OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

25. siječnja 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Rastavi izraz

$$(x^2+2x)^4-(x^3+2x^2)^2-(3x^2+6x)^2+9x^2$$

na faktore koji se ne mogu dalje rastaviti.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&(x^2+2x)^4-(x^3+2x^2)^2-(3x^2+6x)^2+9x^2\\
&\quad= x^4(x+2)^4-x^4(x+2)^2-9x^2(x+2)^2+9x^2\\
&\quad= x^4(x+2)^2((x+2)^2-1)-9x^2((x+2)^2-1)\\
&\quad= x^2((x+2)^2-1)(x^2(x+2)^2-9)
\end{aligned}$$

(10 bodova)

$$\begin{aligned}
&= x^2((x+2)+1)((x+2)-1)(x(x+2)+3)(x(x+2)-3)\\
&= x^2(x+3)(x+1)(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)
\end{aligned}$$

(5 bodova)

$$\begin{aligned}
&= x^2(x+3)(x+1)(x^2+2x+3)(x^2+3x-x-3)\\
&= x^2(x+3)(x+1)(x^2+2x+3)(x+3)(x-1)\\
&= x^2(x+3)^2(x+1)(x-1)(x^2+2x+3)
\end{aligned}$$

(5 bodova)

Napomena. Za pokušaj rastava na faktore, ili za izlučivanje faktora x^2 dati do 5 bodova.

Zadatak 2. Ako je

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \qquad a+b+c=1 \qquad \text{i} \qquad a^2+b^2+c^2=1,$$

dokaži da je $xy+yz+zx=0$.

Rješenje.
Uz oznaku $k=\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ vrijedi $x=ka$, $y=kb$, $z=kc$, pa je

$$xy+xz+zx=ka\cdot kb+kb\cdot kc+kc\cdot ka=k^2(ab+bc+ca).$$

(10 bodova)

Iz $a+b+c=1$ i $a^2+b^2+c^2=1$ slijedi

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right]=0.$$

Zato je $xy+xz+zx=0$, što je i trebalo dokazati. (10 bodova)

Zadatak 3. Zadane su tri različite znamenke različite od 0 i određena je suma svih troznamenkastih brojeva kojima su to znamenke. Dokaži da je dobivena suma djeljiva s 37 i sa 6.

Rješenje.
Neka su odabrane znamenke a, b, c. Troznamenkasti brojevi koji imaju te znamenke su $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. (5 bodova)

Suma tih brojeva je:

$$\begin{aligned}
&\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} \\
&\quad = (100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + \\
&\qquad\quad (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) \\
&\quad = 222a + 222b + 222c \;=\; 222(a + b + c)
\end{aligned}$$

(10 bodova)

Kako je dobiveni broj djeljiv s $222 = 6 \cdot 37$, on je djeljiv s 37 i sa 6, što je i trebalo pokazati.

(5 bodova)

Zadatak 4. Mjerni broj volumena (obujma) uspravne kvadratne prizme kojoj su duljine bridova prirodni brojevi jednak je mjernom broju njezinog oplošja. Odredi duljine bridova te prizme tako da njezin volumen bude

(a) najmanji mogući;

(b) najveći mogući.

Rješenje.
Neka je stranica osnovke prizme duljine a, a njena visina v. Tada je obujam prizme jednak $V = a^2 v$, a oplošje $O = 2a^2 + 4av$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $a^2 v = 2a^2 + 4av$, (5 bodova)

odnosno $v(a - 4) = 2a$, tj.

$$v = \frac{2a}{a-4} = \frac{2a - 8 + 8}{a-4} = 2 + \frac{8}{a-4}.$$

Da bi v bio cijeli broj, $a - 4$ mora biti djelitelj broja 8.

Jedine mogućnosti su $a - 4 \in \{-2, -1, 1, 2, 4, 8\}$, no mora biti i $v > 0$.

Stoga ostaju samo mogućnosti $a = 5,\ 6,\ 8,\ 12$ i $v = 10,\ 6,\ 4,\ 3$. (10 bodova)

Ako su bridovi $(5, 5, 10)$, volumen je 250,

ako su bridovi $(6, 6, 6)$, volumen je 216,

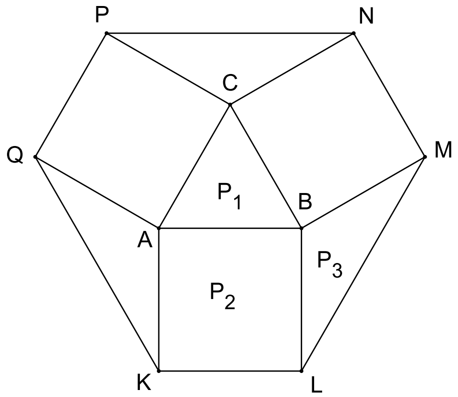
ako su bridovi $(8, 8, 4)$, volumen je 256,

ako su bridovi $(12, 12, 3)$, volumen je 432.

