ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x iznos novca prije plaćanja poreza.

Oporezuje se $\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}x=\frac{11}{15}x$, 2 BODA

a ne oporezuje $\frac{4}{15}x$. 1 BOD

Iz $\frac{4}{15}x=100\ 000$ dobiva se x = 375 000. Tvrtka je imala 375 000 kuna. 2 BODA

Od toga se po stopi 20 % oporezuje $\frac{2}{5}\cdot 375\ 000=150\ 000$ kn. 1 BOD

Iznos poreza je 150 000 · 0.2 = 30 000 kn. 1 BOD

Zatim se po stopi 10 % oporezuje $\frac{1}{3}\cdot 375\ 000=125\ 000$ kn. 1 BOD

Iznos poreza je 125 000 · 0.1 = 12 500 kn. 1 BOD

Za porez je ukupno plaćeno 30 000 + 12 500 = 42 500 kuna. 1 BOD

…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

2. **Prvi način:** Neka je α veličina unutarnjeg, a α_1 veličina susjednog vanjskog kuta zadanog pravilnog mnogokuta.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $\alpha = 9\alpha_1$ i $\alpha + \alpha_1 = 180°$.

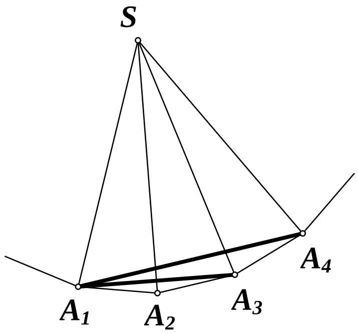
Slijedi da je $10\alpha_1 = 180°$, pa je $\alpha_1 = 18°$. 1 BOD

Tada je $\alpha = 180° - 18° = 162°$. 1 BOD

U pravilnom mnogokutu svi su vanjski kutovi jednakih veličina, a zbroj im je 360°.

Iz $18° \cdot n = 360°$ izračuna se da je $n = 20$, dakle riječ je o dvadeseterokutu. 1 BOD

Skica dijela dvadeseterokuta s traženim kutom izgleda ovako: 1 BOD



Vrijedi da je $|\angle A_1SA_2| = 360° : 20 = 18°$, pa je $|\angle A_1SA_3| = 2 \cdot 18° = 36°$ i

$|\angle A_1SA_4| = 3 \cdot 18° = 54°$. 2 BODA

Iz jednakokračnog trokuta A_1A_3S se izračuna

$|\angle A_3A_1S| = (180° - 36°) : 2 = 144° : 2 = 72°$. 1 BOD

Iz jednakokračnog trokuta A_1A_4S se izračuna

$|\angle A_4A_1S| = (180° - 54°) : 2 = 126° : 2 = 63°.$ 1 BOD

Nadalje, $|\angle A_3A_1A_4| = |\angle A_3A_1S| - |\angle A_4A_1S|$, pa je 1 BOD

$|\angle A_3A_1A_4| = 72° - 63° = 9°.$ 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način: Prvi dio identičan je postupku u prvom načinu uključujući i skicu (ukupno 4 BODA). Dalje slijedi:

Vrijedi da je $|\angle A_1SA_2| = 360° : 20 = 18°$, pa je $|\angle A_1SA_4| = 3 \cdot 18° = 54°$. 2 BODA

Iz jednakokračnog trokuta $A_1A_2A_3$ vrijedi da je

$|\angle A_3A_1A_2| = (180° - \alpha) : 2 = (180° - 162°) : 2 = 18° : 2 = 9°.$ 1 BOD

Iz jednakokračnog trokuta A_1A_4S se izračuna

$|\angle A_4A_1S| = (180° - 54°) : 2 = 126° : 2 = 63°.$ 1 BOD

Nadalje, $|\angle A_3A_1A_4| = \frac{\alpha}{2} - \left(|\angle A_2A_1A_3| + |\angle A_4A_1S|\right)$, pa je 1 BOD

$|\angle A_3A_1A_4| = 81° - (9° + 63°) = 81° - 72° = 9°.$ 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

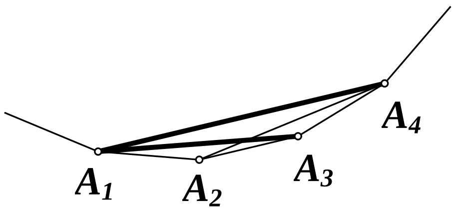
Treći način: Ako je α veličina unutarnjeg kuta mnogokuta, onda je veličina njegovog vanjskog kuta $180° - \alpha$.

