OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

25. siječnja 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Rastavi izraz

$$(x^2+2x)^4-(x^3+2x^2)^2-(3x^2+6x)^2+9x^2$$

na faktore koji se ne mogu dalje rastaviti.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&(x^2+2x)^4-(x^3+2x^2)^2-(3x^2+6x)^2+9x^2\\
&\quad= x^4(x+2)^4-x^4(x+2)^2-9x^2(x+2)^2+9x^2\\
&\quad= x^4(x+2)^2((x+2)^2-1)-9x^2((x+2)^2-1)\\
&\quad= x^2((x+2)^2-1)(x^2(x+2)^2-9)
\end{aligned}$$

(10 bodova)

$$\begin{aligned}
&= x^2((x+2)+1)((x+2)-1)(x(x+2)+3)(x(x+2)-3)\\
&= x^2(x+3)(x+1)(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)
\end{aligned}$$

(5 bodova)

$$\begin{aligned}
&= x^2(x+3)(x+1)(x^2+2x+3)(x^2+3x-x-3)\\
&= x^2(x+3)(x+1)(x^2+2x+3)(x+3)(x-1)\\
&= x^2(x+3)^2(x+1)(x-1)(x^2+2x+3)
\end{aligned}$$

(5 bodova)

Napomena. Za pokušaj rastava na faktore ili za izlučivanje faktora x^2 dati do 5 bodova.

Zadatak 2. Nad stranicama jednakokračnog pravokutnog trokuta ABC s katetom duljine a nacrtani su s vanjske strane kvadrati $ABLK$, $BCNM$ i $CAQP$. Odredi površinu i opseg šesterokuta $KLMNPQ$.

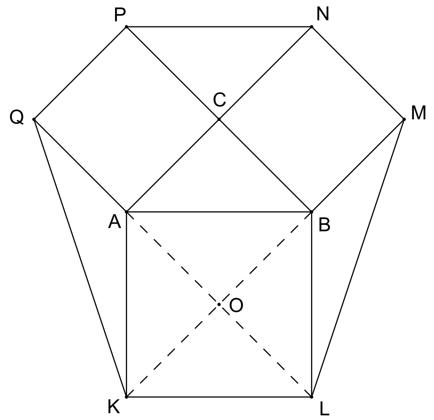
Rješenje.
Neka je C vrh nasuprot hipotenuze danog trokuta.

Kvadrati $BCNM$ i $CAQP$ imaju stranicu duljine a i površinu a^2, dok je duljina stranice kvadrata $ABLK$ jednaka $a\sqrt{2}$, a površina $2a^2$. (2 boda)

Trokut CNP je jednakokračan i pravokutan, sukladan danom trokutu, pa je
$P_{ABC}=P_{CNP}=\dfrac{a^2}{2}$. (2 boda)

Jasno je da su trokuti BLM i AKQ međusobno sukladni i stoga jednake površine.

Kako su točke M, B i K kolinearne, a $AL\perp BK$, zaključujemo da je nožište visine iz vrha L na stranicu $\overline{BM}$ upravo središte O kvadrata $ABLK$. Stoga je duljina te visine jednaka a, pa površina trokuta MBL iznosi $\dfrac{|LO|\cdot|BM|}{2}=\dfrac{a^2}{2}$. (4 boda)



Sada lako odredimo površinu šesterokuta:

$$\begin{aligned} P &= P_{ABC} + P_{ABLK} + P_{BCNM} + P_{ACPQ} + P_{AQK} + P_{BLM} + P_{CNP} \\ &= \frac{a^2}{2} + 2a^2 + 2a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 6a^2. \end{aligned}$$

(4 boda)

Uočimo da je LM hipotenuza pravokutnog trokuta LOM, pa vrijedi

$$|LM| = \sqrt{|MO|^2 + |OL|^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

(4 boda)

Odredimo sada opseg šesterokuta $KLMNPQ$:

$$\begin{aligned} O &= |KL| + |LM| + |MN| + |NP| + |PQ| + |QK| \\ &= a\sqrt{2} + a\sqrt{5} + a + a\sqrt{2} + a + a\sqrt{5} = 2a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

(4 boda)

Zadatak 3. Duljine svih bridova i duljina prostorne dijagonale kvadra su prirodni brojevi. Ako su duljine dvaju bridova tog kvadra 9 i 12, odredi duljinu trećeg brida.

Rješenje.
Veza duljine prostorne dijagonale d i duljina bridova a, b, c dana je formulom $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Uvrštavanjem danih duljina, dobivamo $(d-c)(d+c) = d^2 - c^2 = a^2 + b^2 = 9^2 + 12^2 = 225 = 5^2 \cdot 3^2$. (5 bodova)

Kako je $d - c < d + c$ u obzir dolaze samo ove faktorizacije:

$$(d-c)(d+c) = 1 \cdot 225 = 3 \cdot 75 = 5 \cdot 45 = 9 \cdot 25.$$

(3 boda)

Stoga imamo 4 sustava:

$$\begin{aligned} d-c &= 1 \\ d+c &= 225 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d-c &= 3 \\ d+c &= 75 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d-c &= 5 \\ d+c &= 45 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d-c &= 9 \\ d+c &= 25 \end{aligned}$$

(4 boda)

čija su rješenja redom

$$\begin{array}{rclcrclcrclcrcl} c &=& 112 & & c &=& 36 & & c &=& 20 & & c &=& 8 \\ d &=& 113 & & d &=& 39 & & d &=& 25 & & d &=& 17 \end{array}$$

(8 bodova)

Postoje 4 kvadra koja zadovoljavaju uvjete zadatka.

