

**DRŽAVNO NATJECANJE IZ ASTRONOMIJE 2018. GODINE**  
**3. RAZRED**  
**TOČNI ODGOVORI**

Zadaci za državno natjecanje iz astronomije  
2018.

**3. razred srednje škole**  
16.–18. svibnja 2018. godine

**ZADACI**

12

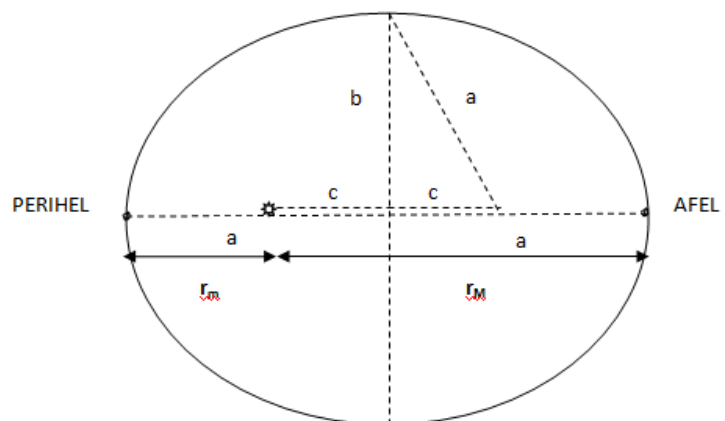
1. Usporedite omjer brzina u perihelu i afelu za Saturn, čiji je numerički ekscentricitet najveći od jovijalnih planeta i iznosi 0,056 i Neptun, čiji je numerički ekscentricitet najmanji od jovijalnih planeta i iznosi 0,009. Skicirajte elipsu, tako da općenito označite perihel, afel, veliku poluos, linearni ekscentricitet, maksimalni i minimalni radijus-vektor!

*/Uputa: sve rezultate zapisati u obliku jedne cijele znamenke i četiri znamenke poslije decimalnog zareza/*

$$e_S = 0,056$$

$$e_N = 0,009$$

$$\frac{v_S}{v_N} = ?$$



(skica: točno označeni perihel, afel, a, c,  $r_M$  i  $r_m$  po 0,5 boda, ukupno 3 boda)

Skica prikazuje udaljenost planeta od Sunca u perihelu ( $r_m$ ) i afelu ( $r_M$ ), veliku (a) i malu (b) poluos elipse i linearni ekscentricitet (c) elipse.

Prema skici je vidljivo da je radijus-vektor planeta maksimalan, udaljenost je najveća, kada se planet nalazi u afelu:

$$r_M = a + c \quad (1 \text{ bod})$$

Radijus-vektor planeta je minimalan, udaljenost je najmanja, kada se planet nalazi u perihelu:

$$r_m = a - c \quad (1 \text{ bod})$$

Izduženost putanje planeta iskazuje se numeričkim ekscentricitetom:

$$e = \frac{c}{a} \quad (1 \text{ bod})$$

Prema izrazu za numerički ekscentricitet slijedi:

$$c = e \cdot a$$

Izraze za najveću ( $r_M$ ) i najmanju ( $r_m$ ) udaljenost možemo pisati:

$$r_M = a + c = a + e \cdot a = a(1 + e)$$

$$r_m = a - c = a - e \cdot a = a(1 - e)$$

Omjer najveće i najmanje udaljenosti možemo izraziti:

$$\frac{r_M}{r_m} = \frac{1+e}{1-e} \quad (1 \text{ bod})$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti za numerički ekscentricitet možemo odrediti omjer najveće i najmanje udaljenosti za Saturn i Neptun:

$$O_S = \frac{1+e_S}{1-e_S} = \frac{1+0,056}{1-0,056} = 1,1186 \quad (1 \text{ bod})$$

$$O_N = \frac{1+e_N}{1-e_N} = \frac{1+0,009}{1-0,009} = 1,0182 \quad (1 \text{ bod})$$

U afelu i perihelu brzina planeta ima samo normalnu komponentu, primjenjujemo III. Keplerov zakon prema kojem slijedi:

$$r \cdot v_n = \text{konst.}$$

$$r_M \cdot v_a = r_m \cdot v_p \quad (1 \text{ bod})$$

Prema III. Keplerovom zakonu omjer brzina u perihelu i afelu obrnuto je razmjeran najmanjoj i najvećoj udaljenosti:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_M}{r_m} \quad (1 \text{ bod})$$

Usporedba omjera brzina u perihelu i afelu za Saturn i Neptun:

