Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

25. siječnja 2008.

1. Rastavi izraz
$$(x^2+2x)^4-(x^3+2x^2)^2-(3x^2+6x)^2+9x^2$$
na faktore koji se ne mogu dalje rastaviti.

2. Ako je
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \qquad a+b+c=1 \qquad \text{i} \qquad a^2+b^2+c^2=1,$$
dokaži da je $xy+yz+zx=0$.

3. Zadane su tri različite znamenke različite od 0 i određena je suma svih troznamenkastih brojeva kojima su to znamenke. Dokaži da je dobivena suma djeljiva s 37 i sa 6.

4. Mjerni broj volumena (obujma) uspravne kvadratne prizme kojoj su duljine bridova prirodni brojevi jednak je mjernom broju njezinog oplošja. Odredi duljine bridova te prizme tako da njezin volumen bude
   (a) najmanji mogući;
   (b) najveći mogući.

5. Nad stranicama jednakostraničnog trokuta ABC stranice a nacrtani su s vanjske strane kvadrati $ABLK$, $BCNM$ i $CAQP$. Odredi površinu i opseg šesterokuta $KLMNPQ$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

25. siječnja 2008.

1. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe
$$x^3 - y^3 = 91.$$

2. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n$, u ovisnosti o prirodnom broju n.

3. Nađi sve realne brojeve x za koje vrijedi nejednakost
$$2x + \frac{1}{x^2} \geq 3.$$

4. Odredi sve parametre m takve da za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $x^2 + (m-3)x + 1 - 2m = 0$ vrijedi
$$\frac{x_1}{2x_2} + \frac{x_2}{2x_1} = -3.$$

5. Dan je pravokutnik $ABCD$ takav da je $|AB| = 5$ i $|BC| = 4$. Neka je E polovište stranice $\overline{AB}$, F polovište stranice $\overline{BC}$ i P sjecište dužina $\overline{EC}$ i $\overline{FD}$. Izračunaj površine trokuta ABP, BCP, CDP i DAP.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

25. siječnja 2008.

1. Riješi nejednadžbu

$$\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3) < 0.$$

2. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\sin x - \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

3. Ako je $\sin 2x = a$, odredi $\sin^6 x + \cos^6 x$.

4. U trokutu ABC simetrala kuta pri vrhu B siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki K. Ako je $|BC| = 2$, $|CK| = 1$ i $|BK| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, odredi površinu trokuta ABC.

5. Duljina visine pravilne uspravne četverostrane prizme je v. Dijagonale dviju susjednih pobočki povučene iz zajedničkog vrha zatvaraju kut α. Odredi duljinu a brida baze.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

25. siječnja 2008.

1. Članovi aritmetičkog niza su realni brojevi. Produkt pet uzastopnih članova tog niza je 45, a njihov zbroj je 5. Odredi tih pet članova za sve takve nizove.

2. Riješi jednadžbu
$$\sin^8 x + \cos^8 x = 1.$$

3. Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Neka je M polovište brida $\overline{A_1B_1}$, a N središte kvadrata ABB_1A_1. Odredi kosinus kuta između pravaca MD i NC.

4. Neka su K i L redom ortogonalne projekcije dviju točaka P i Q parabole (različitih od njezinog tjemena A) na os parabole. Dokaži da vrijedi
$$\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|PK|^2}{|QL|^2}.$$

5. Dokaži da je $\dfrac{(5n)!}{40^n n!}$ prirodan broj za svaki prirodan broj n.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.