

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola
Primošten, 7. travnja 2008.

1. Tri djevojčice Ana, Iva i Maja, u šumi su skupile 770 kestena i odlučile ih međusobno podijeliti proporcionalno svojim godinama. Svaki put kada je Iva uzela 4 kestena, Ana je uzela 3, a na svakih 6 što ih je uzela Iva, Maja je uzimala 7 kestena.

Koliko godina ima svaka djevojčica ako zajedno imaju 35 godina? Koliko je kestena pripalo svakoj od njih?

2. Cijena nekog materijala snižena je 52%. Nakon tog sniženja, za iznos od 240 kn može se kupiti 1 metar materijala više nego što se moglo kupiti prije sniženja za 270 kn. Odredi cijenu tog materijala prije sniženja.
3. Koliki je zbroj svih peteroznamenastih brojeva zapisanih pomoću znamenki 1, 2, 3, 4 i 5, pri čemu se svaka znamenka pojavljuje točno jedanput?
4. U konveksnom četverokutu $ABCD$ točke E , F , G su redom polovišta stranica \overline{AD} , \overline{DC} i \overline{AB} . Pritom je $GE \perp AD$, $GF \perp CD$. Izračunaj $|\angle ACB|$.
5. Dan je pravokutnik $ABCD$. Na simetrali stranice \overline{AB} , odnosno \overline{BC} nalaze se točke E i G , odnosno F i H tako da je $|ES| = |SH|$ i $|FS| = |SG|$, pri čemu je točka S sjecište simetrala stranica \overline{AB} i \overline{BC} . Dokaži da je četverokut $EFGH$ jednakokračan trapez.

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

1. Neka su

$$\begin{aligned}a &- \text{Anine godine,} \\ i &- \text{Ivine godine,} \\ m &- \text{Majine godine,} \\ a + i + m &= 35.\end{aligned}$$

Godine se odnose kao kesteni:

$$\begin{aligned}i : a &= 4 : 3, \quad i : m = 6 : 7 \\ \Rightarrow a &= \frac{3}{4}i, \quad m = \frac{7}{6}i \\ \Rightarrow i + \frac{3}{4}i + \frac{7}{6}i &= 35 \\ \Rightarrow \frac{12i + 9i + 14i}{12} &= 35 \Rightarrow \frac{35}{12}i = 35 \\ \Rightarrow i &= 12, \quad a = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9, \quad m = \frac{7}{6} \cdot 12 = 14.\end{aligned}$$

Kako je $770 : 35 = 22$, onda je Ivi pripalo $22 \cdot 12 = 264$ kestena, Ani $22 \cdot 9 = 198$ kestena, a Maji $22 \cdot 14 = 308$ kestena.

Iva ima 12 godina i 264 kestena, Ana ima 9 godina i 198 kestena, a Maja ima 14 godina i 308 kestena.

2. Neka je

$$\begin{aligned}x &- \text{cijena materijala,} \\ y &- \text{količina materijala u metrima.}\end{aligned}$$

Nakon sniženja cijena je

$$x - 52\%x = x - 0.52x = 0.48x.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}240 &= 0.48x \cdot (y + 1), \\ 240 &= 0.48x \cdot y + 0.48x.\end{aligned}$$

Prije sniženja vrijedi

$$270 = x \cdot y.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}240 &= 0.48 \cdot 270 + 0.48x \\ 240 &= 129.6 + 0.48x \\ 0.48x &= 110.4 \\ x &= \frac{110.4}{0.48} \\ x &= 230.\end{aligned}$$

Cijena prije sniženja bila je 230 kn.