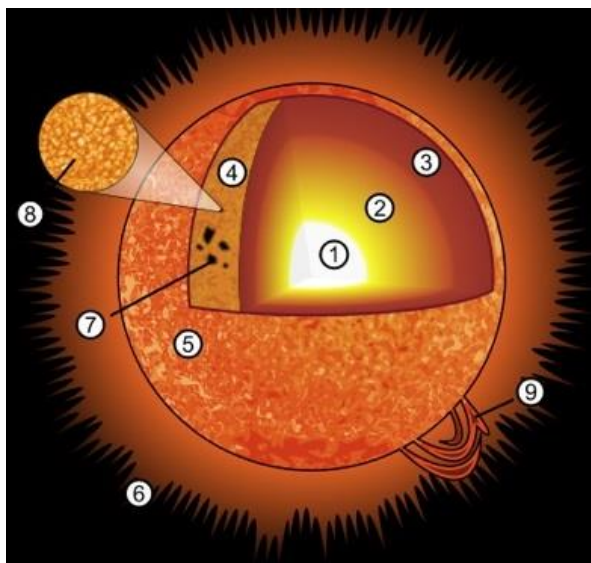
$$\frac{O_S}{O_N} = \frac{1,1186}{1,0182} = \mathbf{1,0986} \quad (1 \text{ bod})$$

Omjer brzina Saturna u perihelu i afelu za 1,0986 veći je od omjera brzina Neptuna.

*Napomena: priznati i zaokruživanje na treću decimalu*

$$\frac{O_S}{O_N} = \frac{1,119}{1,018} = 1,099$$

2. Upoznajmo našu zvijezdu Sunce kroz nekoliko slika.



Slika 1

Brojevi 1–3 odnose se na građu Sunca:

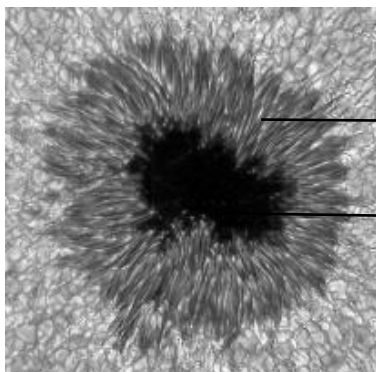
- 1 – zona nuklearnih reakcija (0,5 boda)
- 2 – radijativna zona (0,5 boda)
- 3 – konvektivna zona (0,5 boda)

Brojevi 4–6 odnose se na atmosferu Sunca:

- 4 – fotosfera (0,5 boda)
- 5 – kromosfera (0,5 boda)
- 6 – korona (0,5 boda)

Brojevi 7–9 odnose se na pojave na površini Sunca:

- 7 – pjege (0,5 boda)
- 8 – granule (0,5 boda)
- 9 – prominencija (0,5 boda)

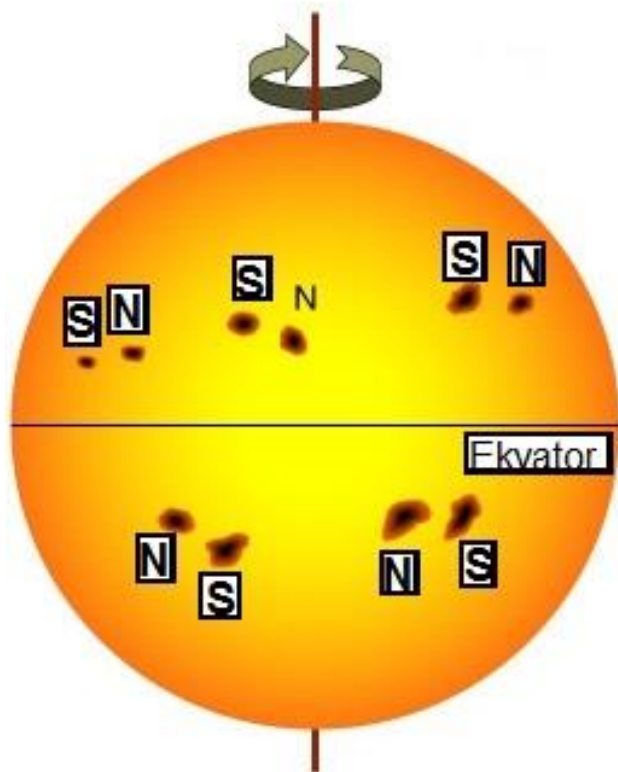


Slika 2. prikazuje strukturu Sunčeve pjege:

polusijenka lat. penumbra

sjenka lat. umbra

(svaki točan odgovor 0,5 boda, ukupno 2 boda)



Slika 3 odnosi se na magnetsko polje Sunčevih pjege.

