

Nejednakosti i primjene

Ivanka Bujan-Slamić

Prva sušačka hrvatska gimnazija u Rijeci
`ivanka.bujan-slamic@skole.hr`

31. kolovoza 2010.

"Naći dokaz koji nije očevidan, značajno je intelektualno dostignuće, ali je i za učenje i za temeljito shvaćanje takvog dokaza potreban izvjestan umni napor."

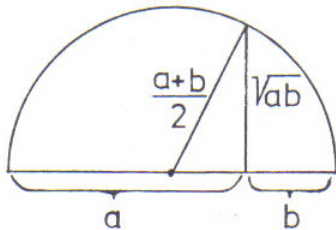
G.Polya

Motivacija



$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b), \quad a, b > 0$$

Motivacija



$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b), \quad a, b > 0$$

Definicija

Neka je $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dana n -torka pozitivnih brojeva.

Definiramo:

harmonijska sredina $H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

geometrijska sredina $G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

aritmetička sredina $A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

kvadratna sredina $K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$

Odnosi među sredinama

Teorem

Neka je a dana n -torka pozitivnih brojeva. Tada je

Odnosi među sredinama

Teorem

Neka je a dana n -torka pozitivnih brojeva. Tada je

$$\text{A-G} \quad A_n(a) \geq G_n(a)$$

Odnosi među sredinama

Teorem

Neka je a dana n -torka pozitivnih brojeva. Tada je

$$\text{A-G } A_n(a) \geq G_n(a)$$

$$\text{G-H } G_n(a) \geq H_n(a)$$

Odnosi među sredinama

Teorem

Neka je a dana n -torka pozitivnih brojeva. Tada je

$$\text{A-G } A_n(a) \geq G_n(a)$$

$$\text{G-H } G_n(a) \geq H_n(a)$$

$$\text{K-A } K_n(a) \geq A_n(a)$$

Odnosi među sredinama

Teorem

Neka je a dana n -torka pozitivnih brojeva. Tada je

$$\text{A-G } A_n(a) \geq G_n(a)$$

$$\text{G-H } G_n(a) \geq H_n(a)$$

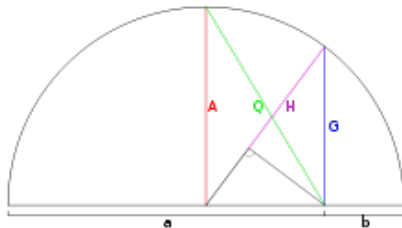
$$\text{K-A } K_n(a) \geq A_n(a)$$

Vrijedi:

$$\min\{a_1, \dots, a_n\} \leq H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a) \leq \max\{a_1, \dots, a_n\}$$

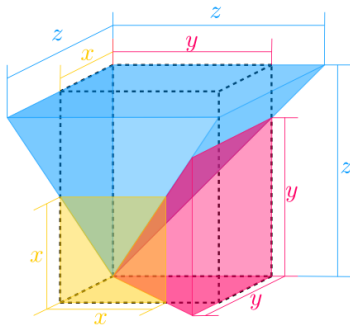
Odnosi među sredinama

$$H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a)$$



Odnosi među sredinama

$$G_n(a) \leq A_n(a)$$



$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} \geq xyz$$

Primjena

Primjer (Bernoullijeva nejednakost)

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad \alpha \geq 1, n \in \mathbb{N}$$



Slika: Jacob Bernoulli (1654.-1705.)

Primjena

Primjer (Bernoullijeva nejednakost)

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad \alpha \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Rješenje: Kako je $1 + \alpha \geq 0$, to je $1 + n\alpha \geq 0$.

Primjena

Primjer (Bernoullijeva nejednakost)

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad \alpha \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Rješenje: Kako je $1 + \alpha \geq 0$, to je $1 + n\alpha \geq 0$.

$$((1 + n\alpha) \cdot 1 \dots 1)^{\frac{1}{n}}$$

Primjena

Primjer (Bernoullijeva nejednakost)

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad \alpha \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Rješenje: Kako je $1 + \alpha \geq 0$, to je $1 + n\alpha \geq 0$.

$$((1 + n\alpha) \cdot 1 \dots 1)^{\frac{1}{n}} \stackrel{A-G}{\leq} \frac{1 + n\alpha + 1 + \dots + 1}{n} = 1 + \alpha, \quad n > 1$$

Primjena

Primjer (Bernoullijeva nejednakost)

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad \alpha \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

Rješenje: Kako je $1 + \alpha \geq 0$, to je $1 + n\alpha \geq 0$.

