

PROBLEMSKI ZADACI

Stručni skup učitelja matematike

prof. dr. sc. Sanja Varošanec
PMF-Matematički odjel
kolovoz 2010.

ZADATAK

1. **Uvjeti** - poznate veličine i objekti, nepoznate veličine i objekti, veze između veličina i objekata
2. **Cilj** - pronalaženje nepoznatih veličina, svojstava i veza među njima, dokazivanje
3. **Teorijska osnova** - znanje potrebno za nalaženje rješenja
4. **Rješavanje** - način postizanja cilja zadatka
5. **Osvrt** - provjera rješenja, usporedba s nekim drugim zadatkom, poopćenje, pronalazak jednostavnijeg ili drugačijeg načina rješavanja

Vrste zadataka

1. **Standardni** - nema nepoznatih sastavnica: uvjeti postavljeni jasno i precizno, cilj očigledan, teorijska se osnova lako uočava, način rješavanja poznat i prirodan
2. **Nestandardni** - bar jedna sastavnica nepoznata
Problemski - bar dvije sastavnice nepoznate
pojačan umni napor, dublja analiza,
veća koncentracija, više načina
rješavanja

Neke od metoda rješavanja

1. Descartesova metoda (algebarska)
2. metoda uzastopnih približavanja
3. grafičko-aritmetička metoda
4. metoda rješavanja unatrag
5. metoda lažne postavke
6. metode rješavanja diofantskih jednadžbi
7. metoda razlikovanja slučajeva

DESCARTESOVA ILI ALGEBARSKA METODA

René Descartes (1569.–1650.), francuski matematičar

Univerzalna metoda rješavanja problema:

1. Zadaća bilo koje vrste svodi se na matematičku zadaću.
2. Matematička zadatak bilo koje vrste svodi se na algebarsku zadaću.
3. Bilo koja algebarska zadatak svodi se na rješavanje jedne jedinstvene jednadžbe.

- i sam Descartes je bio svjestan da postoje slučajevi kad je ova shema neupotrebljiva

- upotrebljiva je za velik broj problema, pogotovo tekstualnih zadataka, koji se javljaju u nastavi matematike.

Descartesova pravila

1. Ako ste pročitali zadaću s razumijevanjem, uočite poznate i nepoznate veličine.
2. Proučite zadaću najprirodnijim putem, postavite sve odnose između danih i nepoznatih veličina.
3. Izdvojite uvjete koji dozvoljavaju da se jedna te ista veličina izrazi na dva različita načina, kako bi dobili jednadžbu koja povezuje nepoznate veličine. Konačno, treba raščlaniti te uvjete na toliko dijelova i doći do toliko jednadžbi koliko ima nepoznanica.
4. Svedite sustav jednadžbi na jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom koja se zatim rješava.

Pitanja

Što je zadano?

Što je nepoznato?

Što treba naći?

Koliko ima nepoznanica?

Kako ih označiti?

Kako glasi uvjet?

Možeš li naći vezu između zadanog i nepoznatog?

i tako dalje

Problemi:

- a) prijevod s običnog jezika na matematički jezik
- b) rješavanje jednadžbi

Rješenja:

a) Od prvog razreda stalno dovoditi učenike u dodir s tekstovnim zadacima.

Primjer (3. raz.) *U papirnici su imali 199 bilježnica. Hlapić ih je kupio 33, a Gita 34. Koliko je bilježnica ostalo u papirnici?*

Primjer (5. raz.) *Netko je za 19 dana boravka na moru uplatio 6650 kuna. Koliko će morati nadoplatiti ako ostane još 6 dana?*

- b) Uvježbati rješavanje linearnih jednadžbi i sustava

Primjer 1. (5. raz.) U nekoj školi ima 3 puta više učenica nego učenika. Pri tome je broj učenica za 280 veći od broja učenika. Koliko je ukupno učenika u toj školi?

Rješenje 1. (prikladno za 6. raz.)

broj učenika: x

broj učenica: $3x$

veza: $3x = 280 + x$

Rješenje 2. (prikladno za 7. raz.)

broj učenika: x

broj učenica: y

veza: $y = 3x, y = 280 + x$

Rješenje 3. Grafičko-aritmetička metoda (prikladno za 4. i 5. raz.)