Zadatak 4. Magični kvadrat je tablica dimenzija $n \times n$ u koju su upisani svi prirodni brojevi od 1 do n^2, na takav način da u svakom stupcu, u svakom retku i na obje dijagonale zbroj upisanih brojeva bude jednak istom broju S_n. Na slici je prikazan jedan magični kvadrat 3×3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Odredi zbroj S_n u magičnom kvadratu $n \times n$.

Rješenje.
Ukupna suma svih brojeva u magičnom kvadratu $n \times n$ je suma prvih n^2 prirodnih brojeva:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n^2 - 1) + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$ (10 bodova)

Kako je suma brojeva u svakom retku jednaka S_n, suma brojeva u svih n redaka jednaka je nS_n, pa iz $nS_n = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$ slijedi $S_n = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$. (10 bodova)

Napomena. Učenik koji tvrdi $S_n =$ (suma svih brojeva od 1 do n^2)$/n$, ali ne zna odrediti sumu prvih n^2 prirodnih brojeva dobiva 10 bodova.

Zadatak 5.

(a) Nađi sve prirodne brojeve kojima je prva znamenka 6 i koji zadovoljavaju uvjet da se uklanjanjem te prve znamenke dobije broj koji je 25 puta manji od početnog.

(b) Dokaži da ne postoji prirodan broj n sa svojstvom da se uklanjanjem njegove prve znamenke dobije broj koji je 35 puta manji od n.

Rješenje.
(a) Traženi broj je oblika $6 \cdot 10^k + x$, pri čemu je x k-znamenkasti završetak broja.

Prema uvjetu zadatka, vrijedi $6 \cdot 10^k + x = 25x$. (5 bodova)

Dakle, $24x = 6 \cdot 10^k$, $4x = 10^k = 2^k \cdot 5^k$ i konačno, $x = 2^{k-2} \cdot 5^k = 25 \cdot 10^{k-2}$.

Traženi brojevi su oblika $6 \cdot 10^k + 25 \cdot 10^{k-2} = 625 \cdot 10^{k-2}$, odnosno brojevi

$$625,\ 6250,\ 62500,\ \ldots$$ (5 bodova)

(b) Označimo prvu znamenku s a, a k-znamenkasti završetak broja s x.

Prema uvjetu zadatka, treba vrijediti $a \cdot 10^k + x = 35x$, pa dobivamo $a \cdot 10^k = 34x$. (5 bodova)

Desna strana jednakosti je djeljiva sa 17, ali lijeva ne može biti jer je a vodeća znamenka broja, dakle između 1 i 9. Stoga takav broj ne postoji. (5 bodova)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

25. siječnja 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^3 - y^3 = 91.$$

Rješenje.

Odmah vidimo da je $x > y$ pa mora biti $x - y > 0$.

Jednadžbu možemo zapisati u obliku $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 91$. (4 boda)

Kako je $91 = 91 \cdot 1 = 7 \cdot 13$, imamo sljedeća četiri slučaja:

1°
$$\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \underline{x^2 + xy + y^2 = 91} \\ y = x - 1 \\ x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 - 91 = 0 \\ x^2 - x - 30 = 0 \\ \\ x_1 = 6,\ \ x_2 = -5 \\ y_1 = 5,\ \ y_2 = -6 \end{array}$$

2°
$$\begin{array}{l} x - y = 7 \\ \underline{x^2 + xy + y^2 = 13} \\ y = x - 7 \\ x^2 + x(x-7) + (x-7)^2 - 13 = 0 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \\ x_3 = 4,\ \ x_4 = 3 \\ y_3 = -3,\ \ y_4 = -4 \end{array}$$

3°
$$\begin{array}{l} x - y = 91 \\ \underline{x^2 + xy + y^2 = 1} \\ y = x - 91 \\ x^2 + x(x-91) + (x-91)^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 91x + 2760 = 0 \\ \\ x_{5,6} = \dfrac{91 \pm \sqrt{8281 - 11040}}{2} \notin \mathbb{R} \end{array}$$

4°
$$\begin{array}{l} x - y = 13 \\ \underline{x^2 + xy + y^2 = 7} \\ y = x - 13 \\ x^2 + x(x-13) + (x-13)^2 - 7 = 0 \\ x^2 - 13x + 54 = 0 \\ \\ x_{7,8} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 216}}{2} \notin \mathbb{R} \end{array}$$

(svaki od ova 4 slučaja po 4 boda)

Dakle, sva cjelobrojna rješenja jednadžbe su: $(6,5)$, $(-5,-6)$, $(4,-3)$, $(3,-4)$.