Zapišimo svaki od tih brojeva u obliku

$$10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e.$$

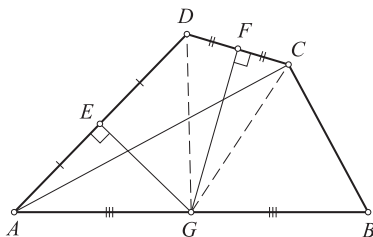
Prilikom zbrajanja tih brojeva, na dekadskom mjestu jedinica nalazi se po 24 jedinice, dvojke, trojke, četvorke i petice. Isto se nalazi na mjestu desetica, stotica, tisućica i desettisućica. Zbroj svih znamenki na pojedinom dekadskom mjestu je

$$\begin{aligned} n &= 24 \cdot 5 + 24 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 1 \\ &= 24(5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 360. \end{aligned}$$

Prema tome, zbroj svih tih brojeva je

$$\begin{aligned} & 10\,000n + 1\,000n + 100n + 10n + n \\ &= (10\,000 + 1\,000 + 100 + 10 + 1) \cdot n \\ &= 11\,111 \cdot 360 = 3\,999\,960. \end{aligned}$$

4.



Kako je $|AE| = |ED|$, $|\sphericalangle GEA| = |\sphericalangle DEG| = 90^\circ$ i \overline{GE} zajednička stranica trokuta $\triangle AGE$ i $\triangle DGE$, prema teoremu S-K-S o sukladnosti slijedi $\triangle AGE \cong \triangle DGE$. Iz sukladnosti slijedi $|AG| = |GD|$.

Analogno, $\triangle GFD \cong \triangle GFC$ pa je $|GD| = |GC|$.

Dakle, $|AG| = |GD| = |GC|$ i $|AG| = |GB|$ što znači da je $|GC| = |GB|$ odnosno trokut $\triangle GBC$ je jednakokraki.

Također, trokut $\triangle AGC$ je jednakokračan.

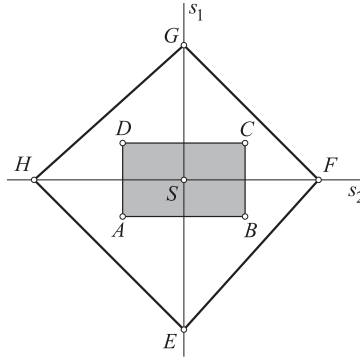
Neka je $|\nless CAG| = \alpha$.

Tada je $|\nless GCA| = \alpha$, pa je $|\nless CGB| = |\nless CAG| + |\nless GCA| = 2\alpha$.

Dalje je $|\sphericalangle BCG| = |\sphericalangle GBC| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle CGB|}{2} = 90^\circ - \alpha$.

Na kraju, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle GCA| + |\sphericalangle BCG| = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$.

5. Neka je s_1 simetrala stranice \overline{AB} , a s_2 simetrala stranice \overline{BC} .



Kako je $s_1 \perp AB$, $s_2 \perp BC$ i $AB \perp BC$, onda je i $s_1 \perp s_2$.

Budući da je $|ES| = |SH|$ i $|\sphericalangle ESH| = 90^\circ$, onda je $\triangle ESH$ jednakokrakan pravokutan pa je $|\sphericalangle HES| = |\sphericalangle SHE| = 45^\circ$.

No, i $|FS| = |SG|$ i $|\sphericalangle GSF| = 90^\circ$ te je i $\triangle FGS$ jednakokrakan pravokutan, odnosno $|\sphericalangle SFG| = |\sphericalangle FGS| = 45^\circ$.

S obzirom da je $|\sphericalangle FSE| = 90^\circ$, onda je $\triangle EFS$ pravokutan pa je $|\sphericalangle SEF| + |\sphericalangle EFS| = 90^\circ$.

Dalje je

$$\begin{aligned} |\sphericalangle HEF| + |\sphericalangle EFG| &= (|\sphericalangle HES| + |\sphericalangle SEF|) + (|\sphericalangle EFS| + |\sphericalangle SFG|) \\ &= |\sphericalangle HES| + (|\sphericalangle SEF| + |\sphericalangle EFS|) + |\sphericalangle SFG| \\ &= 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

To znači da je $EH \parallel FG$ te je $\square EFGH$ trapez.

Kako je $|ES| = |SH|$, $|\sphericalangle FSE| = |\sphericalangle HSG| = 90^\circ$ i $|FS| = |SG|$, prema teoremu S-K-S o sukladnosti slijedi $\triangle EFS \cong \triangle HGS$.

Iz sukladnosti slijedi $|EF| = |HG|$ te je time tvrdnja dokazana.