Volumen je najmanji za prizmu čiji su bridovi duljina 6, 6, 6 (kocka!), a najveći za prizmu s bridovima duljina 12, 12 i 3. (5 bodova)

Zadatak 5. Nad stranicama jednakostraničnog trokuta ABC stranice a nacrtani su s vanjske strane kvadrati $ABLK$, $BCNM$ i $CAQP$. Odredi površinu i opseg šesterokuta $KLMNPQ$.

Rješenje.
Površina dobivenog šesterokuta jednaka je sumi $P_1 + 3P_2 + 3P_3$,



gdje smo označili:

s P_1 površinu danog jednakostraničnog trokuta ABC,

s P_2 površinu sukladnih kvadrata $ABLK$, $BCNM$ i $CAQP$ i

s P_3 površinu sukladnih trokuta BLM, CNP i AQK. (2 boda)

Očito je $P_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $P_2 = a^2$. (2 boda)

Visina iz vrha B dijeli trokut BLM na dva sukladna pravokutna trokuta s jednim kutom $60°$ (jer je $\sphericalangle LBK = 360° - 2 \cdot 90° - 60° = 120°$), i hipotenuzom duljine a. Stoga je $P_3 = P_1$.

(5 bodova)

Zato tražena površina šesterokuta $KLMNPQ$ iznosi

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 + 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2(3 + \sqrt{3}). \qquad \text{(3 boda)}$$

Opseg šesterokuta $KLMNPQ$ sastoji se od tri stranice kvadrata (duljine a) i tri najdulje stranice u trokutima BLM, CNP i AQK. (2 boda)

Kako je duljina stranice $\overline{LM}$ jednaka dvostrukoj duljini visine danog jednakostraničnog trokuta, (3 boda)

imamo

$$O = 3|KL| + 3|LM| = 3a + 3 \cdot a\sqrt{3} = 3a(1 + \sqrt{3}). \qquad \text{(3 boda)}$$

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

25. siječnja 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^3 - y^3 = 91.$$

Rješenje.
Odmah vidimo da je $x > y$ pa mora biti $x - y > 0$.

Jednadžbu možemo zapisati u obliku $(x-y)(x^2+xy+y^2) = 91$. (4 boda)

Kako je $91 = 91 \cdot 1 = 7 \cdot 13$, imamo sljedeća četiri slučaja:

1° $$\begin{array}{l} x - y = 1 \\ \underline{x^2 + xy + y^2 = 91} \\ y = x - 1 \\ x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 - 91 = 0 \\ x^2 - x - 30 = 0 \\ \\ x_1 = 6, \ \ x_2 = -5 \\ y_1 = 5, \ \ y_2 = -6 \end{array}$$

2° $$\begin{array}{l} x - y = 7 \\ \underline{x^2 + xy + y^2 = 13} \\ y = x - 7 \\ x^2 + x(x-7) + (x-7)^2 - 13 = 0 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \\ x_3 = 4, \ \ x_4 = 3 \\ y_3 = -3, \ \ y_4 = -4 \end{array}$$

3° $$\begin{array}{l} x - y = 91 \\ \underline{x^2 + xy + y^2 = 1} \\ y = x - 91 \\ x^2 + x(x-91) + (x-91)^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 91x + 2760 = 0 \\ \\ x_{5,6} = \dfrac{91 \pm \sqrt{8281 - 11040}}{2} \notin \mathbb{R} \end{array}$$

4° $$\begin{array}{l} x - y = 13 \\ \underline{x^2 + xy + y^2 = 7} \\ y = x - 13 \\ x^2 + x(x-13) + (x-13)^2 - 7 = 0 \\ x^2 - 13x + 54 = 0 \\ \\ x_{7,8} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 216}}{2} \notin \mathbb{R} \end{array}$$

(svaki od ova 4 slučaja po 4 boda)

Dakle, sva cjelobrojna rješenja jednadžbe su: $(6,5)$, $(-5,-6)$, $(4,-3)$, $(3,-4)$.

Zadatak 2. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja $\left(\dfrac{i-1}{i+1}\right)^n$, u ovisnosti o prirodnom broju n.