Zadatak 2. Za koje vrijednosti broja m vrijedi

$$-3 < \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

za svaki realni broj x?

Rješenje.

Kako je $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ za svaki realan broj x, (3 boda) treba odrediti sve parametre m za koje vrijede nejednakosti

$$-3(x^2+x+1) < x^2 - mx + 1 \qquad \text{i} \qquad x^2 - mx + 1 < 3(x^2+x+1), \qquad \text{tj.}$$

$$4x^2 + (-m+3)x + 4 > 0 \qquad \text{i} \qquad 2x^2 + (m+3)x + 2 > 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Da bi ove nejednakosti vrijedile za svaki realan broj x moraju odgovarajuće diskriminante biti negativne, tj. (3 boda)

$$\begin{array}{rcl}
(-m+3)^2 - 4\cdot 4\cdot 4 < 0 & \text{i} & (m+3)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 < 0 \\
m^2 - 6m - 55 < 0 & \text{i} & m^2 + 6m - 7 < 0 \\
(m+5)(m-11) < 0 & \text{i} & (m-1)(m+7) < 0 \\
m \in \langle -5, 11\rangle & \text{i} & m \in \langle -7, 1\rangle.
\end{array}$$

(10 bodova)

Obje nejednakosti su zadovoljene za $m \in \langle -5, 1\rangle$. Dakle, za $-5 < m < 1$ sve vrijednosti danog izraza su između -3 i 3. (2 boda)

Zadatak 3. Za koje sve kompleksne brojeve z je broj z^3 realan i veći od 27?

Rješenje.
Neka je $z = a + bi$. Tada je

$$z^3 = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i. \qquad \text{(2 boda)}$$

Ovaj kompleksan broj je realan ako i samo ako je $3a^2b - b^3 = b(3a^2 - b^2) = 0$, (2 boda)

tj. mora biti $b = 0$ (2 boda)

ili $b = a\sqrt{3}$ (2 boda)

ili $b = -a\sqrt{3}$ (2 boda)

Budući da je $\operatorname{Re} z^3 > 27$, imamo $a^3 - 3ab^2 > 27$ (1) (2 boda)

Moramo promatrati ova dva slučaja:

1° Za $b = 0$ iz (1) je $a^3 > 27$, odakle je $a > 3$; (2 boda)

2° Za $b = \pm a\sqrt{3}$ je $b^2 = 3a^2$, pa se iz (1) dobije $a < -\dfrac{3}{2}$ (4 boda)

Traženi brojevi su:

$z = a$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ i $a > 3$;

$z = a(1 \pm i\sqrt{3})$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ i $a < -\dfrac{3}{2}$. (2 boda)

Napomena. Zadnja dva boda treba dodijeliti svakom učeniku koji je točno zapisao rješenja koja je računom dobio, bez obzira na možebitnu prethodnu pogrešku.

Zadatak 4. Neka je $ABCD$ paralelogram, E polovište stranice $\overline{AB}$, F polovište stranice $\overline{BC}$ i P sjecište dužina $\overline{EC}$ i $\overline{FD}$. Dokaži da dužine $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ i $\overline{DP}$ dijele paralelogram na trokute čije se površine u nekom poretku odnose kao $1:2:3:4$.

Prvo rješenje.
Koristit ćemo oznaku $P(XYZ)$ za površinu trokuta XYZ i $P(XYZW)$ za površinu četverokuta $XYZW$.

Vrijedi:

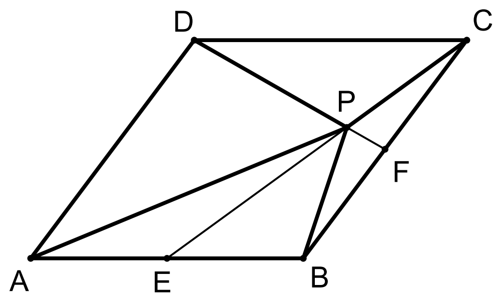
$$P(EBC) = P(FCD) = \frac{1}{4}P(ABCD).$$

Zato je

$$\frac{1}{2}P(APB) + P(BPC) = \frac{1}{4}P(ABCD) \qquad (1)$$

i

$$\frac{1}{2}P(BPC) + P(CPD) = \frac{1}{4}P(ABCD). \qquad (2)$$



Kako je $ABCD$ paralelogram vrijedi i

$$P(APB) + P(CPD) = \frac{1}{2}P(ABCD) \qquad (3)$$

(10 bodova)

Napomena. Za jednu od tih jednakosti dati 3 boda, a za dvije 6 bodova.