Grupe pjege imaju jasno uočljivu građu i sastoje se od:

vodilice i pratilice.

(1 odgovor 0,5 boda, ukupno 1 bod)

U manje pravokutnike na slici 3 upišite polove magnetskog polja pojedinih pjege.

(sve točno na sjevernoj polutci: 1 bod)

(sve točno na južnoj polutci: 1 bod)

U duži pravokutnik upišite naziv zamišljene kružnice na Suncu u odnosu na koju su grupe pjege postavljene 'ukoso'.

(0,5 boda)

Ukratko obrazložite svoj odgovor:

vodilica je smještena bliže ekvatoru; ako je vodilica sjevernog polariteta, pratilica je južnog; redoslijed polariteta obratan je na suprotnoj Sunčevoj polutci.

(1 bod)

Što se događa s polaritetom pjega pri prijelazu u idući ciklus Sunčeve aktivnosti?

**U idućem ciklusu redosljed polariteta se mijenja i obratan je u odnosu na prethodni .**

(1 bod)

Prema poznatoj vrijednosti za efektivnu temperaturu Sunčeve fotosfere u iznosu od 5780 K, odredite maksimalnu valnu duljinu zračenja Sunca!

(Napomena: rezultat izraziti u [nm]; Wienova konstanta iznosi  $c_w = 2,9 \cdot 10^{-3} mK$ )

$T = 5780 K$       Wienov zakon određuje odnos maksimalne valne duljine zračenja i termodinamičke temperature crnog tijela:

$\lambda_{\max} = ?$        $\lambda_{\max} \cdot T = c_w$  (1 bod)

$$\lambda_{\max} = \frac{c_w}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{5780} = 5,0173 \cdot 10^{-7} = \mathbf{501,7 \text{ nm}}$$
 (1 bod)

-

3. Proučimo hipotetski dvojni sustav zvijezda u kojemu jedna komponenta ima 1 masu Sunca, a druga komponenta 4 mase Sunca. Ako je komponenta manje mase udaljena od centra mase 100  $a_j$ , odredite:

- udaljenost masivnije komponente od centra mase, na način da prvo izvedete primjenom općeg zakona gravitacije izraz koji ćete pri tom koristiti i navedete uvjet koji ste uzeli u obzir u izvodu;
- udaljenost između komponenti;
- period rotacije za ovaj dvojni sustav (rezultat izrazite u godinama), tako da masu Sunca odredite prema poznatim vrijednostima Zemljine putanje (period revolucije i velika poluos staze);

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

/Uputa: sve rezultate zapisati u obliku jedne cijele znamenke i dvije znamenke poslije decimalnog zareza uz odgovarajući red veličine i mjernu jedinicu/

$$\begin{aligned} M_1 &= 1M_s \\ M_2 &= 4M_s \\ r_1 &= 100 a_j \end{aligned}$$

a) Uvjet prema kojem radimo izvod je da se obje komponente kreću po kružnicama oko zajedničkog centra mase. (1 bod)

Izjednačavanjem izraza za gravitacijsku silu i općeg zakona gravitacije silu (1) odredimo izraze za ubrzanje prve (2) i druge komponente (3):

$$m \cdot g = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \text{ gdje je } m = M_1 = M_2 \quad (1)$$

$$r_2 = ?$$

$$g_1 = G \frac{M_2}{r^2} \quad (2)$$

$$r = ?$$

$$T = ?$$

$$g_2 = G \frac{M_1}{r^2} \quad (3) \quad (1 \text{ bod})$$

$$d = ?$$

Centripetalne akceleracije za svaku komponentu dvojnog sustava izjednačimo s akceleracijom gravitacijske sile (5) i (6) tako da brzinu izrazimo polumjerom i periodom ophoda staze T:

$$g_1 = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4 \pi^2 r_1}{T^2} = G \frac{M_2}{r^2} \quad (5)$$

$$g_2 = \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4 \pi^2 r_2}{T^2} = G \frac{M_1}{r^2} \quad (6) \quad (1 \text{ bod})$$

Sređivanjem omjera  $g_1/g_2$  (7) dobijemo osnovni izraz koji ćemo koristiti za račun (8):

$$\frac{\frac{4 \pi^2 r_1}{T^2}}{\frac{4 \pi^2 r_2}{T^2}} = \frac{G \frac{M_2}{r^2}}{G \frac{M_1}{r^2}} \quad (7)$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2}{M_1} \quad (8) \quad (1 \text{ bod})$$