Rješenje.
Najprije pojednostavimo

$$\frac{i-1}{i+1} = \frac{i-1}{i+1} \cdot \frac{i-1}{i-1} = \frac{-2i}{-2} = i.$$ (8 bodova)

Sada je $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n = i^n \in \{1, -1, i, -i\}$.

Napomena. Učenik koji stigne samo do ovog rezultata dobija ukupno 10 bodova.

Preciznije:

za $n = 4k$, $\quad \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k} = i^{4k} = 1$;

za $n = 4k+1$, $\quad \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k+1} = i^{4k+1} = i$;

za $n = 4k+2$, $\quad \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k+2} = i^{4k+2} = -1$;

za $n = 4k+3$, $\quad \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k+3} = i^{4k+3} = -i$.

(8 bodova)

Stoga je:

$$\begin{array}{lll}
n = 4k & \operatorname{Re}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k} = 1 & \operatorname{Im}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k} = 0 \\
n = 4k+1 & \operatorname{Re}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k+1} = 0 & \operatorname{Im}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k+1} = 1 \\
n = 4k+2 & \operatorname{Re}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k+2} = -1 & \operatorname{Im}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k+2} = 0 \\
n = 4k+3 & \operatorname{Re}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k+3} = 0 & \operatorname{Im}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{4k+3} = -1
\end{array}$$

(4 boda)

Zadatak 3. Nađi sve realne brojeve x za koje vrijedi nejednakost

$$2x + \frac{1}{x^2} \geq 3.$$

Rješenje.

Danu nejednadžbu možemo redom transformirati:

$$\begin{aligned}
2x + \frac{1}{x^2} &\geq 3 \qquad / \cdot x^2 \\
2x^3 - 3x^2 + 1 &\geq 0
\end{aligned}$$

(2 boda)

$$\begin{aligned}
2x^3 - 2x^2 - x^2 + 1 &\geq 0 \\
2x^2(x-1) - (x-1)(x+1) &\geq 0 \\
(x-1)(2x^2 - x - 1) &\geq 0
\end{aligned}$$

(5 bodova)

$$
\begin{aligned}
(x-1)(2x^2-2x+x-1) &\geq 0 \\
(x-1)[2x(x-1)+(x-1)] &\geq 0 \\
(x-1)^2(2x+1) &\geq 0.
\end{aligned}
$$

(5 bodova)

Kako je $(x-1)^2 \geq 0$, slijedi $2x+1 \geq 0$ tj. $x \geq -\frac{1}{2}$ za $x \neq 1$. (3 boda)

Za $x = 1$ vrijedi jednakost. (2 boda)

Za $x = 0$ dana nejednakost nije definirana, (2 boda)

pa ona vrijedi i za $x \geq -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$. (1 bod)

Zadatak 4. Odredi sve parametre m takve da za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $x^2+(m-3)x+1-2m=0$ vrijedi

$$
\frac{x_1}{2x_2}+\frac{x_2}{2x_1}=-3.
$$

Rješenje.
Iz Vièteovih formula imamo

$$
x_1+x_2=-\frac{m-3}{1}, \qquad x_1x_2=\frac{1-2m}{1}, \qquad \text{tj.}
$$

$$
x_1+x_2=3-m, \qquad x_1x_2=1-2m.
$$

(6 bodova)

Danu jednadžbu možemo transformirati:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_1x_2} &= -3 \\
(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 &= -6x_1x_2
\end{aligned}
$$

(6 bodova)

$$
\begin{aligned}
(x_1+x_2)^2+4x_1x_2 &= 0 \\
(3-m)^2+4(1-2m) &= 0 \\
m^2-14m+13 &= 0.
\end{aligned}
$$

(6 bodova)

Dakle, postoje dva rješenja: $m_1 = 1$ i $m_2 = 13$. (2 boda)

Zadatak 5. Dan je pravokutnik $ABCD$ takav da je $|AB| = 5$ i $|BC| = 4$. Neka je E polovište stranice $\overline{AB}$, F polovište stranice $\overline{BC}$ i P sjecište dužina $\overline{EC}$ i $\overline{FD}$. Izračunaj površine trokuta ABP, BCP, CDP i DAP.

Prvo rješenje.
Koristit ćemo oznaku $P(XYZ)$ za površinu trokuta XYZ i $P(XYZW)$ za površinu četverokuta $XYZW$.