Iz (1), (2) i (3) dobivamo

$$\begin{aligned} P(APB) &= \frac{3}{10}P(ABCD) \\ P(BPC) &= \frac{1}{10}P(ABCD) \\ P(CPD) &= \frac{1}{5}P(ABCD). \end{aligned}$$

(6 bodova)

Odavde slijedi

$$P(DPA) = P(ABCD) - P(APB) - P(BPC) - P(CPD) = \frac{2}{5}P(ABCD).$$

(2 boda)

Dakle,

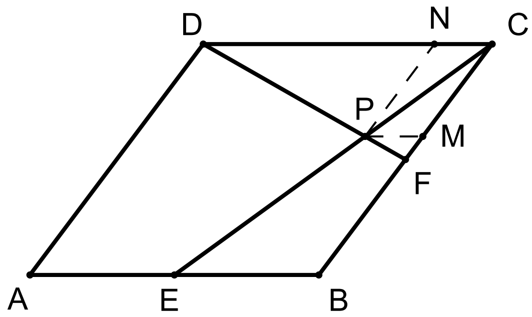
$$P(BPC) : P(CPD) : P(APB) : P(DPA) = 1 : 2 : 3 : 4. \qquad \text{(2 boda)}$$

Drugo rješenje.
Neka je $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|PM| = m$ i $|PN| = n$.

Promotrimo parove sličnih trokuta.

Iz $\triangle PMC \sim \triangle EBC$ slijedi

$|PM| : |MC| = |EB| : |BC|$, odnosno $m : n = \frac{a}{2} : b$. (3 boda)



Iz $\triangle DNP \sim \triangle DCF$ slijedi

$|DN| : |NP| = |DC| : |CF|$, odnosno $(a - m) : n = a : \frac{b}{2}$. (5 bodova)

Napomena. Za jednu sličnost dati 3 boda, a za dvije "nezavisne" 8 bodova.

Sada imamo

$$\frac{a}{b} = \frac{2m}{n} = \frac{a-m}{2n},$$

pa slijedi $m = \frac{1}{5}\,a$, $n = \frac{2}{5}\,b$. (6 bodova)

Označimo s P površinu danog paralelograma, a s v_a, v_b njegove visine, tako da vrijedi $P = av_a = bv_b$.

Visina trokuta ABP odnosi se prema visini v_a kao $|MB|$ prema $|BC|$, stoga vrijedi

$$P(ABP) = \frac{|AB| \cdot d(P, AB)}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{(b-n)v_a}{b} = \frac{a}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{P}{a} = \frac{3}{10}P.$$

Slično,

$$P(BCP) = \frac{|BC| \cdot d(P, BC)}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{mv_b}{a} = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{P}{b} = \frac{1}{10}P.$$

$$P(CDP) = \frac{|CD| \cdot d(P, CD)}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{nv_a}{b} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{P}{a} = \frac{1}{5}P.$$

$$P(DAP) = \frac{|DA| \cdot d(P, DA)}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{(a-m)v_b}{a} = \frac{b}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{P}{b} = \frac{2}{5}P.$$

(5 bodova)

Napomena. Za prvu površinu dati 2 boda, a za svaku sljedeću još po 1 bod.

Stoga je $P(BCP) : P(CDP) : P(ABP) : P(DAP) = 1 : 2 : 3 : 4$. (1 bod)

Napomena. Zadatak se može riješiti i analitičkom geometrijom.

Zadatak 5. Sjecišta dijagonala pravilnog peterokuta određuju manji peterokut. Odredi omjer duljina stranica manjeg i većeg peterokuta.

Prvo rješenje.
Označimo: $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA| = a$, $|A_1B_1| = |B_1C_1| = |C_1D_1| = |D_1E_1| = |E_1A_1| = x$. Treba odrediti omjer $\frac{x}{a}$.

Neka je $y = |AC_1| = |AD_1| = |BD_1| = |BE_1| = |CE_1| = |CA_1| = |DA_1| = |DB_1| = |EB_1| = |EC_1|$. (1 bod)

Kako je $EC \parallel AB$, trokuti ABD i A_1B_1D su slični, a kako je još i $AC \parallel DE$, $BE \parallel DC$, i trokuti ABD_1 i CED su slični. (4 boda)

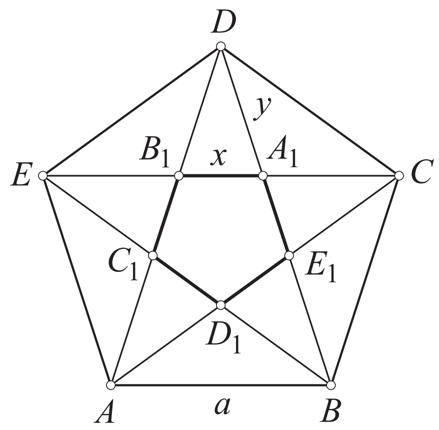
Sada imamo:

$$\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D \quad \Rightarrow \quad |AB| : |AD| = |A_1B_1| : |A_1D| \quad \Rightarrow \quad a : (x+2y) = x : y \qquad (1)$$

(2 boda)

$$\triangle ABD_1 \sim \triangle CED \quad \Rightarrow \quad |AB| : |AD_1| = |CE| : |CD| \quad \Rightarrow \quad a : y = (x+2y) : a \qquad (2)$$

(2 boda)



Iz (1) i (2) slijedi $\frac{x}{y} = \frac{y}{a}$. (1 bod)

Kako je $\sphericalangle ABE_1 = 72°$ i $\sphericalangle E_1AB = 36°$ trokut ABE_1 je jednakokračan tj. $|AB| = |AE_1|$. Dakle, $a = x + y$. (5 bodova)

Napomena. Učenik koji koristi ovu jednakost, ali ju nije dokazao gubi 3 boda.