Udaljenost druge komponente dobijemo sređivanjem izraza (8) i uvrštavanjem u izraz (9):

$$r_2 = \frac{M_1 r_1}{M_2} = \frac{1 M_S \cdot 100}{4 M_S} = \mathbf{25 \text{ aj}} \quad (9) \quad (1 \text{ bod})$$

- b) Komponente dvojnog sustava uvijek se nalaze na dijametralno suprotnim točkama svojih staza i zato je zbroj polumjera tih staza jednak udaljenosti između njih (10):

$$r = r_1 + r_2 = 100 + 25 = \mathbf{125 \text{ aj}} \quad (10) \quad (1 \text{ bod})$$

- c) Za putanju Zemlje oko Sunca poznate su vrijednosti:

$$a = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} = 149,60 \cdot 10^9 \text{ m} \quad (0,5 \text{ boda})$$

$$T = 1 \text{ god} = 365 \text{ d} \cdot 24 \text{ h} \cdot 3600 \text{ s} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s} \quad (0,5 \text{ boda})$$

Kako bismo izveli izraz za masu Sunca, centripetalnu silu izjednačimo s općim zakonom gravitacije (11) i zatim brzinu izrazimo velikom poluosi Zemljine putanje i njezinim periodom revolucije oko Sunca (12), uvrstimo potrebne vrijednosti i izračunamo masu Sunca:

$$\frac{m_Z v_Z^2}{a} = G \frac{m_Z M_S}{a^2} \quad (11)$$

$$M_S = \frac{v_Z^2 a}{G} = \frac{\frac{4\pi^2 a^2}{T^2} a}{G} = \frac{4\pi^2 a^3}{G T^2} \quad (12) \quad (1 \text{ bod})$$

$$M_S = \frac{4\pi^2 (149,6 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (3,15 \cdot 10^7)^2} = \mathbf{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \quad (1 \text{ bod})$$

Poznati izraz za treći Keplerov zakon za sustav dviju masa dobijemo tako da zbrojimo izraze za akceleraciju prvog i drugog tijela (5) i (6) i uzmemo u obzir da je zbroj polumjera jednak udaljenosti komponenata (10), te tako prema relacijama (13), (14) i (15) dobijemo izraz za period (16):

$$\frac{4\pi^2 r_1}{T^2} + \frac{4\pi^2 r_2}{T^2} = G \frac{M_2}{r^2} + G \frac{M_1}{r^2} \quad (13)$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} (r_1 + r_2) = \frac{G}{r^2} (M_1 + M_2) \quad (14)$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2) \quad (15) \quad (1 \text{ bod})$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G (M_1 + M_2)}} \quad (16) \quad (1 \text{ bod})$$

Prije računa za period, mase obje komponente i udaljenost izrazimo prema SI sustavu:

$$M_1 = 1 M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$M_2 = 4 M_S = 7,96 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (1 \text{ bod})$$

$$r = 125 \text{ aj} \cdot 149,6 \cdot 10^9 = 1,87 \cdot 10^{13} \text{ m} \quad (1 \text{ bod})$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1,87 \cdot 10^{13})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (1,99 + 7,96) \cdot 10^{30}}} = 1,97 \cdot 10^{10} \text{ s} = \mathbf{625,39 \text{ god}}$$

Napomena: priznati i zaokruženi rezultat **625,40** god!

(1 bod)

Da bismo rezultat izrazili u godinama, dobivenu vrijednost za period u sekundama podijelili smo s vrijednošću koliko jedna godina ima sekundi, što je već određeno pod c):

$$1 \text{ god} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$$



4. Na slici je dio zvjezdane karte koji prikazuje i zvijezde s otkrivenim egzoplanetima udaljene do 100 gs.
- U pravokutnike upišite veličine koje se nalaze na koordinatnim osima i navedite odgovarajuće mjerne jedinice; (svaki točan odgovor 0,5 boda, ukupno 2 boda)
  - Na karti zaokružite položaj Hijada, Plejada i Velike Orionove maglice i napišite njihove nazive; (svaki točan odgovor 1 bod, ukupno 3 boda)
  - Odredite položaj proljetne i ljetne točke i pored karte navedite točne koordinate; (položaj za jednu točku 0,5 boda – koordinate za jednu točku 0,5 boda, ukupno 2 boda)
  - Strelicom prikažite položaj zvijezde s egzoplanetom koja se nalazi iznad Aldebarana (malo pomaknuta prema gore i ulijevo); (1 bod)
  - Strelicom označite položaj Capelle (Kapele) i Algola i navedite njihove oznake (grčko slovo i kratica zvijezda). (svaki točan odgovor 0,5 boda, ukupno 2 boda)

