BC}$  kružnice  $k_1$  je i tangenta kružnice  $k_2$ , te je okomita na polumjer  $\overline{SD}$ .

Prema tome, i  $\triangle SDC$  je pravokutan.

1 BOD

Trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle SDC$  su slični po poučku KK (trokuti imaju jedan zajednički kut pri vrhu  $C$  i oba imaju jedan pravi kut).

1 BOD

Iz sličnosti trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle SDC$  slijedi proporcionalnost duljina njihovih stranica:

$$\frac{|AB|}{|SD|} = \frac{|AC|}{|SC|} \Rightarrow \frac{12}{r_2} = \frac{6r_2}{3r_2} \Rightarrow r_2 = 6 \text{ cm},$$

2 BODA

a  $r_1 = 18 \text{ cm}$ .

1 BOD

Površina kružnog vijenca računa se po formuli  $P = (r_1^2 - r_2^2)\pi$ , gdje su  $r_1$  i  $r_2$  duljine polumjera

kružnica  $k_1$  i  $k_2$ .

1 BOD

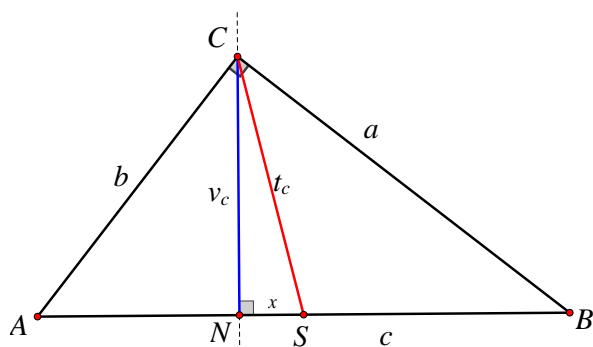
Prema tome, površina kružnog vijenca je  $P = (324 - 36)\pi \text{ cm}^2 = 288\pi \text{ cm}^2$ .

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Površina kružnog vijenca može se dobiti tako da se posebno izračunaju površine krugova omeđenih kružnicama  $k_1$  i  $k_2$ , a zatim se te vrijednosti oduzmu.

3.



Skica:

1 BOD

(Napomena: Ako na skici nisu nacrtane dužine visina  $v_c$  i težišnica  $t_c$ , ne bodovati 1 BODOM.)

Prema uvjetu zadatka je  $v_c : t_c = 12 : 13$  pa postoji realan broj  $k$  takav da je  $v_c = 12k$  i  $t_c = 13k$ .

Označimo sa  $N$  nožište visine nacrtane vrhom  $C$ , a sa  $S$  polovište hipotenuze  $c$ .

Kako je trokut  $ABC$  pravokutan, točka  $S$  je središte opisane kružnice trokuta,

1 BOD

pa je  $\frac{c}{2} = t_c = 13k$ .

1 BOD

Označimo  $|NS| = x$ . U pravokutnom trokutu  $NSC$  vrijedi  $x^2 = t_c^2 - v_c^2 = 169k^2 - 144k^2 = 25k^2$ .

Zato je  $x = 5k$ .

2 BODA

Slijedi da je  $|AN| = \frac{c}{2} - x = 13k - 5k = 8k$ .

1 BOD

Dalje možemo na dva načina.

**Prvi način:**

Uz oznake  $|\angle CAB| = \alpha$  i  $|\angle ABC| = \beta$  je  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Budući da su trokuti  $ANC$  i  $CNB$  pravokutni, slijedi da je  $|\angle NCA| = \beta$  i  $|\angle BCN| = \alpha$ .

1 BOD

Zato su trokuti  $ANC$  i  $CNB$  slični po poučku KK, pa vrijedi

1 BOD

$$\frac{a}{b} = \frac{v_c}{\frac{c}{2} - x} = \frac{12k}{8k} = \frac{3}{2} = 3:2.$$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Trokuti  $ABC$  i  $ACN$  imaju jedan zajednički kut ( $\angle BAC$ , odnosno  $\angle NAC$ ) i oba imaju jedan pravi kut, pa su slični po poučku KK.

2 BODA

Tada vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{v_c}{|AN|} = \frac{12k}{8k} = \frac{3}{2} = 3:2.$$

