ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Broj ptica u jatu označimo s x.

Onda je $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+3\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{5}\right)+1=x$. 4 BODA

Dalje, $\frac{3x+5x}{15}+3\cdot\frac{5x-3x}{15}+1=x$, 2 BODA

odnosno $\frac{8x}{15}+\frac{6x}{15}+1=x$. 1 BOD

Slijedi: $\frac{14x}{15}+1=x$. 1 BOD

Odavde slijedi da je $\frac{1}{15}x=1$, 1 BOD

odnosno $x = 15$. U jatu je bilo 15 ptica. 1 BOD

…………………………………………………………………………...... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Broj ptica u jatu označimo s x.

Prvo stablo	Drugo stablo	Treće stablo		
$\frac{1}{5}x$	$\frac{1}{3}x$	$3\cdot\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x\right)=$	$3\cdot\frac{2}{15}x$	4 BODA
(1 BOD)	(1 BOD)	(1 BOD)	(1 BOD)	

Onda je $\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x+1=x$. 2 BODA

Dalje je $\frac{14}{15}x+1=x$. 2 BODA

Odavde slijedi da je $\frac{1}{15}x=1$, 1 BOD

odnosno $x = 15$. U jatu je bilo 15 ptica. 1 BOD

…………………………………………………………………………...... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Na prvo stablo sletjela je $\frac{1}{5}$ jata, a na drugo $\frac{1}{3}$ jata.

Razlika između ta dva dijela jata iznosi $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}$ jata. 2 BODA

Trostruka razlika iznosi $3\cdot\frac{2}{15}=\frac{2}{5}$ jata. 1 BOD

Na treće stablo sletjelo je, dakle, $\frac{2}{5}$ jata. 1 BOD

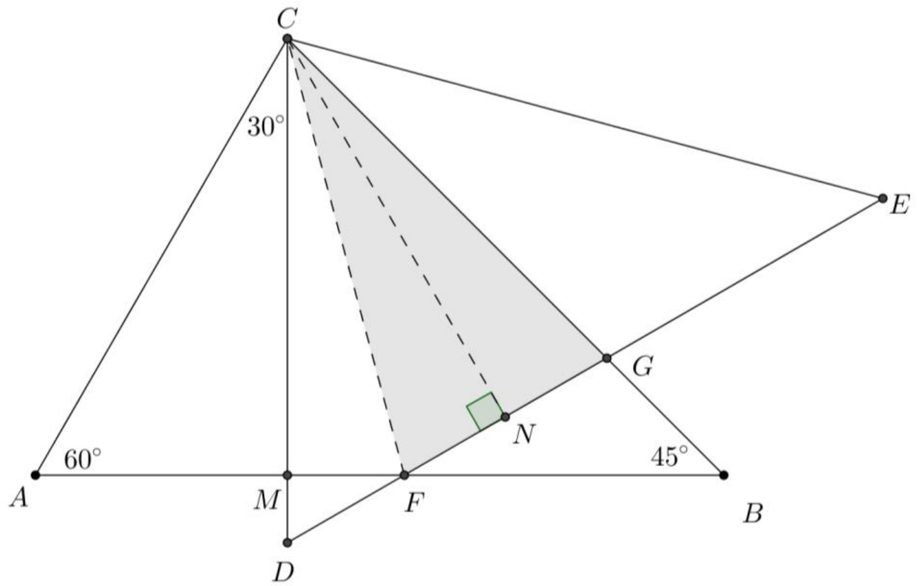
Na sva tri stabla zajedno sletjelo je $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{3+5+6}{15}=\frac{14}{15}$ jata. 3 BODA

Preostala je jedna ptica u zraku, a ona predstavlja $1-\frac{14}{15}=\frac{1}{15}$ jata. 2 BODA

Dakle, u jatu je bilo 15 ptica. 1 BOD

…………………………………………..…………………………..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



Kut $\angle AMD$ je pravi kut, tj. $|\angle AMD| = 90°$. 1 BOD

Nacrtajmo okomicu $\overline{CN}$ iz vrha C na stranicu $\overline{DE}$.