Sada iz sustava jednadžbi $a = x + y$, $\frac{x}{y} = \frac{y}{a}$ trebamo odrediti $\frac{x}{a}$.

Dobivamo: $y = a - x$, $ax = y^2 \quad \Rightarrow \quad ax = (a-x)^2$.

Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ su $x = \frac{a(3 \pm \sqrt{5})}{2}$. (3 boda)

Kako je $x < a$, slijedi $x = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$, odnosno $\frac{x}{a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. (2 boda)

Drugo rješenje.

Uvedimo oznake kao u prvom rješenju. (1 bod)

Uočimo da je $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D$, (2 boda)

pa vrijedi $|AB| : |A_1B_1| = |BD| : |B_1D|$, tj. $a : x = (x + 2y) : y$. (2 boda)

Kako je $\triangle A_1B_1D \sim \triangle DB_1C$ (kutovi su $36^\circ,\ 72^\circ,\ 72^\circ$) (3 boda)

slijedi

$$\begin{aligned} |A_1B_1| : |B_1D| &= |DB_1| : |B_1C| \\ x : y &= y : (x + y), \end{aligned}$$

(2 boda)

odakle dobivamo (omjer zlatnog reza) $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. (5 bodova)

Sada je

$$\frac{a}{x} = \frac{x + 2y}{y} = \frac{x}{y} + 2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2 = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$$ (5 bodova)

Napomena. Učenik koji koristi, ali ne dokaže, činjenicu da je $x : y = (\sqrt{5} - 1)/2$ (ili neku ekvivalentnu) gubi 5 bodova.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

25. siječnja 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}\log_y x + \log_x y &= \frac{5}{2}\\ x + y &= 12.\end{aligned}$$

Rješenje.
Sustav jednadžbi je definiran na skupu $S = \{(x, y) : x, y \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle\}$. (2 boda)

Iz prve jednadžbe imamo

$$\begin{aligned}\log_y x + \log_x y &= \frac{5}{2},\\ \frac{1}{\log_x y} + \log_x y &= \frac{5}{2},\\ 2(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 2 &= 0.\end{aligned}$$

Odavde dobivamo dvije mogućnosti: $\log_x y = 2$ i $\log_x y = \dfrac{1}{2}$. (6 bodova)

To možemo zapisati u obliku $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}$. (2 boda)

Skup rješenja danog sustava jednadžbi je presjek skupa S i unije skupova rješenja ovih dvaju sustava:

$$\begin{array}{ll} y = x^2, & y = \sqrt{x} \\ \underline{x + y = 12,} & \underline{x + y = 12} \\ & \\ x^2 + x - 12 = 0, & x + \sqrt{x} - 12 = 0 \\ x_1 = -4,\ x_2 = 3, & x_3 = 9,\ (\sqrt{x} \geq 0) \\ y_1 = 16,\ y_2 = 9, & y_3 = 3. \end{array}$$

(8 bodova)

Skup rješenja polaznog sustava je $S \cap \{(-4, 16), (3, 9), (9, 3)\} = \{(3, 9), (9, 3)\}$. (2 boda)

Zadatak 2. Riješi jednadžbu

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Prvo rješenje.
Uvedimo supstituciju $t = \sin x + \cos x$. (2 boda)

Tada je $t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$, odakle je $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Sada jednadžba prelazi u

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} = 1 \quad \text{tj.} \quad t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su: $t_1 = 1$, $t_2 = -3$. (5 bodova)

U prvom slučaju jednadžba se svodi na $\sin x + \cos x = 1$, koju možemo zapisati u zgodnijem obliku

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(3 boda)

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Odavde dobivamo $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ (4 boda)

ili $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (4 boda)

U drugom slučaju nema rješenja jer je $|t_2| = 3 > |\sin x + \cos x|$. (2 boda)

Dakle, skup rješenja je

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Drugo rješenje.
Iz dane jednadžbe dobivamo $(\sin x + \cos x)^2 = (1 - \sin x \cos x)^2$ (1)

Redom imamo:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x &= 1 - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x \\ 1 + 2 \sin x \cos x &= 1 - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x \\ 4 \sin x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x &= 0 \qquad (2) \\ \sin x \cos x (4 - \sin x \cos x) &= 0 \end{aligned}$$

(10 bodova)

Jednadžba (1), odnosno (2) ekvivalentna je polaznoj jednadžbi uz uvjet $\sin x + \cos x \geq 0$.

(2 boda)

Kako je $4 - \sin x \cos x > 0$ iz (2) slijedi $\sin x \cos x = 0$, tj. $\sin(2x) = 0$, odakle dobivamo $x = \dfrac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$. (3 boda)

Uvjet $\sin x + \cos x \geq 0$ zadovoljavaju $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. (5 bodova)

Zadatak 3. Ako za kutove trokuta α, β i γ vrijedi

$$\sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma) = 0,$$

dokaži da je jedan njegov kut jednak $60°$.