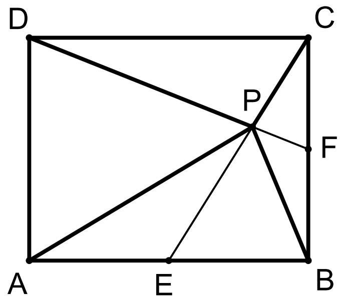
Na početku uočimo da je $P(ABCD) = |AB| \cdot |BC| = 20$. (2 boda)

Kako je $P(EBC) = P(FCD) = \frac{1}{4}P(ABCD)$, imamo

$$\frac{1}{2}P(APB) + P(BPC) = \frac{1}{4}P(ABCD) = 5, \qquad (1)$$

i

$$\frac{1}{2}P(BPC) + P(CPD) = \frac{1}{4}P(ABCD) = 5. \qquad (2)$$



Vrijedi i

$$P(APB) + P(CPD) = \frac{1}{2}P(ABCD) = 10. \qquad (3)$$ (10 bodova)

Napomena. Za jednu od tih jednakosti dati 3 boda, a za dvije 6 bodova.

Iz (1), (2) i (3) dobivamo

$$P(APB) = 6,\ P(BPC) = 2,\ P(CPD) = 4.$$ (6 bodova)

Odavde slijedi

$$P(DPA) = P(ABCD) - P(APB) - P(BPC) - P(CPD) = 8.$$ (2 boda)

Drugo rješenje.

Iz točke P spustimo okomice $\overline{PM}$ i $\overline{PN}$ na stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ redom.

Neka je $|PM| = m$ i $|PN| = n$, tada je $|BM| = 4 - n$, $|CM| = n$, $|CN| = m$, $|DN| = 5 - m$.

(2 boda)

Promotrimo parove sličnih trokuta.

Iz $\triangle PMC \sim \triangle EBC$ imamo

$|PM| : |MC| = |EB| : |BC|$, odnosno $m : n = \frac{5}{2} : 4$. (3 boda)

Iz $\triangle DNP \sim \triangle DCF$ dobivamo

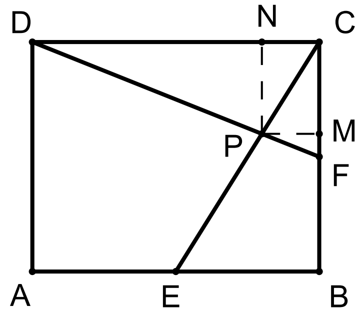
$|DN| : |NP| = |DC| : |CF|$, odnosno $(5-m) : n = 5 : 2$. (5 bodova)

Napomena. Za jednu sličnost dati 3 boda, a za dvije "nezavisne" 8 bodova.

Odavde slijedi

$$m = \frac{5}{8}n, \quad 5 - m = \frac{5}{2}n$$

odnosno $m = 1$, $n = \frac{8}{5}$. (4 bodova)



Konačno,

$$P(ABP) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |MB| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (4-n) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{12}{5} = 6,$$

$$P(BCP) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |PM| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2,$$

$$P(CDP) = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |PN| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot n = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{8}{5} = 4,$$

$$P(DAP) = \frac{1}{2} \cdot |DA| \cdot |ND| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (5-m) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

(6 bodova)

Treće rješenje.

Postavimo pravokutnik u kartezijev koordinatni sustav tako da točka A bude ishodište.

Imamo sljedeće točke: $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(5,4)$, $D(0,4)$, $E\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $F(5,2)$. (4 boda)

Jednadžba pravca FD je $y - 2 = -\frac{2}{5}(x-5)$. (3 boda)

Jednadžba pravca EC je $y - 4 = \frac{8}{5}(x-5)$. (3 boda)

Nađimo sjecište P pravaca FD i EC: $-\frac{2}{5}x + 4 = \frac{8}{5}x - 4$, odakle je $x = 4$, a onda, uvrštavanjem u bilo koju od gornje dvije jednadžbe, i $y = \frac{12}{5}$.

(4 boda)

Sada je $P(APB) = \dfrac{5 \cdot \frac{12}{5}}{2} = 6$, $P(BPC) = \dfrac{4 \cdot 1}{2} = 2$, $P(CPD) = \dfrac{5 \cdot \frac{8}{5}}{2} = 4$ i $P(DPA) = \dfrac{4 \cdot 4}{2} = 8$. (6 bodova)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

25. siječnja 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Riješi nejednadžbu

$$\log_{x-3}(x^2-4x+3)<0.$$

Rješenje.
Da bi nejednadžba bila definirana moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$\begin{array}{rll} x-3>0, & x-3\neq 1, & x^2-4x+3=(x-1)(x-3)>0, \qquad \text{tj.} \\ x>3, & x\neq 4, & x\in\langle-\infty,1\rangle\cup\langle 3,\infty\rangle, \end{array}$$

odnosno mora biti $x\in\langle 3,4\rangle\cup\langle 4,\infty\rangle$. (4 boda)

Treba promatrati dva slučaja:

1° $3<x<4$

Tada je $x^2-4x+3>1$ tj. $x^2-4x+2>0$. Rješenje ove nejednadžbe je $x\in\langle-\infty,2-\sqrt{2}\rangle\cup\langle 2+\sqrt{2},\infty\rangle$.