Veličina kuta $\angle NCM$ iznosi $|\angle NCM| = 30°$ (slijedi iz ΔDNC, jer je $|\angle CDE| = 60°$). 1 BOD

Veličina kuta $\angle GCN$ iznosi $|\angle GCN| = 45° - 30° = 15°$ (slijedi iz ΔBMC, $|\angle BCM| = 45°$). 1 BOD

Veličina kuta $\angle FGC$ iznosi $|\angle FGC| = 90° - 15° = 75°$. 1 BOD

Veličina kuta $\angle CGE$ iznosi $|\angle CGE| = 180° - 75° = 105° = |\angle BGF|$. 1 BOD

Veličina kuta $\angle GFB$ iznosi $|\angle GFB| = 180° - (105° + 45°) = 30°$. 1 BOD

Veličina kuta $\angle MFN$ iznosi $|\angle MFN| = 180° - 30° = 150°$.

Trokuti AMC i DNC su sukladni (KSK ili SSK$^{>}$), pa je $|MC| = |NC|$. 1 BOD

Trokuti MFC i FNC su sukladni pravokutni trokuti (oba imaju pravi kut, zajednička im je hipotenuza i $|MC| = |NC|$, pa su sukladni po poučku SSK$^{>}$). 1 BOD

Stoga veličina kuta $\angle CFG$ iznosi $|\angle CFG| = 150° : 2 = 75°$. 1 BOD

Nasuprot sukladnih kutova $\angle FGC$ i $\angle CFG$ su sukladne stranice, odnosno $|CF| = |CG|$, pa je trokut CFG jednakokračan. 1 BOD

…………………………………………..………………………..…..…... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Kut $\angle AMD$ ($\angle AMC$) je pravi kut, tj. $|\angle AMD| = 90°$. 1 BOD

Nacrtajmo okomicu $\overline{CN}$ iz vrha C na stranicu $\overline{DE}$.

Trokuti ABC i CDE su sukladni pa imaju jednake površine, dužine $\overline{CN}$ i $\overline{CM}$ su visine na sukladne stranice pa su njihove duljine jednake, odnosno $|MC| = |NC|$. 1 BOD

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi i $|\angle ECD| = |\angle ACB| = 180° - 105° = 75°$. 1 BOD

Trokuti MFC i FNC su sukladni pravokutni trokuti (oba imaju pravi kut, zajednička im je hipotenuza i $|MC| = |NC|$, pa su sukladni po poučku SSK$^{>}$). 1 BOD

Veličina kuta $\angle MFD$ iznosi $|\angle MFD| = 90° - 60° = 30° = |\angle GFB|$ (slijedi iz pravokutnog trokuta MFD). 1 BOD

Kut $\angle CGN$ je vanjski kut trokuta FGB pa je $|\angle CGN| = 30° + 45° = 75°$ 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta CNG slijedi $|\angle GCN| = 90° - 75° = 15°$.

Veličina kuta $\angle DCN$ iznosi $|\angle DCN| = 45° - 15° = 30°$ (jer je $|\angle BCM| = 45°$). 1 BOD

Iz sukladnosti trokuta MFC i FNC slijedi $|\angle MCF| = |\angle NCF| = 30° : 2 = 15°$. 1 BOD

Nadalje, trokuti CFN i CGN su sukladni po poučku KSK (kutovi veličina 15° i 90° uz zajedničku stranicu $\overline{CN}$). 1 BOD

Iz njihove sukladnosti slijedi $|NG| = |NF|$ i $|FC| = |GC|$.

Dakle, trokut CFG je jednakokračan. 1 BOD

…………………………………………..……………………...……... UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

$$\frac{283}{255} = 1 + \frac{28}{255}$$ 1 BOD

$$= 1 + \frac{1}{\frac{255}{28}}$$ 2 BODA

$$= 1 + \frac{1}{9 + \frac{3}{28}}$$ 2 BODA

$$= 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{\frac{28}{3}}}$$ 1 BOD

$$= 1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{9 + \frac{1}{3}}}$$ 1 BOD

Prirodni brojevi koji zamjenjuju nepoznanice su a = 9, b = 9, c = 3. 3 BODA

…………………………………………..……………………………...…... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

$$\frac{283}{255}=1+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}$$

Slijedi $\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}=\frac{283}{255}-1=\frac{283-255}{255}=\frac{28}{255}$. 3 BODA

Dalje je $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{255}{28}=9+\frac{3}{28}$. 2 BODA

Dakle, $a = 9$. 1 BOD

Iz $\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{3}{28}$ slijedi $b+\frac{1}{c}=\frac{28}{3}=9+\frac{1}{3}$. 2 BODA

Slijedi $b = 9$, $c = 3$. 2 BODA

…………………………………………..…………………………...…... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Neka je x početna duljina čarobnog saga.

