Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

25. siječnja 2008.

1. Rastavi izraz
$$(x^2+2x)^4-(x^3+2x^2)^2-(3x^2+6x)^2+9x^2$$
na faktore koji se ne mogu dalje rastaviti.

2. Nad stranicama jednakokračnog pravokutnog trokuta ABC s katetom duljine a nacrtani su s vanjske strane kvadrati $ABLK$, $BCNM$ i $CAQP$. Odredi površinu i opseg šesterokuta $KLMNPQ$.

3. Duljine svih bridova i duljina prostorne dijagonale kvadra su prirodni brojevi. Ako su duljine dvaju bridova tog kvadra 9 i 12, odredi duljinu trećeg brida.

4. Magični kvadrat je tablica dimenzija $n \times n$ u koju su upisani svi prirodni brojevi od 1 do n^2, na takav način da u svakom stupcu, u svakom retku i na obje dijagonale zbroj upisanih brojeva bude jednak istom broju S_n. Na slici je prikazan jedan magični kvadrat 3×3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Odredi zbroj S_n u magičnom kvadratu $n \times n$.

5. (a) Nađi sve prirodne brojeve kojima je prva znamenka 6 i koji zadovoljavaju uvjet da se uklanjanjem te prve znamenke dobije broj koji je 25 puta manji od početnog.
   (b) Dokaži da ne postoji prirodan broj n sa svojstvom da se uklanjanjem njegove prve znamenke dobije broj koji je 35 puta manji od n.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

25. siječnja 2008.

1. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^3 - y^3 = 91.$$

2. Za koje vrijednosti broja m vrijedi

$$-3 < \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

za svaki realni broj x?

3. Za koje sve kompleksne brojeve z je broj z^3 realan i veći od 27?

4. Neka je $ABCD$ paralelogram, E polovište stranice $\overline{AB}$, F polovište stranice $\overline{BC}$ i P sjecište dužina $\overline{EC}$ i $\overline{FD}$. Dokaži da dužine $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ i $\overline{DP}$ dijele paralelogram na trokute čije se površine u nekom poretku odnose kao $1 : 2 : 3 : 4$.

5. Sjecišta dijagonala pravilnog peterokuta određuju manji peterokut. Odredi omjer duljina stranica manjeg i većeg peterokuta.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

25. siječnja 2008.

1. Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} \log_y x + \log_x y &= \frac{5}{2} \\ x + y &= 12. \end{aligned}$$

2. Riješi jednadžbu

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

3. Ako za kutove trokuta α, β i γ vrijedi

$$\sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma) = 0,$$

dokaži da je jedan njegov kut jednak $60°$.

4. U trokutu ABC simetrala kuta pri vrhu B siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki K. Ako je $|BC| = 2$, $|CK| = 1$ i $|BK| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, odredi površinu trokuta ABC.

5. Duljina visine pravilne uspravne četverostrane prizme je v. Dijagonale dviju susjednih pobočki povučene iz zajedničkog vrha zatvaraju kut α. Odredi duljinu a brida baze.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

25. siječnja 2008.

1. Dokaži da je $\dfrac{(5n)!}{40^n n!}$ prirodan broj za svaki prirodan broj n.

2. Ako su $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokaži da su $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ također uzastopni članovi aritmetičkog niza.

3. Zadana je elipsa s jednadžbom $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Dokaži da sva sjecišta po dvije međusobno okomite tangente ove elipse leže na istoj kružnici.

4. Odredi zbroj svih peteroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite i koji su zapisani samo znamenkama 1, 2, 3, 4 i 5.

5. Zadan je niz realnih brojeva a_n takav da je $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}\, a_n + 1$ za svaki prirodan broj n i $a_{2009} = 2009$. Odredi zbroj $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008}$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.