Dobivamo $x\in\langle 2+\sqrt{2},4\rangle$. (8 bodova)

2° $x>4$

Sada je $0<x^2-4x+3<1$ tj. $(x-1)(x-3)>0$ i $x^2-4x+2<0$, pa mora biti $x\in(\langle-\infty,1\rangle\cup\langle 3,\infty\rangle)\cap\langle 2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\rangle$.

Zbog uvjeta $x>4$ u ovom slučaju nema rješenja. (8 bodova)

Dakle, skup svih rješenja je $\langle 2+\sqrt{2},4\rangle$.

Zadatak 2. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\sin x-\cos x+\sin x\cos x=1.$$

Prvo rješenje.
Faktorizirajmo danu jednadžbu:

$$\begin{aligned} \sin x-\cos x+\sin x\cos x-1 &= 0, \\ (\sin x+\sin x\cos x)-(1+\cos x) &= 0, \\ (\sin x-1)(1+\cos x) &= 0. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Odavde je $\sin x=1$, tj. $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ za $k\in\mathbb{Z}$ (5 bodova)

ili $\cos x=-1$, tj. $x=\pi+2k\pi$ za $k\in\mathbb{Z}$. (5 bodova)

Skup svih rješenja dane jednadžbe je

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Drugo rješenje.

Uvedimo supstituciju $t = \sin x - \cos x$. (2 boda)

Tada je $t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1 - 2\sin x \cos x$, odakle je $\sin x \cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$.

Sada jednadžba prelazi u

$$t + \frac{1-t^2}{2} = 1 \quad \text{tj.} \quad t^2 - 2t + 1 = 0.$$

Kako je $(t-1)^2 = 0$, dobivamo $t = 1$. (5 bodova)

Jednadžba se svodi na $\sin x - \cos x = 1$, tj.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(3 boda)

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

a odavde je $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ (5 bodova)

ili $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (5 bodova)

Dakle skup rješenja je

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Treće rješenje.

Iz dane jednadžbe dobivamo $(\sin x - \cos x)^2 = (1 - \sin x \cos x)^2$ (1)

Redom imamo:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x &= 1 - 2\sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x \\ 1 - 2\sin x \cos x &= 1 - 2\sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x \\ \sin x \cos x &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

(10 bodova)

Jednadžba (1), odnosno (2) ekvivalentna je polaznoj jednadžbi uz uvjet $\sin x - \cos x \geq 0$.

(2 boda)

Iz (2), odnosno $\sin(2x) = 0$ dobivamo $x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. (3 boda)

Uvjet $\sin x - \cos x \geq 0$ zadovoljavaju $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. (5 bodova)

Zadatak 3. Ako je $\sin 2x = a$, odredi $\sin^6 x + \cos^6 x$.

Rješenje.
Kubiranjem identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i sređivanjem dobivamo

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x = 1. \qquad \text{(5 bodova)}$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{3}{4}(\sin(2x))^2 \\ &= 1 - \frac{3}{4}a^2. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Zadatak 4. U trokutu ABC simetrala kuta pri vrhu B siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki K. Ako je $|BC| = 2$, $|CK| = 1$ i $|BK| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, odredi površinu trokuta ABC.

Rješenje.
Iz kosinusovog poučka za trokut KBC dobijemo

$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + |CK|^2 - |BK|^2}{2|BC| \cdot |CK|} = \frac{1}{8}. \qquad (1) \qquad \text{(3 boda)}$$

Primjenom kosinusovog poučka za trokut ABC imamo

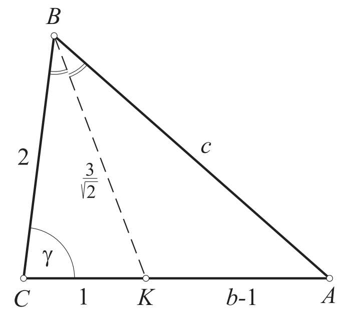
$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}{2|BC| \cdot |AC|} = \frac{4 + b^2 - c^2}{4b}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) dobivamo jednadžbu

$$8 + 2b^2 - 2c^2 = b. \qquad (3) \qquad \text{(5 bodova)}$$

Iz poučka o simetrali kuta za kut $\measuredangle ABC$ imamo $\dfrac{|AK|}{|CK|} = \dfrac{|AB|}{|BC|}$ (4 boda)

tj. $\dfrac{b-1}{1} = \dfrac{c}{2}$. Odavde dobivamo drugu jednadžbu $c = 2(b-1)$.