Početna širina saga bila je 1.8 m = 18 dm. 1 BOD

Nakon ispunjenja prve želje stranice su mu bile:

duljina $\frac{1}{2}x$, a širina $18-\frac{1}{3}\cdot 18=18-6=12$ dm. 2 BODA

Nakon ispunjenja druge želje stranice su mu bile:

duljina $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}x$, a širina $12-\frac{1}{3}\cdot 12=12-4=8$ dm. 2 BODA

Nakon ispunjenja treće želje stranice su mu bile:

duljina $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x=\frac{1}{8}x$, a širina $8-\frac{1}{3}\cdot 8=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ dm. 2 BODA

Površina pravokutnika računa se po formuli $P = a \cdot b$, gdje su a i b duljine susjednih stranica.

Iz uvjeta zadatka slijedi da je

$\frac{1}{8}x\cdot\frac{16}{3}=18$, odnosno $\frac{2}{3}x=18$, pa slijedi $x = 27$ dm = 2.7 m. 2 BODA

Početna površina čarobnog saga bila je $P = 1.8\text{ m} \cdot 2.7\text{ m} = 4.86\text{ m}^2$. 1 BOD

…………………………………………..……………………..….…... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Površina pravokutnika računa se po formuli $P = a \cdot b$, gdje su a i b duljine susjednih stranica.

Neka je x početna duljina saga, a y početna širina saga.

Nakon ispunjenja svake želje duljina saga se prepolovi.

Nakon ispunjenja tri želje duljina saga se 3 puta prepolovi, pa je jednaka $a=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x=\frac{1}{8}x$.

2 BODA

Nakon ispunjenja svake želje širina saga se umanji za $\frac{1}{3}$ širine, što znači da preostane $\frac{2}{3}$ širine.

Nakon ispunjenja tri želje širina saga je $b=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}y=\frac{8}{27}y$. 2 BODA

Površina saga nakon tri ispunjene želje jednaka je

$P_3=\frac{1}{8}x\cdot\frac{8}{27}y=\frac{1}{27}xy$. 2 BODA

Prema uvjetima zadatka je $P_3=18$ dm², a y = 1.8 m = 18 dm. 1 BOD

Slijedi

$18=\frac{1}{27}x\cdot 18$, 1 BOD

što daje x = 27 dm = 2.7 m. 1 BOD

Početna površina čarobnog saga bila je P = 1.8 m · 2.7 m = 4.86 m^2. 1 BOD

……………………………………………..…………………………...…... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena:

Duljina i površina saga mogu se izraziti i u decimetrima, odnosno dm².

5. Prvi način:

Neka je $\overline{2abcde}$ traženi početni broj. Onda je novodobiveni broj $\overline{abcde2}$. 2 BODA

Tada vrijedi da je $\overline{abcde2}=3\cdot\overline{2abcde}$. 1 BOD

Dalje slijedi:

$10\cdot\overline{abcde}+2=3\cdot\left(200000+\overline{abcde}\right)$ 2 BODA

$10\cdot\overline{abcde}+2=600000+3\cdot\overline{abcde}$ 1 BOD

$7\cdot\overline{abcde}=600000-2$ 1 BOD

$\overline{abcde}=599998:7$ 1 BOD

$\overline{abcde}=85714$ 1 BOD

Početni broj je 285714, a novodobiveni 857142. 1 BOD

……………………………………………..…………………………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je $\overline{2abcde}$ traženi početni broj. Onda je novodobiveni broj $\overline{abcde2}$. 2 BODA

Tada vrijedi da je $\overline{abcde2}=3\cdot\overline{2abcde}$. 1 BOD

Broj $3\cdot e$ mora završavati znamenkom 2, što je moguće jedino ako je e = 4. 1 BOD

Sada je $\overline{abcd42}=3\cdot\overline{2abcd4}$. To je moguće jedino ako je d = 1. 1 BOD

Imamo, dakle, $\overline{abc142}=3\cdot\overline{2abc14}$.

Broj $3\cdot c$ mora završavati znamenkom 1, a to je moguće jedino ako je c = 7. 1 BOD

Dalje, imamo $\overline{ab7142}=3\cdot\overline{2ab714}$. To je moguće jedino ako je b = 5. 1 BOD

Sada je $\overline{a57142}=3\cdot\overline{2a5714}$. To je moguće jedino ako je a = 8. 1 BOD

Provjerom množenja zaista vrijedi $857142=3\cdot 285714$.

Početni broj je 285714, a novodobiveni 857142. 2 BODA

……………………………………………..…………………….…..…..... UKUPNO 10 BODOVA