GRAFIČKO-ARITMETIČKA METODA

Prikladna u nižim razredima i u 5. razredu, tj. do trenutka usvajanja Descartesove metode.

Veze između poznatih i nepoznatih veličina grafički se skiciraju.

Za prikaz koristimo pravokutnik ili dužinu koja glumi jednu od nepoznatih veličina.

Odličan uvod u Descartesovu metodu.

Primjer 1. (5. raz.) U nekoj školi ima 3 puta više učenica nego učenika. Pri tome je broj učenica za 280 veći od broja učenika. Koliko je ukupno učenika u toj školi?

METODA RJEŠAVANJA UNATRAG

Pri rješavanju krećemo od konačnog rezultata.

Primjeri karakterističnih zadataka:

Primjer 2. Ivor je zamislio neki broj, pomnožio ga sa 6, dodao mu količnik brojeva 672 i 6 i dobio 898. Koji je broj zamislio Ivor? (4/1995, regionalno)

Rješenje. Od 898 treba oduzeti količnik brojeva 672 i 6, tj.

$$898 - 112 = 786.$$

786 treba podijeliti s 6, tj.

$$786 : 6 = 131.$$

Ivor je zamislio broj 131.

Rješenje Descartesovom metodom:

nepoznati broj je x

$$6 \cdot x + 672 : 6 = 898.$$

Primjer 3. 135 učenika drugih razreda krenulo je s 3 autobusa na izlet. Na prvom stajalištu iz prvog autobusa prijeđe u drugi 3 učenika, a u treći 9. Kad su nastavili vožnju u svakome je autobusu bio jednak broj učenika. Koliko je učenika bilo u svakom od autobusa na početku putovanja? (Rješenje: 57, 42, 36.)

Rješenje. Nakon prelaska u svakom je autobusu bilo $135 : 3 = 45$ učenika.

U drugi autobus su ušla 3 učenika, dakle, prije njihova dolaska bilo ih je $45 - 3 = 42$.

U treći autobus je ušlo 9 učenika, dakle, prije njihova dolaska bilo ih je $45 - 9 = 36$.

U prvome su na početku bila ta 3 i tih 9 učenika, tj. bilo ih je $45 + 3 + 9 = 57$.

Rješenje Descartesovom metodom:

x, y, z su brojevi učenika u prvom, drugom i trećem autobusu.

$$x + y + z = 135$$

$$x - 3 - 9 = y + 3 = z + 9$$

Primjer 4. Mario je prvi dan pročitao $\frac{1}{9}$ knjige, drugi dan $\frac{3}{4}$ nepročitanog dijela knjige, i za treći dan mu je ostalo 120 stranica. Koliko stranica ima knjiga?

Rješenje. 120 stranica je $\frac{1}{4}$ nepročitanog dijela knjige. Dakle, nepročitani dio knjige ima $4 \cdot 120 = 480$ stranica.

Nepročitani dio knjige je $\frac{8}{9}$ cijele knjige.

To znači da je $\frac{1}{9}$ knjige $480 : 8 = 60$ stranica,

a cijela knjiga ima $9 \cdot 60 = 540$ stranica.

(crtež)

Rješenje Descartesovom metodom:

x - broj stranica knjige

$$x = \frac{1}{9}x + \frac{3}{4}\left(\frac{8}{9}x\right) + 120$$

Kako osmisлити još ovakvih zadataka

1. tip Krećemo od nekog poznatog broja (to će biti rješenje) i radimo računske operacije s njim.

2. tip Zamislimo ukupan broj elemenata (pikule, učenici, sličice i sl.) uz uvjet da je djeljiv s onim brojem koliko imamo grupa (autobusi, broj djece). Brojevi elemenata koje premještamo iz grupe u grupu su proizvoljni, samo treba paziti da u nekom od premještanja ne dobijemo negativni broj.

3. tip Pri stvaranju ovog tipa zadatka, problem je u tome da se namjeste brojevi koji će pri svakom koraku dati prirodne brojeve kao rezultat.

Primjer 5. Mario je prvi dan pročitao $\frac{a_1}{b_1}$ knjige, drugi dan $\frac{a_2}{b_2}$ nepročitanog dijela knjige, i za treći dan mu je ostalo m stranica. Koliko stranica ima knjiga?