Uvrštavanjem u (3) dobijemo $b = \dfrac{5}{2}$, $c = 3$. (4 boda)

Površinu trokuta ćemo izračunati koristeći Heronovu formulu.

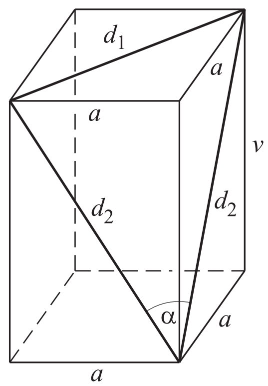
Kako je poluopseg $s = \dfrac{15}{4}$, to je

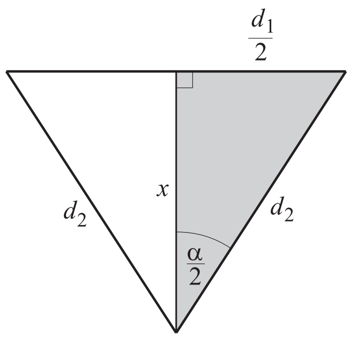
$$P = \sqrt{\frac{15}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{15\sqrt{7}}{16}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Napomena. Zadatak se može riješiti i primjenom kosinusovog poučka na kut $\dfrac{\beta}{2}$ u trokutima BCK i ABK.

Zadatak 5. Duljina visine pravilne uspravne četverostrane prizme je v. Dijagonale dviju susjednih pobočki povučene iz zajedničkog vrha zatvaraju kut α. Odredi duljinu a brida baze.

Prvo rješenje.
Dijagonala baze je $d_1 = a\sqrt{2}$, a duljina dijagonale pobočke $d_2 = \sqrt{a^2 + v^2}$. (4 boda)





Sada imamo

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d_1}{2d_2} \qquad \text{(6 bodova)}$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2 + v^2}}$$

odakle kvadriranjem i sređivanjem dobivamo

$$
\begin{aligned}
2(a^2+v^2)\sin^2\frac{\alpha}{2} &= a^2\,, \\
a^2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) &= 2v^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,, \\
a^2\cos\alpha &= 2v^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,, \\
a &= \frac{v\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}.
\end{aligned}
$$

(10 bodova)

Drugo rješenje.
Dijagonala baze je $d_1 = a\sqrt{2}$, a duljina dijagonale pobočke $d_2 = \sqrt{a^2+v^2}$. (4 boda)

Primijenimo kosinusov poučak na označeni kut:

$$\cos\alpha = \frac{d_2^2+d_2^2-d_1^2}{2d_2d_2}, \qquad \text{(6 bodova)}$$

tj. $2d_2^2\cos\alpha = 2d_2^2 - d_1^2$, odnosno

$$
\begin{aligned}
2(a^2+v^2)\cos\alpha &= 2(a^2+v^2)-2a^2, \\
a^2 &= \frac{v^2(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha},
\end{aligned}
$$

tj. $a = v\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}}$. (10 bodova)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

25. siječnja 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Članovi aritmetičkog niza su realni brojevi. Produkt pet uzastopnih članova tog niza je 45, a njihov zbroj je 5. Odredi tih pet članova za sve takve nizove.

Rješenje.
Neka je s srednji od tih 5 članova. Tada je

$$(s-2d)+(s-d)+s+(s+d)+(s+2d)=5,$$

iz čega dobivamo $s=1$. (6 bodova)

Iz uvjeta da je njihov produkt jednak 45 dobivamo

$$\begin{aligned}(1-2d)\cdot(1-d)\cdot 1\cdot(1+d)\cdot(1+2d) &= 45,\\ (1-4d^2)(1-d^2) &= 45,\\ 4d^4-5d^2-44 &= 0.\end{aligned}$$

(6 bodova)

Rješavanjem ove bikvadratne jednadžbe dobivamo $d^2=4$ i $d^2=-\dfrac{11}{4}<0$.