Rješenje.
Kako su α, β i γ kutovi trokuta imamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

Zato je $\sin(3\gamma) = \sin(540° - 3(\alpha + \beta)) = \sin(3\alpha + 3\beta)$. (2 boda)

Trigonometrijskim transformacijama dobivamo

$$\begin{aligned}
& \sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma) \\
= \; & \sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\alpha + 3\beta) \\
= \; & 2\sin\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\cos\frac{3\alpha - 3\beta}{2} + 2\sin\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\cos\frac{3\alpha + 3\beta}{2} \\
= \; & 2\sin\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\left(\cos\frac{3\alpha - 3\beta}{2} + \cos\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

(6 bodova)

$$\begin{aligned}
= \; & 2\sin\frac{3\alpha + 3\beta}{2} \cdot 2\cos\frac{\frac{3\alpha - 3\beta}{2} + \frac{3\alpha + 3\beta}{2}}{2}\cos\frac{\frac{3\alpha - 3\beta}{2} - \frac{3\alpha + 3\beta}{2}}{2} \\
= \; & 4\sin\frac{3\alpha + 3\beta}{2} \cdot \cos\frac{3\alpha}{2} \cdot \cos\frac{3\beta}{2}
\end{aligned}$$

(6 bodova)

Kako je $\sin\left(\dfrac{3(\alpha + \beta)}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{540° - 3\gamma}{2}\right) = \sin\left(270° - \dfrac{3\gamma}{2}\right) = -\cos\dfrac{3\gamma}{2}$ dobivamo

$\cos\dfrac{3\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{3\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{3\gamma}{2} = 0$, pa je ili $\alpha = 60°$ ili $\beta = 60°$ ili $\gamma = 60°$. (6 bodova)

Zadatak 4. U trokutu ABC simetrala kuta pri vrhu B siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki K. Ako je $|BC| = 2$, $|CK| = 1$ i $|BK| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, odredi površinu trokuta ABC.

Rješenje.
Iz kosinusovog poučka za trokut KBC dobijemo

$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + |CK|^2 - |BK|^2}{2|BC| \cdot |CK|} = \frac{1}{8}. \qquad (1)$$

(3 boda)

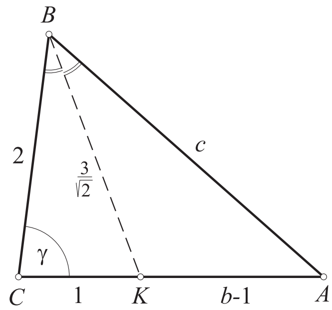
Primjenom kosinusovog poučka za trokut ABC imamo

$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}{2|BC|\cdot|AC|} = \frac{4 + b^2 - c^2}{4b}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) dobivamo jednadžbu

$$8 + 2b^2 - 2c^2 = b. \qquad (3)$$

(5 bodova)



Iz poučka o simetrali kuta za kut $\sphericalangle ABC$ imamo $\dfrac{|AK|}{|CK|} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$ (4 boda)

tj. $\dfrac{b-1}{1} = \dfrac{c}{2}$. Odavde dobivamo drugu jednadžbu $c = 2(b-1)$.

Uvrštavanjem u (3) dobijemo $b = \dfrac{5}{2}$, $c = 3$. (4 boda)

Površinu trokuta ćemo izračunati koristeći Heronovu formulu.

Kako je poluopseg $s = \dfrac{15}{4}$, to je

$$P = \sqrt{\frac{15}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{15\sqrt{7}}{16}.$$

(4 boda)

Napomena. Zadatak se može riješiti i primjenom kosinusovog poučka na kut $\dfrac{\beta}{2}$ u trokutima BCK ABK.

Zadatak 5. Duljina visine pravilne uspravne četverostrane prizme je v. Dijagonale dviju susjednih pobočki povučene iz zajedničkog vrha zatvaraju kut α. Odredi duljinu a brida baze.

Prvo rješenje.
Dijagonala baze je $d_1 = a\sqrt{2}$, a duljina dijagonale pobočke $d_2 = \sqrt{a^2 + v^2}$. (4 boda)

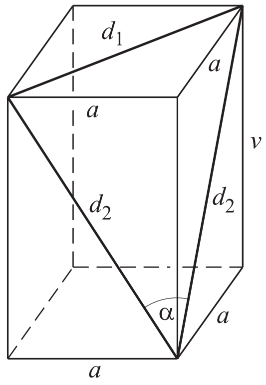
Sada imamo

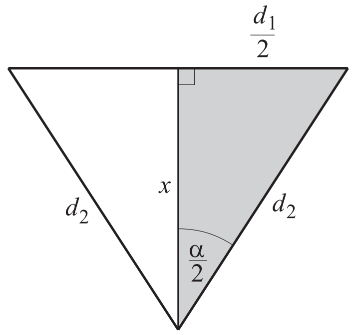
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d_1}{2d_2},$$

(6 bodova)

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2 + v^2}}$$

odakle kvadriranjem i sređivanjem dobivamo





$$
\begin{aligned}
2(a^2+v^2)\sin^2\frac{\alpha}{2} &= a^2\,,\\
a^2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) &= 2v^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,,\\
a^2\cos\alpha &= 2v^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,,\\
a &= \frac{v\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}.
\end{aligned}
$$

