Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

7. ožujka 2008.

1. Dokaži jednakost

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

2. Riješi jednadžbu

$$\frac{6a+1}{a}x + \frac{6a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3} = \frac{2a+1}{a^3+2a^2+a}x$$

u ovisnosti o realnom parametru a.

3. Odredi znamenke a i b tako da broj $\overline{2a0b82}$ bude djeljiv s 13.

4. Dan je trokut ABC. Ako je duljina težišnice iz vrha C jednaka polovini duljine stranice $\overline{AB}$, dokaži da je trokut ABC pravokutan.

5. Kut $\sphericalangle BAD$ romba $ABCD$ je šiljast. Nožište visine iz vrha D dijeli stranicu $\overline{AB}$ na dvije dužine duljina x i y. Izrazi duljine dijagonala romba $ABCD$ pomoću x i y.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

7. ožujka 2008.

1. Skiciraj skup svih kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju uvjet

$$\left|z+1-\frac{i}{2}\right| = \operatorname{Im} z,$$

i među njima odredi onaj s najmanjim imaginarnim dijelom.

2. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

3. Tetiva $\overline{AB}$ dijeli krug polumjera r na dva dijela čije se pripadne duljine kružnih lukova odnose kao $1 : 2$. U veći od ta dva dijela upisan je kvadrat čija jedna stranica leži na toj tetivi. Odredi duljinu stranice tog kvadrata.

4. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0.$$

5. Ako u trokutu ABC vrijedi

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB|+|BC|}{|AC|}$$

dokaži da je $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

7. ožujka 2008.

1. Odredi sve vrijednosti realnog parametra p za koje jednadžba

$$\log_3(9^x + 9p^2) = x$$

ima dva različita rješenja.

2. Nađi sva rješenja nejednadžbe

$$\frac{2\sin x - 1}{\cos 2x + \sin^2 x} < 0$$

na intervalu $[0, 2\pi]$.

3. Odredi sva cjelobrojna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= -90. \end{aligned}$$

4. Veličina šiljastog kuta romba je α. Pod kojim kutom se vidi stranica romba iz polovišta nasuprotne stranice? Za koji romb je taj kut najveći?

5. Kugla je upisana u krnji stožac čije su osnovke centralni presjeci drugih dviju kugala. Odredi oplošje stošca ako je zbroj oplošja svih triju kugala jednak S.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

7. ožujka 2008.

1. Neka je $a_n = 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}$, gdje je n prirodan broj. Odredi najmanji prirodan broj k takav da je
$$P_k = a_2 a_3 \ldots a_k$$
veći od 1000.

2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi
$$(z-1)^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^5 - i$$
i za koje je $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

3. Odredi polinom P stupnja 4 takav da je $P(0) = 0$ i $P(x) - P(x-1) = x^3$, za svaki realni broj x. Koristeći dobiveni rezultat nađi formulu za zbroj
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

4. Odredi izraz za opći član u obliku potencije i izračunaj graničnu vrijednost niza:
$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{3\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots \quad \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}}, \ldots$$
(opći član piše se pomoću n korijena i n trojki).

5. Nađi točku hiperbole $3x^2 - 4y^2 = 12$ najbližu točki $A(0,7)$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.