Iz uvjeta zadatka $9 \cdot (180° - \alpha) = \alpha$, izračuna se $\alpha = 162°$. 2 BODA

Koristeći formulu za veličinu unutarnjeg kuta n-terokuta

$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = 162°$ izračuna se da je $n = 20$. 1 BOD

Skica dijela dvadeseterokuta s prikazom traženog kuta izgleda ovako: 1 BOD



Duljine stranica i veličine kutova pravilnog mnogokuta su jednake,
pa prema SKS poučku vrijedi: $\Delta A_1A_2A_3 \cong \Delta A_2A_3A_4$.

Tada je $|A_1A_3| = |A_2A_4|$. 1 BOD

Onda je, prema SSS poučku: $\Delta A_1A_3A_4 \cong \Delta A_4A_2A_1$.

Zbog toga vrijedi $|\angle A_3A_4A_1| = |\angle A_2A_1A_4|$. 1 BOD

Zbroj veličina kutova svakog četverokuta je 360°, a u četverokutu $A_1A_2A_3A_4$ dva kuta imaju po 162°, dok su druga dva jednakih veličina.

Onda je: $|\angle A_2A_1A_4| = (360° - 2 \cdot 162°) : 2 = 18°$. 2 BODA

U jednakokračnom trokutu $A_1A_2A_3$ je: $|\angle A_2A_1A_3| = (180° - 162°) : 2 = 9°$. 1 BOD

Konačno je: $|\angle A_3A_1A_4| = |\angle A_2A_1A_4| - |A_2A_1A_3| = 18° - 9° = 9°$. 1 BOD

…………………………………………………..…………..………...… UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način: Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka b može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka djeljiv je brojem 9, tj. $6 + 3a + 3b = 9k$, $k \in \mathbb{N}$. 1 BOD

Broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka a može biti 2, 4, 6 ili 8.

(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast) 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka djeljiv je brojem 3, tj. $3a + 2b = 3l$, $l \in \mathbb{N}$. 1 BOD

Kako su pribrojnik $3a$ i zbroj $3l$ djeljivi brojem 3, onda i drugi pribrojnik $2b$ mora biti djeljiv brojem 3. To vrijedi za $b = 0, 3, 6$, i 9. 1 BOD

Kako je znamenka b već uvjetovana djeljivošću brojem 2, znamenka b može biti 0 ili 6. 1 BOD

Uvrštavanjem broja b u izraz $6 + 3a + 3b = 9k$ slijedi:

a) $b = 0$

$6 + 3a = 9k$

Za $k = 1$ slijedi $a = 1$.

Za $k = 2$ slijedi $a = 4$.

Za $k = 3$ slijedi $a = 7$.

b) $b = 6$

$24 + 3a = 9k$

Za $k = 3$ slijedi $a = 1$.

Za $k = 4$ slijedi $a = 4$.

Za $k = 5$ slijedi $a = 7$.

U oba slučaja, zbog uvjeta djeljivosti brojem 2, znamenka a može biti samo 4. 2 BODA

Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA

……………………………………………………………..…………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način: Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka b može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka $6 + 3a + 3b$ mora biti djeljiv brojem 9. 1 BOD

Najveća vrijednost za a i b je 9, pa $6 + 3a + 3b$ može imati najveću vrijednost 60.
Zbroj $6 + 3a + 3b$ može imati vrijednost: 9, 18, 27, 36, 45 i 54.
Dijeljenjem brojem 3 dobije se da je $2 + a + b = 3, 6, 9, 12, 15$ ili 18, odnosno $a + b = 1, 4, 7, 10, 13$ ili 16. 1 BOD

Broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka a može biti 2, 4, 6 ili 8.

