Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

Primošten, 7. travnja 2008.

1. Odredi vrijednost izraza $a(a+2)+c(c-2)-2ac$, ako je $a-c=7$.

2. Usporedi brojeve $\sqrt{2006}+\sqrt{2010}$ i $2\sqrt{2008}$.

3. Šest učenika, označimo ih s A, B, C, D, E i F, rješavali su neki zadatak. Zadatak su riješila dvojica. Na pitanje: "Tko je riješio?", oni su dali pet odgovora

   1) A i C;
   2) B i E;
   3) F i A;
   4) B i F;
   5) D i A.

   U četiri od ovih pet odgovora jedan je dio točan, a drugi netočan, dok su u jednom odgovoru oba dijela netočna.

   Koji su učenici riješili zadatak?

4. U pravokutniku $ABCD$ točka M je polovište dužine $\overline{AB}$, a točka E presjek dijagonale $\overline{AC}$ i dužine $\overline{DM}$. Ako je $|AB|=2\sqrt{2}$ cm i $|BC|=2$ cm, dokaži da je $|\sphericalangle CED|=90°$.

5. Zadan je pravokutnik $ABCD$ takav da je $|AB|=3|BC|$. Na stranici $\overline{AB}$ dana je točka P takva da je $|AP|=\frac{1}{3}|AB|$. Dokaži da je

$$|\sphericalangle CAB|+|\sphericalangle CPB|=45°.$$

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

1. Napišimo dani izraz u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} a(a+2)+c(c-2)-2ac &= a^2+2a+c^2-2c-2ac \\ &= (a-c)^2+2(a-c) \\ &= 7^2+2\cdot 7 = 49+14 \\ &= 63. \end{aligned}$$

2. Vrijedi

$$\begin{aligned} (\sqrt{2006}+\sqrt{2010})^2 &= (\sqrt{2006})^2+2\cdot\sqrt{2006}\cdot\sqrt{2010}+(\sqrt{2010})^2 \\ &= 2006+2\sqrt{2006\cdot 2010}+2010 \\ &= 4016+2\sqrt{2006\cdot 2010} \\ &= 2\cdot 2008+2\sqrt{2006\cdot 2010} \\ &= 2\cdot(2008+\sqrt{2006\cdot 2010}). \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \sqrt{2006\cdot 2010} &= \sqrt{(2008-2)(2008+2)} \\ &= \sqrt{2008^2-2^2} \\ &= \sqrt{2008^2-4} \\ &< \sqrt{2008^2} \\ &= 2008. \end{aligned}$$

Zato slijedi

$$(\sqrt{2006}+\sqrt{2010})^2 < 2\cdot(2008+2008) = 4\cdot 2008.$$

Korjenovanjem nejednakosti slijedi

$$\sqrt{2006}+\sqrt{2010} < 2\sqrt{2008}.$$

3. Ako je u oba dijela:
1) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & - \\ - & B & E & + \\ + & F & A & - \\ - & B & F & + \\ + & D & A & - \end{array} \Longrightarrow$$

A	B	C	D	E	F
N	N	N	T	T	T

što nije moguće.

2) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & + \\ - & B & E & - \\ + & F & A & - \\ - & B & F & + \\ + & D & A & - \end{array} \Longrightarrow$$

A	B	C	D	E	F
N	N	T	T	N	T

što nije moguće.

3) netočan

$$\begin{array}{cccc} - & A & C & + \\ + & B & E & - \\ - & F & A & - \\ + & B & F & - \\ + & D & A & - \end{array} \Longrightarrow$$

A	B	C	D	E	F
N	T	T	T	N	N

što nije moguće.

4) netočan

$$\begin{array}{cccc} + & A & C & - \\ - & B & E & + \\ - & F & A & + \\ - & B & F & - \\ - & D & A & + \end{array} \Longrightarrow$$

A	B	C	D	E	F
T	N	N	N	T	N

5) netočan

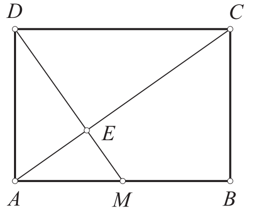
$$\begin{array}{cccc} - & A & C & + \\ - & B & E & + \\ + & F & A & - \\ - & B & F & + \\ - & D & A & - \end{array} \Longrightarrow$$

A	B	C	D	E	F
N	N	T	N	T	T

što nije moguće.

Učenici A i E su riješili zadatak.

4.



Kako je $|\sphericalangle AEM| = |\sphericalangle DEC|$ (vršni kutovi) i $|\sphericalangle EAM| = |\sphericalangle ECD|$ (kutovi s usporednim kracima), prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\triangle AME \sim \triangle CDE$. Iz sličnosti slijedi $|DE| = 2|EM|$ i $|CE| = 2|AE|$.

Primjenom Pitagorina poučka imamo:

$$|AC|^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2^2 \quad \text{ili} \quad |AC| = 2\sqrt{3} \quad \text{ili} \quad |AE| = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

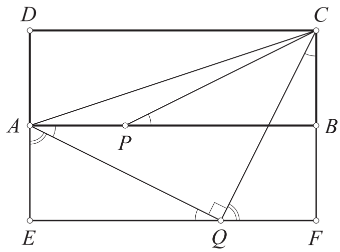
$$|DM|^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 6 \quad \text{ili} \quad |DM| = \sqrt{6} \quad \text{ili} \quad |EM| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

U trokutu $\triangle AME$ imamo:

$$|AM| = \sqrt{2}, \qquad |AE| = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \qquad |ME| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Budući da je $|AM|^2 = 2$ i $|AE|^2 + |ME|^2 = \frac{12}{9} + \frac{6}{9} = 2$, odnosno $|AM|^2 = |AE|^2 + |ME|^2$, prema obratu Pitagorina poučka trokut $\triangle AME$ je pravokutan pa je $|\sphericalangle MEA| = |\sphericalangle CED| = 90°$.

5. Dopunimo pravokutnik $ABCD$ sa sukladnim pravokutnikom kao na slici. Odaberimo na $\overline{EF}$ točku Q takvu da je $|EQ| = \frac{2}{3}|EF|$.



Označimo zbog jednostavnosti $|BC| = x$. Promotrimo sada pravokutne trokute AEQ i QFC. Kako je $|AE| = |QF| = x$ i $|EQ| = |CF| = 2x$, slijedi da su oni sukladni. Iz te sukladnosti slijedi

$$|AQ| = |QC| \tag{$*$}$$

te

$$|\sphericalangle EAQ| = |\sphericalangle CQF| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle EQA| = |\sphericalangle QCF|. \tag{$**$}$$

Sada je zbog $(*)$ i $(**)$ trokut AQC jednakokračan pravokutan.

Nadalje, kako je $|PB| = 2x$ i $|BC| = x$, slijedi da su pravokutni trokuti PBC i AEQ sukladni. Iz te sukladnosti slijedi da je $|\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle EQA|$. Kako su $\sphericalangle EQA$ i $\sphericalangle QAB$ kutovi uz presječnicu, slijedi da je $|\sphericalangle EQA| = |\sphericalangle QAB|$.

Konačno,

$$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle EQA| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle QAB| = |\sphericalangle QAC|.$$

Kako je trokut QAC jednakokračan pravokutan, slijedi da je $|\sphericalangle QAC| = 45°$ čime je dokaz završen.