(10 bodova)

Drugo rješenje.
Dijagonala baze je $d_1 = a\sqrt{2}$, a duljina dijagonale pobočke $d_2 = \sqrt{a^2+v^2}$. (4 boda)

Primijenimo kosinusov poučak na označeni kut:

$$\cos\alpha = \frac{d_2^2+d_2^2-d_1^2}{2d_2d_2},$$ (6 bodova)

tj. $2d_2^2\cos\alpha = 2d_2^2 - d_1^2$, odnosno

$$
\begin{aligned}
2(a^2+v^2)\cos\alpha &= 2(a^2+v^2)-2a^2,\\
a^2 &= \frac{v^2(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha},
\end{aligned}
$$

tj. $a = v\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}}$. (10 bodova)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

25. siječnja 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Dokaži da je $\dfrac{(5n)!}{40^n n!}$ prirodan broj za svaki prirodan broj n.

Rješenje.
Zadatak rješavamo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: $n=1$, $\dfrac{5!}{40}=3$, što je prirodan broj. (4 boda)

Korak indukcije:

Pretpostavimo da je $\dfrac{(5k)!}{40^k k!}$ prirodan broj za **neki** prirodan broj k. (2 boda)

Za $n=k+1$ imamo

$$\frac{[5(k+1)]!}{40^{k+1}(k+1)!}=\frac{(5k)!}{40^k k!}\frac{(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4)(5k+5)}{40(k+1)}.$$

Nakon skraćivanja, dobivamo

$$\frac{[5(k+1)]!}{40^{k+1}(k+1)!}=\frac{(5k)!}{40^k k!}\cdot\frac{(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4)}{8}. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Prvi faktor je prirodan broj po pretpostavci. U brojniku drugog faktora je produkt 4 uzastopna prirodna broja, od kojih su dva parna, a jedan od njih je djeljiv s 4, pa je produkt djeljiv s 8. Zbog toga je drugi faktor, a onda i umnožak, prirodan broj. (6 bodova)

Po principu matematičke indukcije slijedi da je $\dfrac{(5n)!}{40^n n!}$ prirodan broj za svaki $n\in\mathbb{N}$.

(2 boda)

Zadatak 2. Ako su $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokaži da su $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ također uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Prvo rješenje.
Uvjet da su $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza može se zapisati kao

$$\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)=2\sin(\gamma+\alpha-\beta). \qquad \text{(4 boda)}$$

Primjenom formule za pretvaraje sume sinusa u produkt trigonometrijskih funkcija i adicijske formule za sinus dobivamo

$$2\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha+\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha-\alpha-\beta+\gamma}{2}=2(\sin(\gamma+\alpha)\cos\beta-\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta)$$

(4 boda)

$$\sin\beta\cos(\gamma-\alpha)=\sin(\gamma+\alpha)\cos\beta-\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta$$

$$\sin\beta(\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha))=\sin(\gamma+\alpha)\cos\beta \qquad \text{(4 boda)}$$

$$\sin\beta\cdot 2\cos\gamma\cos\alpha=(\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha)\cos\beta \qquad \text{(4 boda)}$$

Dijeljenjem s $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ dobivamo

$$2\,\mathrm{tg}\,\beta=\mathrm{tg}\,\gamma+\mathrm{tg}\,\alpha,$$

što znači da su $\mathrm{tg}\ \alpha,\ \mathrm{tg}\ \beta,\ \mathrm{tg}\ \gamma$ uzastopni članovi aritmetičkog niza. (4 boda)

Drugo rješenje.
Uvjet da su $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sin(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza se može napisati kao

$$\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)=\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\gamma+\alpha-\beta). \qquad \text{(4 boda)}$$

Korištenjem formule za pretvaranje razlike sinusa u produkt, dobivamo

$$2\cos\gamma\cdot\sin\frac{2(\alpha-\beta)}{2}=2\cos\alpha\cdot\sin\frac{2(\beta-\gamma)}{2},$$

odnosno

$$\cos\gamma\cdot\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\sin(\beta-\gamma). \qquad \text{(6 bodova)}$$

Primjenom adicijskih formula za sinus imamo

$$\cos\gamma\sin\alpha\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Dijeljenjem s $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ dobivamo

$$\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta=\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\gamma,$$

što znači da su $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{tg}\,\beta$ i $\mathrm{tg}\,\gamma$ uzastopni članovi aritmetičkog niza. (4 boda)