(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast) 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka koji je $3a + 2b$ mora biti djeljiv brojem 3. 1 BOD

Vidjeli smo da a može imati vrijednost 2, 4, 6 ili 8, dok b može biti 0, 2, 4, 6, ili 8.
Budući je zbroj dva parna broja opet parni broj, vrijednost zbroja $a + b$ može biti 4, 10 ili 16. Sve moguće kombinacije prikazane su u tablici (uključujući i vrijednost izraza $3a + 2b$): 2 BODA

a	b	$a + b$	$3a + 2b$
2	2	4	10
2	8	10	22
4	0	4	12
4	6	10	24

6	4	10	26
8	2	10	28
8	8	16	40

Od svih brojeva u zadnjem stupcu, brojem 3 su djeljivi samo 12 i 24. 1 BOD
Njih dobijemo za $a = 4$ i $b = 0$, odnosno $a = 4$ i $b = 6$.
Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA
…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način: Peteroznamenkasti broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.
Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka a može biti 2, 4, 6 ili 8.
(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast). 1 BOD
Imamo brojeve oblika $\overline{2b2b2}$, $\overline{4b4b4}$, $\overline{6b6b6}$ i $\overline{8b8b8}$.
Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv brojem 3.
Imamo sljedeće mogućnosti:

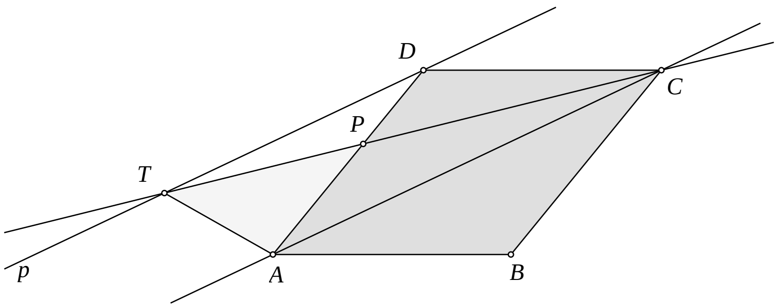
a	2	4	6	8
b	0, 3, 6, 9	0, 3, 6, 9	0, 3, 6, 9	0, 3, 6, 9

2 BODA

Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.
Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka b može biti 0, 2, 4, 6 ili 8, pa od u tablici navedenih mogućnosti za b ostaju $b = 0$ ili $b = 6$. 2 BODA

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv brojem 9. Ispitujemo mogućnosti:
Za $a = 2$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 202 020 i 6 262 626 koji nisu djeljivi brojem 9.
Za $a = 4$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 404 040 i 6 464 646 koji jesu djeljivi brojem 9.
Za $a = 6$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 606 060 i 6 666666 koji nisu djeljivi brojem 9.
Za $a = 8$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 808 080 i 6 868 686 koji nisu djeljivi brojem 9. 3 BODA
Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA
…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:



skica: 1 BOD

$p_{\Delta ACD} = p_{\Delta ACT}$ jer ta dva trokuta imaju zajedničku stranicu $\overline{AC}$ i jednake duljine visina na tu stranicu. 1 BOD

Kako je $p_{\Delta ACD} = p_{\Delta ACP} + p_{\Delta PCD}$ i $p_{\Delta ACT} = p_{\Delta ACP} + p_{\Delta APT}$
slijedi da je $p_{\Delta APT} = p_{\Delta PCD}$. 2 BODA

Vrijedi $|DP| = \frac{2}{5}|DA|$, a duljina visine na stranicu $\overline{DP}$ u trokutu PCD jednaka je duljini visine na stranicu $\overline{DA}$ u trokutu ACD.