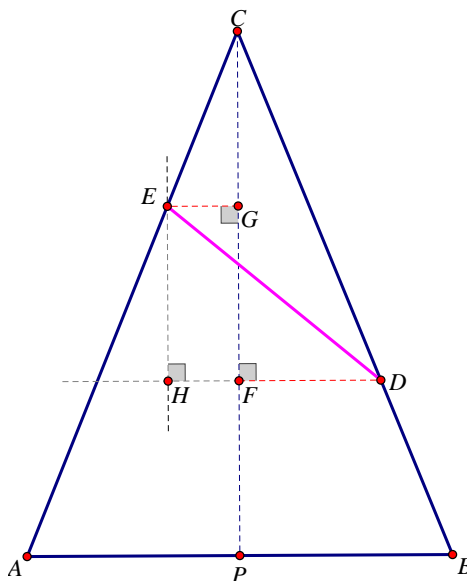
2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Neka je  $P$  polovište osnovice  $\overline{AB}$ . Budući da je trokut  $ABC$  jednakokrakan, to je  $\overline{CP}$  je okomita na  $\overline{AB}$ . Točkama  $D$  i  $E$  nacrtajmo okomice na  $\overline{CP}$  i nožišta tih okomica označimo redom kao točke  $F$

i  $G$ . Produljimo dužinu  $\overline{FD}$  preko točke  $F$  i na tom pravcu označimo točku  $H$  takvu da je  $HFGE$  pravokutnik. Tada je  $\triangle HDE$  pravokutan trokut s hipotenuzom  $\overline{DE}$ .



Skica:

1 BOD

(**Napomena:** Ako na skici nisu nacrtani polupravac  $\overrightarrow{DF}$  (produžetak dužine  $\overline{DF}$ ) i okomica točkom  $E$  na dužinu  $\overline{DF}$ , **ne bodovati 1 BODOM.**)

Iz uvjeta koje zadovoljavaju točke  $E$  i  $D$ ,  $|CE|:|EA|=1:2$  i  $|BD|:|DC|=1:2$ , slijedi  $|CE|:|CA|=1:3$  i  $|DC|:|BC|=2:3$  (tj.  $|CE|=\frac{13}{3}\text{ cm}$  i  $|DC|=\frac{26}{3}\text{ cm}$ ) te  $|AP|=5\text{ cm}$ .

Iz pravokutnog trokuta  $APC$  slijedi da je  $|PC|=\sqrt{|AC|^2-|AP|^2}=12\text{ cm}$ .

1 BOD

Trokuti  $EGC$  i  $APC$  su slični (po poučku KK),

1 BOD

pa je  $|EG|:|AP|=|CE|:|CA|=1:3$ , odnosno  $|EG|=\frac{|AP|}{3}=\frac{5}{3}\text{ cm}$

1 BOD

i  $|GC|:|PC|=1:3$ , odnosno  $|GC|=\frac{|PC|}{3}=4\text{ cm}$ .

1 BOD

Trokuti  $DFC$  i  $PBC$  su slični (po poučku KK),

1 BOD

pa je  $|FD|:|PB|=|DC|:|BC|=2:3$ , odnosno  $|FD|=\frac{2|PB|}{3}=\frac{10}{3}\text{ cm}$

1 BOD

i  $|FC|:|PC|=2:3$ , odnosno  $|FC|=\frac{2|PC|}{3}=8\text{ cm}$ .

1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut  $EHD$  dobivamo

$$|DE|=\sqrt{|HD|^2+|EH|^2}=$$

$$=\sqrt{(|HF|+|FD|)^2+|FG|^2}=$$

$$=\sqrt{(|EG|+|FD|)^2+(|FC|-|GC|)^2}=$$

1 BOD

$$=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}\text{ cm}.$$

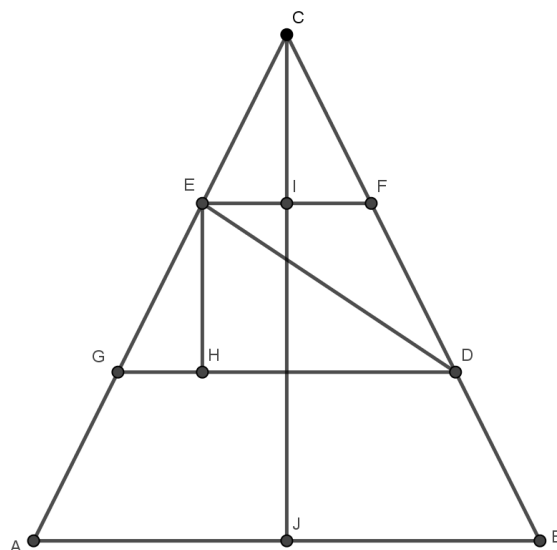
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Nadopunimo sliku na sljedeći način:

Iz točaka  $D$  i  $E$  povuku se usporednice s osnovicom trokuta  $AB$  (dobiju se točke  $F$  i  $G$ ), a zatim se povuku okomice iz točaka  $C$  i  $E$  (te se označe točke  $H$ ,  $I$  i  $J$ ). 1 BOD



Prema Talesovom poučku, usporedni pravci na krakovima odsijecaju proporcionalne dužine.