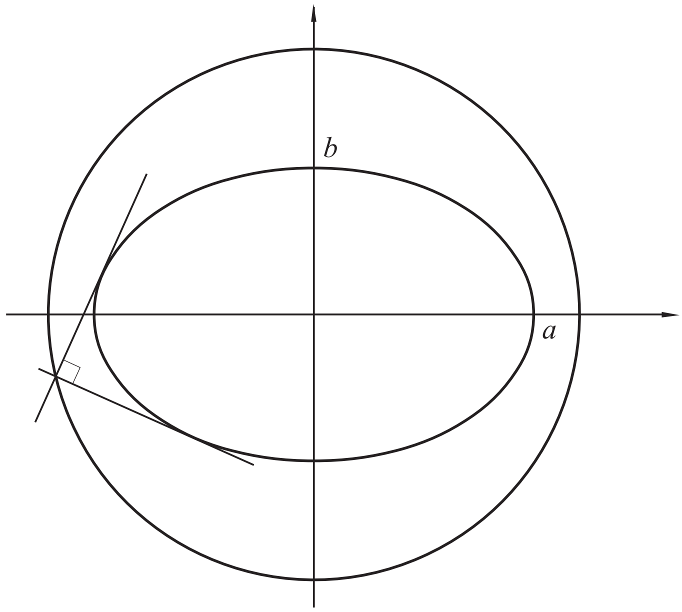
Zadatak 3. Zadana je elipsa s jednadžbom $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Dokaži da sva sjecišta po dvije međusobno okomite tangente ove elipse leže na istoj kružnici.

Rješenje.
Neka su pravci $y=kx+l$ i $y=-\dfrac{1}{k}x+m$ međusobno okomite tangente te elipse.

Iz uvjeta dodira tih pravaca s elipsom dobivamo: $a^2k^2+b^2=l^2$ i $\dfrac{a^2}{k^2}+b^2=m^2$, (5 bodova)

odnosno (množenjem s k^2), $a^2+k^2b^2=k^2m^2$, što zbrajanjem daje

$$k^2m^2+l^2=a^2(k^2+1)+b^2(k^2+1)=(k^2+1)(a^2+b^2). \qquad \text{(5 bodova)}$$



Izjednačavanjem $kx + l = -\frac{1}{k}x + m$ dobivamo koordinate sjecišta $T(x, y)$ tih tangenti:

$x = \frac{k(m-l)}{k^2+1}$ i $y = \frac{k^2(m-l)}{k^2+1} + l = \frac{k^2m+l}{k^2+l}$. (5 bodova)

Dalje sređujemo:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \frac{k^2(m-l)^2}{(k^2+1)^2} + \frac{(k^2m+l)^2}{(k^2+1)^2} \\
&= \frac{k^2m^2 - 2k^2ml + k^2l^2 + k^4m^2 + l^2 + 2k^2ml}{(k^2+1)^2} \\
&= \frac{l^2(k^2+1) + k^2m^2(k^2+1)}{(k^2+1)^2} = \frac{k^2m^2+l^2}{k^2+1} \\
&= \frac{(k^2+1)(a^2+b^2)}{k^2+1} = a^2 + b^2.
\end{aligned}
$$

Dakle, sva sjecišta zadanih tangenti leže na kružnici koja je dana jednadžbom $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

(5 bodova)

Zadatak 4. Odredi zbroj svih peteroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite i koji su zapisani samo znamenkama 1, 2, 3, 4 i 5.

Rješenje.

Takvih brojeva ukupno ima $5! = 120$. Svaka se znamenka pojavljuje na mjestu jedinica, desetica, stotica, tisućica i desettisućica onoliko puta koliko je načina za razmještanje preostale 4 znamenke, a to je $4!$ ili 24 puta. (8 bodova)

Tada je zbroj svih znamenki na nekom mjestu u zapisu jednak

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 24 = 15 \cdot 24 = 360. \quad \text{(8 bodova)}$$

Ukupan zbroj tada iznosi

$$360 + 3600 + 36000 + 360000 + 360000 = 360 \cdot 11111 = 3999960. \qquad \text{(4 boda)}$$

Zadatak 5. Zadan je niz realnih brojeva a_n takav da je $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n + 1$ za svaki prirodan broj n i $a_{2009} = 2009$. Odredi zbroj $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008}$.

Rješenje.
Rekurzivni uvjet možemo napisati kao $na_{n+1} - (n+1)a_n = n$. Uvrštavajući redom brojeve $1, 2, \ldots, 2008$ u tu jednakost, dobivamo:

$$\begin{aligned}
1 \cdot a_2 - 2 \cdot a_1 &= 1, \\
2 \cdot a_3 - 3 \cdot a_2 &= 2, \\
3 \cdot a_4 - 4 \cdot a_3 &= 3, \\
&\vdots \\
2008 \cdot a_{2009} - 2009 \cdot a_{2008} &= 2008.
\end{aligned}$$

(6 bodova)

Zbrojimo li ovih 2008 jednakosti, dobivamo

$$-2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008}) + 2008 \cdot a_{2009} = 1 + 2 + \ldots + 2008. \qquad \text{(8 bodova)}$$

Ukoliko traženu sumu označimo s S, prethodna jednakost postaje

$$\begin{aligned}
-2S &= (1 + 2 + \ldots + 2008) - 2008 \cdot 2009, \\
-2S &= \frac{1}{2} \cdot 2008 \cdot 2009 - 2008 \cdot 2009.
\end{aligned}$$

Konačno je $S = \frac{1}{4} \cdot 2008 \cdot 2009 = 1\,008\,518.$ (6 bodova)