Označimo s x broj stranica.

Prvi dan je pročitao $\frac{a_1}{b_1}x$ stranica. Uvjet $\frac{a_1}{b_1}x \in \mathbf{N}$.

Prvi ostatak $ost_1 = x(1 - \frac{a_1}{b_1})$.

Drugi dan pročitao je $\frac{a_2}{b_2} \cdot x(1 - \frac{a_1}{b_1})$. Uvjet $\frac{a_2}{b_2}x(1 - \frac{a_1}{b_1}) \in \mathbf{N}$.

Drugi ostatak $ost_2 = x(1 - \frac{a_1}{b_1}) - \frac{a_2}{b_2} \cdot x(1 - \frac{a_1}{b_1}) = x(1 - \frac{a_1}{b_1})(1 - \frac{a_2}{b_2})$. I to je jednako m .

Dakle, imamo $x \frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{b_1 b_2} = m$ pa je

$$x = \frac{mb_1 b_2}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, \quad b_1 b_2 | x.$$

a_1, a_2, b_1, b_2 izaberemo proizvoljno (paziti da su $\frac{a_1}{b_1}$ i $\frac{a_2}{b_2}$ pravi razlomci), iz toga izbora slijedi izbor za m tako da x bude prirodan.

DIOFANTSKE JEDNADŽBE

Primjer 6. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve koji su za 10 veći od trostrukog zbroja svojih znamenaka. (6/2007. regionalno)

Rješenje. $10a + b = 10 + 3(a + b)$, tj. $7a = 10 + 2b$. Brojevi a i b su znamenke, pri čemu je $a \neq 0$.

To je diofantska jednadžba, ali se može riješiti i metodom razlikovanja slučajeva.

Pomoću diofantske:

$$\begin{aligned} 2b &= 7a - 10 \\ b &= \frac{7a - 10}{2} \\ b &= 3a - 5 + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{2} = t, \quad a = 2t, \quad b = 7t - 5, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

Uvjeti su da je $0 < a \leq 9$ i $0 \leq b \leq 9$, pa je

$$0 < 2t \leq 9, \text{ tj. } t \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$0 \leq 7t - 5 \leq 9 \text{ tj. } t \in \{1, 2\}$$

Zajednički t su 1 i 2, pa su traženi brojevi

$$\overline{ab} \in \{22, 49\}.$$

Metoda razlikovanja slučajeva - napisati sve mogućnosti za a i b (neelegantno jer ih ima 90)

Smanjiti broj mogućnosti: iz $7a = 10 + 2b$ slijedi da je a paran, tj. $a = 2, 4, 6, 8$. Za svaki od tih a traži se b .

METODA LAŽNE POSTAVKE

- staroegipatska matematika
- u zadatku se mora javiti proporcionalnost veličina

Primjer 7. Koji broj uvećan za svoju četvrtinu daje 40?

Rješenje. Pretpostavimo da je taj broj 8.

Uvećan za svoju četvrtinu iznosi $8 + 2 = 10$.

Taj je rezultat 4 puta manji od onoga u zadatku, dakle, traženi broj je $8 \cdot 4 = 32$.

Primjer 8. Glava ribe čini $\frac{1}{3}$ cijele ribe, rep čini $\frac{1}{4}$ ribe, dok tijelo ribe ima masu 30 dag. Kolika je masa cijele ribe?

METODA UZASTOPNIH PRIBLIŽAVANJA

Metoda se sastoji od niza pokušaja da se dođe do rješenja, a u svakome se pokušava ispraviti i smanjiti pogreška koja je nastala u prethodnom pokušaju.

Primjer 9. U jednoj auto-radionici u jednom mjesecu popravljena su 44 vozila i to motocikli i automobili. Na svim tim vozilima bilo je ukupno 144 kotača. Koliko je bilo motocikala, a koliko automobila? (4/1995. županijsko)

Rješenje.

broj motocikala	broj auta	broj kotača motocikala	broj kotača auta	ukupno kotača
10	34	20	136	156
20	24	40	96	136
12	32	24	128	152
14	30	28	120	148
16	28	32	112	144

Bilo je 16 motocikala i 28 automobila.