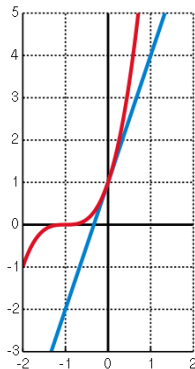
$$((1 + n\alpha) \cdot 1 \dots 1)^{\frac{1}{n}} \stackrel{A-G}{\leq} \frac{1 + n\alpha + 1 + \dots + 1}{n} = 1 + \alpha, \quad n > 1$$

$$\Rightarrow (1 + n\alpha) \leq (1 + \alpha)^n$$

Primjena

Primjer (Bernoullijeva nejednakost)

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \quad \alpha \geq 1, n \in \mathbb{N}$$



Primjena

Primjer

Dokažite nejednakost:

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Primjena

Primjer

Dokažite nejednakost:

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Rješenje:

$$\sqrt[n]{n!}$$

Primjena

Primjer

Dokažite nejednakost:

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Rješenje:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$$

Primjena

Primjer

Dokažite nejednakost:

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Rješenje:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \stackrel{A-G}{\leq}$$

Primjena

Primjer

Dokažite nejednakost:

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Rješenje:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \stackrel{\text{A-G}}{\leq} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n}$$

Primjena

Primjer

Dokažite nejednakost:

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Rješenje:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \stackrel{A-G}{\leq} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n}$$

Primjena

Primjer

Dokažite nejednakost:

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n!} &= \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \stackrel{A-G}{\leq} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} \\ &= \frac{n+1}{2}, n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$



Primjer

Dokažite da za svaka tri prirodna broja a, b, c vrijedi nejednakost

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Primjer

Dokažite da za svaka tri prirodna broja a, b, c vrijedi nejednakost

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Rješenje: Primjenjujemo G-H nejednakost:

$$G(\underbrace{a, \dots, a}_a, \underbrace{b, \dots, b}_b, \underbrace{c, \dots, c}_c) \geq H(\underbrace{a, \dots, a}_a, \underbrace{b, \dots, b}_b, \underbrace{c, \dots, c}_c)$$

Primjer

Dokažite da za svaka tri prirodna broja a, b, c vrijedi nejednakost

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Rješenje: Primjenjujemo G-H nejednakost:

$$G(\underbrace{a, \dots, a}_a, \underbrace{b, \dots, b}_b, \underbrace{c, \dots, c}_c) \geq H(\underbrace{a, \dots, a}_a, \underbrace{b, \dots, b}_b, \underbrace{c, \dots, c}_c)$$

$$\sqrt[a+b+c]{a^a \cdot b^b \cdot c^c} \geq \frac{a+b+c}{\underbrace{\frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a}}_a + \underbrace{\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}}_b + \underbrace{\frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{c}}_c}$$

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Primjer

Dokažite da za svaka tri prirodna broja a, b, c vrijedi nejednakost

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Rješenje: Primjenjujemo G-H nejednakost:

$$G(\underbrace{a, \dots, a}_a, \underbrace{b, \dots, b}_b, \underbrace{c, \dots, c}_c) \geq H(\underbrace{a, \dots, a}_a, \underbrace{b, \dots, b}_b, \underbrace{c, \dots, c}_c)$$

$$\sqrt[a+b+c]{a^a \cdot b^b \cdot c^c} \geq \frac{a+b+c}{\underbrace{\frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a}}_a + \underbrace{\frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}}_b + \underbrace{\frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{c}}_c}$$

$$a^{\frac{a}{a+b+c}} \cdot b^{\frac{b}{a+b+c}} \cdot c^{\frac{c}{a+b+c}} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$



Primjer

Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c takve da je $a + b + c = 1$ vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Primjer

Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c takve da je $a + b + c = 1$ vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Rješenje:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = \frac{a + a + b + c}{a} \cdot \frac{b + a + b + c}{b} \cdot \frac{c + a + b + c}{c}$$

Primjer

Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c takve da je $a + b + c = 1$ vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) &= \frac{a + a + b + c}{a} \cdot \frac{b + a + b + c}{b} \cdot \frac{c + a + b + c}{c} \\ &\stackrel{A-G}{\geq} \frac{1}{abc} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{a^2bc} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{ab^2c} \cdot 4 \sqrt[4]{abc^2} \end{aligned}$$

Primjer

Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c takve da je $a + b + c = 1$ vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) &= \frac{a + a + b + c}{a} \cdot \frac{b + a + b + c}{b} \cdot \frac{c + a + b + c}{c} \\ &\stackrel{A-G}{\geq} \frac{1}{abc} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{a^2bc} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{ab^2c} \cdot 4 \sqrt[4]{abc^2} \\ &= \frac{64}{abc} \sqrt[4]{a^4b^4c^4} = 64 \end{aligned}$$

Primjer

Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c takve da je $a + b + c = 1$ vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) &= \frac{a + a + b + c}{a} \cdot \frac{b + a + b + c}{b} \cdot \frac{c + a + b + c}{c} \\ &\stackrel{A-G}{\geq} \frac{1}{abc} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{a^2bc} \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{ab^2c} \cdot 4 \sqrt[4]{abc^2} \\ &= \frac{64}{abc} \sqrt[4]{a^4b^4c^4} = 64 \end{aligned}$$



Primjer (Državno natjecanje 2008./2009.)

Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > \dots > x_n$. Dokažite da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

Primjer (Državno natjecanje 2008./2009.)

Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > \dots > x_n$. Dokažite da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje:

$$a_1 = x_0 - x_1, \quad a_2 = x_1 - x_2, \quad a_n = x_{n-1} - x_n$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

Primjer (Državno natjecanje 2008./2009.)

Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > \dots > x_n$. Dokažite da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje:

$$a_1 = x_0 - x_1, \quad a_2 = x_1 - x_2, \quad a_n = x_{n-1} - x_n$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \stackrel{A-H}{\geq}$$

Primjer (Državno natjecanje 2008./2009.)

Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > \dots > x_n$. Dokažite da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje:

$$a_1 = x_0 - x_1, \quad a_2 = x_1 - x_2, \quad a_n = x_{n-1} - x_n$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \stackrel{A-H}{\geq} \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$\frac{1}{x_0 - x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq \frac{n^2}{x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_n}$$

$$= \frac{n^2}{x_0 - x_n}$$

$$x_0 - x_n + \frac{n^2}{x_0 - x_n} \geq 2n \Leftrightarrow \left(\sqrt{x_0 - x_n} - \frac{n}{\sqrt{x_0 - x_n}} \right)^2 \geq 0.$$

$$\frac{1}{x_0 - x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq \frac{n^2}{x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_n}$$

$$= \frac{n^2}{x_0 - x_n}$$

$$x_0 - x_n + \frac{n^2}{x_0 - x_n} \geq 2n \Leftrightarrow \left(\sqrt{x_0 - x_n} - \frac{n}{\sqrt{x_0 - x_n}} \right)^2 \geq 0.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n,$$

tj.

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \dots = x_{n-1} - x_n.$$

$$\frac{1}{x_0 - x_1} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq \frac{n^2}{x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_n}$$

$$= \frac{n^2}{x_0 - x_n}$$

$$x_0 - x_n + \frac{n^2}{x_0 - x_n} \geq 2n \Leftrightarrow \left(\sqrt{x_0 - x_n} - \frac{n}{\sqrt{x_0 - x_n}} \right)^2 \geq 0.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n,$$

tj.

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \dots = x_{n-1} - x_n.$$



Teorem (Cauchyjeva nejednakost^a)

^aPonekad je nalazimo i pod nazivom Cauchy-Schwartzova ili nejednakost Cauchy-Shwartz-Bunjakowskog

Ako su dane dvije n –torke realnih brojeva a i b , tada vrijedi

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

s jednakošću ako i samo ako je

$$\left| \frac{a_1}{b_1} \right| = \left| \frac{a_2}{b_2} \right| = \dots = \left| \frac{a_n}{b_n} \right|.$$



Geometrijski dokaz Cauchyjeve nejednakosti

Za vektore

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

Kako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$,

Geometrijski dokaz Cauchyjeve nejednakosti

Za vektore

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

Kako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$,

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} \overset{\left\{ \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 1 \right\}}{\leq} |\vec{a}| |\vec{b}|$$

Geometrijski dokaz Cauchyjeve nejednakosti

Za vektore

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

Kako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{\left\{ \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 1 \right\}}{\leq} |\vec{a}| |\vec{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

Direktne posljedice Cauchyjeve nejednakosti

(i) **A-K nejednakost:** Neka je $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Tada je iz

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}$$

Direktne posljedice Cauchyjeve nejednakosti

(i) **A-K nejednakost:** Neka je $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Tada je iz

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}$$

(ii) **A-H nejednakost:** Supstitucijom

$a_k^2 = x_k^2 > 0$, $b_k^2 = \frac{1}{x_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ u Cauchyjevu nejednakost dobije se

$$n^2 = \left(\sqrt{x_1} \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \sqrt{x_n} \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^2$$

\leq

Direktne posljedice Cauchyjeve nejednakosti

(i) **A-K nejednakost:** Neka je $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Tada je iz

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}$$

(ii) **A-H nejednakost:** Supstitucijom

$a_k^2 = x_k^2 > 0$, $b_k^2 = \frac{1}{x_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ u Cauchyjevu nejednakost dobije se

$$\begin{aligned} n^2 &= \left(\sqrt{x_1} \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \sqrt{x_n} \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^2 \\ &\leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right), \end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

što predstavlja H-A nejednakost.