Zbog toga je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$. 2 BODA

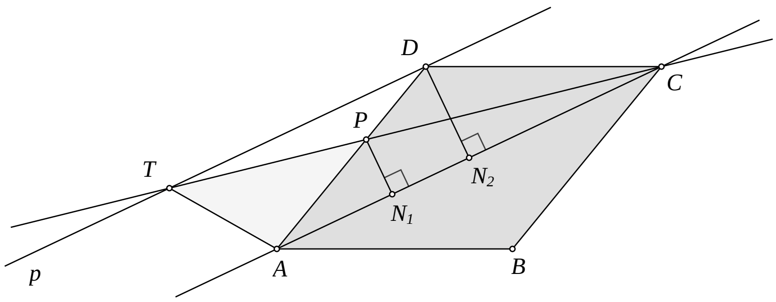
S obzirom da dijagonala dijeli romb na dva sukladna trokuta, $p_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} p_{ABCD}$,

pa je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} p_{ABCD} = \frac{1}{5} p_{ABCD}$, što znači da je i $p_{\Delta APT} = \frac{1}{5} p_{ABCD}$. 3 BODA

Dakle, $p_{\Delta APT} : p_{ABCD} = 1:5$. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

(**Napomena:** Dokazati da je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$ može se i ovako:



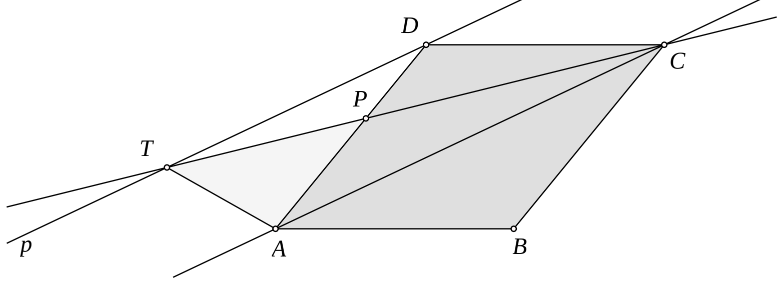
Označimo s N_1 i N_2 nožišta visina iz vrhova P i D u trokutima ΔACP i ΔACD.
Trokut ΔAN_1P sličan je trokutu ΔAN_2D po KK-poučku (zajednički kut kod vrha A i jedan pravi kut).

Kako je $|AP| = \frac{3}{5}|AD|$, zbog sličnosti trokuta će biti $|N_1P| = \frac{3}{5}|N_2D|$,

pa je i površina $p_{\Delta ACP} = \frac{3}{5} p_{\Delta ACD}$ (imaju zajedničku stranicu).

Dakle, $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$. 2 BODA)

Drugi način:



skica: 1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi $|PD| = \frac{2}{3}|AP|$, a duljina visine na stranicu $\overline{PD}$ u trokutu *PDT* jednaka je duljini visine na stranicu $\overline{AP}$ u trokutu *APT*.

Zbog toga je $p_{\Delta PDT} = \frac{2}{3} p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Trokuti *ACP* i *DPT* su slični jer su im kutovi iste veličine (dva vršna kuta, odnosno šiljasti kutovi uz presječnicu). 1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi je $p_{\Delta ACP} : p_{\Delta DPT} = 9 : 4$, odnosno $p_{\Delta ACP} = \frac{9}{4} p_{\Delta DPT}$. 1 BOD

Tada je $p_{\Delta ACP} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} p_{\Delta APT} = \frac{3}{2} p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi $|PD| = \frac{2}{3}|AP|$, a duljina visine na stranicu $\overline{PD}$ u trokutu *PDC* jednaka je duljini visine na stranicu $\overline{AP}$ u trokutu *APC*.