Stoga je $d=2$ ili $d=-2$. (4 boda)

Članovi niza u oba slučaja su $-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5$. (4 boda)

Zadatak 2. Riješi jednadžbu

$$\sin^8 x+\cos^8 x=1.$$

Prvo rješenje.
Koristimo trigonometrijske identitete

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{i} \quad \cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Zadana jednadžba postaje

$$(1-\cos(2x))^4+(1+\cos(2x))^4=16. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Korištenjem binomnog teorema dobivamo:

$$\begin{aligned}&1-4\cos(2x)+6\cos^2(2x)-4\cos^3(2x)+\cos^4(2x)\\ &\quad+1+4\cos(2x)+6\cos^2(2x)+4\cos^3(2x)+\cos^4(2x)=16,\end{aligned}$$

odnosno

$$\cos^4(2x)+6\cos^2(2x)+1=8. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Nakon uvođenja supstitucije $t = \cos^2(2x)$, dobivamo jednadžbu

$$t^2 + 6t - 7 = 0.$$

Njezina rješenja su $t_1 = -7$ (ne zadovoljava jer mora biti $0 \le \cos^2(2x) \le 1$) i $t_2 = 1$.

Stoga imamo $\cos^2(2x) = 1$ tj. $\cos(2x) = \pm 1$. (5 bodova)

U slučaju $\cos(2x) = 1$, rješenja su $x = k\pi$, gdje je k bilo koji cijeli broj,

a u slučaju $\cos(2x) = -1$, rješenja su $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdje je k bilo koji cijeli broj. (5 bodova)

Rješenja se mogu zapisati u obliku $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Drugo rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \qquad /^2 \\
\sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - \frac{\sin^2(2x)}{2} \qquad /^2 \\
\sin^8 x + \cos^8 x &= \left(1 - \frac{\sin^2(2x)}{2}\right)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x \\
&= 1 - \sin^2(2x) + \frac{1}{4}\sin^4(2x) - \frac{1}{8}\sin^4(2x) \\
&= 1 - \sin^2(2x) + \frac{1}{8}\sin^4(2x)
\end{aligned}$$

(10 bodova)

Zato je polazna jednadžba ekvivalentna sa

$$1 - \sin^2(2x) + \frac{1}{8}\sin^4(2x) = 1 \qquad \text{tj.} \qquad \sin^2(2x)(8 - \sin^2(2x)) = 0.$$

Odavde slijedi $\sin^2(2x) = 0$ ili $\sin^2(2x) = 8$ (što nije moguće). (5 bodova)

Konačno rješenje je $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. (5 bodova)

Zadatak 3. Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Neka je M polovište brida $\overline{A_1B_1}$, a N središte kvadrata ABB_1A_1. Odredi kosinus kuta između pravaca MD i NC.

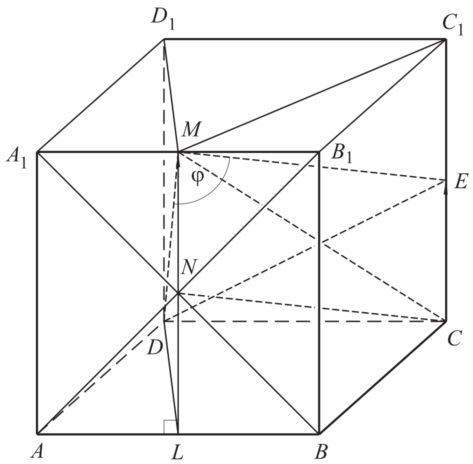
Prvo rješenje.

Neka je a duljina brida kocke. Translatirajmo prvo dužinu $\overline{NC}$ za vektor $\overrightarrow{NM}$ ($\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{CE}$). Kut koji tražimo je $\varphi = \sphericalangle DME$. (4 boda)

Iz trokuta MDD_1 imamo

$$|MD|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + a^2 = \frac{9}{4}a^2. \qquad \text{(4 boda)}$$

Iz trokuta EMC_1 dobivamo



$$|ME|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2.$$ (4 boda)

Na kraju, iz trokuta DCE je

$$|DE|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2.$$ (4 boda)

Iz kosinusovog poučka za trokut DME dobivamo

$$\cos\varphi = \frac{|MD|^2 + |ME|^2 - |DE|^2}{2 \cdot |MD| \cdot |ME|} = \frac{5\sqrt{6}}{18}.$$ (4 boda)

Drugo rješenje.
Neka je φ traženi kut.

Označimo $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{k}$. Tada je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortogonalna baza i $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = a$.