Zbog  $|BC| = |AC|$  je  $|AG| = |BD| = \frac{1}{3}|AC|$  i  $|CE| = \frac{1}{3}|AC|$ , te je i  $|GE| = \frac{1}{3}|AC|$ . 1 BOD

Točka  $J$  je polovište jednakokraknog trokuta  $ABC$ , pa je  $|AJ| = 5$  cm. Iz pravokutnog trokuta  $AJC$  slijedi da je  $|CJ|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ , odnosno  $|CJ| = 12$  cm. 1 BOD

Trokuti  $CEI$  i  $CAJ$  su slični (po poučku KK) pa je, zbog  $|CE| : |CA| = 1 : 3$ ,

$|CE| = \frac{13}{3}$  cm,  $|EI| = \frac{5}{3}$  cm i  $|CI| = 4$  cm. 2 BODA

Po istom poučku slični su trokuti  $GDC$  i  $ABC$ .

Zbog  $|CD| : |CB| = 2 : 3$  je  $|GD| = \frac{2}{3} \cdot |AB| = \frac{20}{3}$  cm. 1 BOD

Trokuti  $CEI$  i  $EGH$  su sukladni (KSK poučak) pa je  $|GH| = \frac{5}{3}$  cm i  $|EH| = 4$  cm. 1 BOD

Tada je  $|HD| = |GD| - |GH| = \frac{20}{3} - \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = 5$  cm. 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta  $EHD$  slijedi:

$|ED|^2 = |EH|^2 + |HD|^2 = 4^2 + 5^2 = 41$ . 1 BOD

Dakle,  $|ED| = \sqrt{41}$  cm. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**5. Označimo broj točaka na drugom pravcu s  $x$ .**

Na prvom je pravcu 8 točaka, koje čine  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$  dužina. 1 BOD

Svaka od tih dužina sa svakom od  $x$  točaka na drugom pravcu čini jedan trokut.

Takvih je trokuta  $28x$ . 1 BOD

- Ako je na drugom pravcu  $x$  točaka, one određuju  $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$  dužina. 1 BOD
- Svaka dužina sa svakom od 8 točaka na prvom pravcu također čine trokut.
- Takvih je trokuta  $4x^2 - 4x$ . 1 BOD
- Ukupan broj trokuta je 640. Vrijedi:
- $$28x + 4x^2 - 4x = 640$$
- 1 BOD
- $$4x^2 + 24x - 640 = 0 \quad / : 4$$
- $$x^2 + 6x - 160 = 0$$
- 1 BOD
- Dobivena kvadratna jednadžba riješi se rastavljanjem srednjeg člana i izlučivanjem (**prvi način**):
- $$x^2 + 16x - 10x - 160 = 0$$
- $$x \cdot (x + 16) - 10 \cdot (x + 16) = 0$$
- $$(x + 16) \cdot (x - 10) = 0$$
- 2 BODA
- Iz  $x + 16 = 0$  slijedi  $x_1 = -16$ , a iz  $x - 10 = 0$  slijedi  $x_2 = 10$ . 1 BOD
- Budući da broj točaka mora biti prirodni broj, na drugom je pravcu 10 točaka. 1 BOD
- ..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena 1:** Jednadžba  $x^2 + 6x - 160 = 0$  se može riješiti i na sljedeća dva načina:

**Drugi način:**

- $$x^2 + 6x - 160 = 0$$
- $$(x + 3)^2 - 9 - 160 = 0$$
- $$(x + 3)^2 = 169$$
- 1 BOD
- $$x + 3 = \sqrt{169}$$
- $$x_1 + 3 = 13 \quad x_2 + 3 = -13$$
- $$x_1 = 10 \quad x_2 = -16$$
- 2 BODA
- Broj točaka mora biti prirodan broj, dakle na drugom je pravcu 10 točaka. 1 BOD

**Treći način:**

- Iz  $x^2 + 6x = 160$  slijedi  $x(x + 6) = 160$ .
- Kako je  $x$  prirodan broj, zaključujemo da  $x$  mora biti djelitelj broja  $160 = 2^5 \cdot 5$ . 1 BOD
- Za svaku mogućnost da je  $x$  djelitelj broja 160 provjerimo je li  $x(x + 6) = 160$  2 BODA
- i ustanovimo da je jedino rješenje  $x = 10$ . 1 BOD

**Napomena 2:** Ukoliko učenik na prvom pravcu pogrešno prebroji 56, a na drugom  $x \cdot (x-1)$  dužina, zadatak treba bodovati s 0 BODOVA.

Ukoliko učenik točno prebroji 28 dužina na prvom pravcu, a na drugom pravcu prebroji  $x \cdot (x-1)$

dužina (umjesto  $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$ ) ili ukoliko učenik točno prebroji  $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$  dužina na drugom pravcu, a na prvom 56 (umjesto 28), onda treba bodovati dio rješenja do dobivanja kvadratne jednadžbe (koja onda nema cjelobrojna rješenja), slijedeći tu pogrešku i učenik, u tom slučaju, na zadatku najviše može dobiti 5 BODOVA.