(iii) **Nejednakost Minkowskog:** Za proizvoljne n -torke realnih brojeva a i b vrijedi nejednakost

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$



Primjer

Dokazati da za svako $x, y, z > 0$ vrijedi nejednakost

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

Rješenje: Uvrštavanjem u Cauchyjevu nejednakost

$a_1 = \sqrt{x}, a_2 = \sqrt{y}, a_3 = \sqrt{z}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}, b_3 = \frac{1}{\sqrt{z}}$ dobivamo

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) =$$

Primjer

Dokazati da za svako $x, y, z > 0$ vrijedi nejednakost

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

Rješenje: Uvrštavanjem u Cauchyjevu nejednakost

$a_1 = \sqrt{x}, a_2 = \sqrt{y}, a_3 = \sqrt{z}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}, b_3 = \frac{1}{\sqrt{z}}$ dobivamo

$$\begin{aligned} & (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \\ & = \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \right) \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \right) \\ & \geq \left(\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \end{aligned}$$

Primjer

Dokazati da za svako $x, y, z > 0$ vrijedi nejednakost

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

Rješenje: Uvrštavanjem u Cauchyjevu nejednakost

$a_1 = \sqrt{x}$, $a_2 = \sqrt{y}$, $a_3 = \sqrt{z}$, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{z}}$ dobivamo

$$\begin{aligned} & (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \\ & = \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \right) \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \right) \\ & \geq \left(\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 = 9 \end{aligned}$$

Primjer

Dokazati da za svako $x, y, z > 0$ vrijedi nejednakost

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

Rješenje: Uvrštavanjem u Cauchyjevu nejednakost

$a_1 = \sqrt{x}, a_2 = \sqrt{y}, a_3 = \sqrt{z}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, b_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}, b_3 = \frac{1}{\sqrt{z}}$ dobivamo

$$\begin{aligned} & (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \\ & = \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \right) \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \right) \\ & \geq \left(\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 = 9 \end{aligned}$$

Primjer

Neka je $a + b + c = 1$. Dokazati da je $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Rješenje: Iz Cauchyjeve nejednakosti slijedi

$$1^2 = (a + b + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1 + 1 + 1),$$

odakle slijedi $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Primjer

Neka je $a + b + c = 1$. Dokazati da je $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Rješenje: Iz Cauchyjeve nejednakosti slijedi

$$1^2 = (a + b + c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1 + 1 + 1),$$

odakle slijedi $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.



Primjer

Dokazati da za svaki trokut vrijedi nejednakost

$$at_a + bt_b + ct_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2)$$

s jednakošću ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Rješenje: Uvrstimo li u Cauchyjevu nejednakost da je

$$a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, b_1 = t_a, b_2 = t_b, b_3 = t_c$$

$$(at_a + bt_b + ct_c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)$$

$$at_a + bt_b + ct_c \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}$$

Neka su t'_a, t'_b, t'_c udaljenosti težišta T i redom vrhova A, B, C.

Tada je

$$\begin{aligned}(1) \quad t_a &= \frac{3}{2}t'_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \\ t_b &= \frac{3}{2}t'_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \\ t_c &= \frac{3}{2}t'_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$(2) \quad t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$at_a + bt_b + ct_c \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Tada je

$$\begin{aligned}(1) \quad t_a &= \frac{3}{2}t'_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \\ t_b &= \frac{3}{2}t'_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \\ t_c &= \frac{3}{2}t'_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$(2) \quad t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$\begin{aligned}at_a + bt_b + ct_c &\leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}(1) \quad t_a &= \frac{3}{2}t'_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \\ t_b &= \frac{3}{2}t'_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \\ t_c &= \frac{3}{2}t'_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$(2) \quad t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$\begin{aligned}at_a + bt_b + ct_c &\leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\end{aligned}$$



- Hanjš Ž., Krnić M., Matematička natjecanja 2008./2009.
- Mitrinović, Pečarić, Fink, Classical and new inequalities in analysis
- Pečarić J., Nejednakosti
- Radić M., Brojevi i nejednakosti

...Kad bi moć matematičkog zaključivanja čovjeka bila neograničena, onda bi za njega svi matematički teoremi bili očiti, i stoga isto tako malo zanimljivi kao to da je dva i dva jednako četiri. Da smo "matematički bogovi", ne bi nam matematika značila ništa. Njezinu ljepotu i vrijednost - za nas, kao ljudska bića - zahvaljujemo tome što se, zbog naše ograničenosti, moramo potruditi da bismo doprli do njezinih istina.



...Kad bi moć matematičkog zaključivanja čovjeka bila neograničena, onda bi za njega svi matematički teoremi bili očiti, i stoga isto tako malo zanimljivi kao to da je dva i dva jednako četiri. Da smo "matematički bogovi", ne bi nam matematika značila ništa. Njezinu ljepotu i vrijednost - za nas, kao ljudska bića - zahvaljujemo tome što se, zbog naše ograničenosti, moramo potruditi da bismo doprli do njezinih istina.

V. Devidé (1925.-2010.)

Hvala vam na pažnji!