(4 boda)

Vrijedi $\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\overrightarrow{NC} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$. (4 boda)

Moduli tih vektora su $|\overrightarrow{MD}| = \frac{3}{2}a$ i $|\overrightarrow{NC}| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. (4 boda)

Sada imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{NC} &= \left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}\right) \\ &= -\frac{1}{4}|\vec{i}|^2 + |\vec{j}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{k}|^2 = \frac{5}{4}a^2,\end{aligned}$$

(4 boda)

pa je konačno

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}}{|\overrightarrow{MD}| \cdot |\overrightarrow{MC}|} = \frac{\frac{5}{4}a^2}{\frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{5\sqrt{6}}{18}.$$ (4 boda)

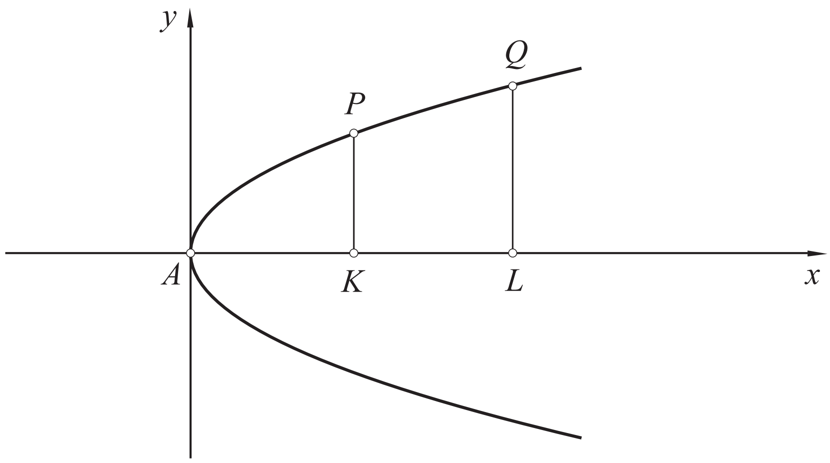
Zadatak 4. Neka su K i L redom ortogonalne projekcije dviju točaka P i Q parabole (različitih od njezinog tjemena A) na os parabole. Dokaži da vrijedi

$$\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|PK|^2}{|QL|^2}.$$

Rješenje.
Smjestimo parabolu u koordinatni sustav tako da joj je tjeme u ishodištu koordinatnog sustava, a os joj se poklapa s x-osi. Tada je jednadžba parabole $y^2 = 2px$, a točke P i Q su dane s $P\left(\frac{a^2}{2p}, a\right)$, $Q\left(\frac{b^2}{2p}, b\right)$. Projekcije K i L su dane s $K\left(\frac{a^2}{2p}, 0\right)$, $L\left(\frac{b^2}{2p}, 0\right)$. (8 bodova)

Tada imamo

$$\frac{|PK|^2}{|QL|^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$ (5 bodova)



S druge strane,

$$\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{\frac{a^2}{2p}}{\frac{b^2}{2p}} = \frac{a^2}{b^2}.$$ (5 bodova)

Dakle, $\frac{|PK|^2}{|QL|^2} = \frac{|AK|}{|AL|}$, što je i trebalo dokazati. (2 boda)

Napomena. Zadatak se može riješiti i promatranjem točaka na paraboli $y = ax^2$.

Zadatak 5. Dokaži da je $\frac{(5n)!}{40^n n!}$ prirodan broj za svaki prirodan broj n.

Rješenje.
Zadatak rješavamo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: $n = 1$, $\frac{5!}{40} = 3$, što je prirodan broj. (4 boda)

Korak indukcije:

Pretpostavimo da je $\frac{(5k)!}{40^k k!}$ prirodan broj za **neki** prirodan broj k. (2 boda)

Za $n = k + 1$ imamo

$$\frac{[5(k+1)]!}{40^{k+1}(k+1)!} = \frac{(5k)!}{40^k k!} \frac{(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4)(5k+5)}{40(k+1)}.$$

Nakon skraćivanja, dobivamo

$$\frac{[5(k+1)]!}{40^{k+1}(k+1)!} = \frac{(5k)!}{40^k k!} \cdot \frac{(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4)}{8}.$$ (6 bodova)

Prvi faktor je prirodan broj po pretpostavci. U brojniku drugog faktora je produkt 4 uzastopna prirodna broja, od kojih su dva parna, a jedan od njih je djeljiv s 4, pa je produkt djeljiv s 8. Zbog toga je drugi faktor, a onda i umnožak, prirodan broj. (6 bodova)

Po principu matematičke indukcije slijedi da je $\frac{(5n)!}{40^n n!}$ prirodan broj za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(2 boda)