Zbog toga je $p_{\Delta PDC} = \frac{2}{3} p_{\Delta APC}$. 1 BOD

Tada je $p_{\Delta PDC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} p_{\Delta APT} = p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli romb na dva jednaka dijela, pa je površina romba

$p_{ABCD} = 2\left(p_{\Delta APC} + p_{\Delta PCD}\right) = 2\left(\frac{3}{2} p_{\Delta PDC} + p_{\Delta PDC}\right) = 5 p_{\Delta PDC} = 5 p_{\Delta APT}$. 2 BODA

Dakle, $p_{\Delta APT} : p_{ABCD} = 1 : 5$. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način: Uvedimo oznake Aninih i Ivanovih godina kao u tablici. 1 BOD

	Ana	Ivan
Prije	y	x
Sada	$1.2x$	y
Poslije	$150 - 1.2x$	$1.2x$

Razlika godina između sada i prije jednaka je kod Ane i kod Ivana pa vrijedi:
$1.2x - y = y - x$, 1 BOD
iz čega je $y = 1.1x$ 1 BOD
Razlika godina između poslije i sada jednaka je kod Ane i kod Ivana pa vrijedi:
$150 - 1.2x - 1.2x = 1.2x - y$ 1 BOD
$y = 3.6x - 150$ 1 BOD
Zato je:
$3.6x - 150 = 1.1x$, 1 BOD
iz čega je $x = 60$ 1 BOD
Onda je $1.2x = 1.2 \cdot 60 = 72$ 1 BOD
$y = 1.1 \cdot 60 = 66$ 1 BOD
Ana ima 72, a Ivan 66 godina. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način: Iz teksta se može zaključiti da je Ana starija od Ivana.
Neka Ivan sada ima x godina, a Ana $x + y$ godina (Ana je starija za y godina).
Ana je imala godina kao Ivan sada (x) prije y godina. Ivan je tada imao $x - y$ godina. 1 BOD
Prvi uvjet zadatka daje jednadžbu:
$1.2 \cdot (x - y) = x + y$, 1 BOD
iz čega se sređivanjem dobije:
$x = 11y$ 1 BOD
Ako Ivan sada ima x godina, a Ana $x + y$ godina, Ivan će za y godina imati godina kao Ana sada.
Ivan će tada imati $x + y$ godina, a Ana će imati $x + 2y$ godina. 1 BOD
Iz drugog uvjeta zadatka slijedi:
$x + y + x + 2y = 150$ tj.
$2x + 3y = 150$ 1 BOD
Uvrštavanjem $x = 11y$ dobije se:
$22y + 3y = 150$, 1 BOD
pa je $y = 6$. 1 BOD
Tada je $x = 11 \cdot 6 = 66$, 1 BOD
a $x + y = 66 + 6 = 72$. 1 BOD
Ivan ima 66 godina, a Ana 72 godine. 1 BOD
……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način: Označimo s A Anine, a s I Ivanove trenutne godine.
Neka je Ana je imala godina koliko Ivan sada prije x godina.
Vrijedi $A - x = I$, tj. $x = A - I$. 1 BOD
Ivan je tada imao $I - x$ godina, pa vrijedi $A = 1.2 \cdot (I - x)$ 1 BOD
Uvrštavanjem nepoznanice x iz prve u drugu jednadžbu dobije se:
$A = 1.2 \cdot (I - A + I)$,
iz čega je $11A = 12I$ 1 BOD
Za y godina Ivan će imati godina koliko Ana sada.
Vrijedi $I + y = A$, tj. $y = A - I$. 1 BOD
Ana će tada imati $A + y$ godina, a zajedno će imati 150 godina.
Vrijedi: $I + y + A + y = 150$, tj. $I + A + 2y = 150$ 1 BOD
Uvrštavanjem nepoznanice y u drugu jednadžbu dobije se:
$I + A + 2A - 2I = 150$
$3A - I = 150$ 1 BOD
Rješavanjem sustava jednadžbi
$11A = 12I$ i $3A - I = 150$ dobije se:
$I = 3A - 150$
$11A = 36A - 1800$ 1 BOD
$25A = 1800$
$A = 72$ 1 BOD
Onda je: $I = 3 \cdot 72 - 150 = 66$ 1 BOD
Ana ima 72 godine, a Ivan 66 godina. 1 BOD
……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA