

# Približno računanje drugog korijena

Ivanka Bujan-Slamić

Prva sušačka hrvatska gimnazija u Rijeci  
`ivanka.bujan-slamic@skole.hr`

30. kolovoza 2010.

# Motivacija

Zašto bi uopće bilo potrebno u doba razvijene tehnologije prisjećati se kompliciranih algoritama za nešto što se može izračunati pomoću jedne naredbe na računalu?

# Motivacija

Zašto bi uopće bilo potrebno u doba razvijene tehnologije prisjećati se kompliciranih algoritama za nešto što se može izračunati pomoću jedne naredbe na računalu?

Zbog toga što nas, u trenutku kada te nesavršene tehnologije zakažu, "spasiti" može jedino sposobnost vlastitog logičkog razmišljanja.



# Motivacija



"Broj je bit svega" ("All is number") smatrali su Pitagorejci.

# Motivacija

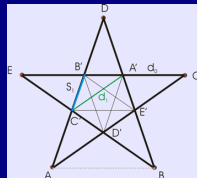


"Broj je bit svega" ("All is number") smatrali su Pitagorejci.

O filozofskom aspektu ove rečenice, govorio je i Aristotel u svojoj "Metafizici", no pitanje je što su sve njima bili brojevi, tj. kakve su brojeve oni poznavali?

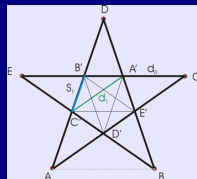
# Motivacija

- Iako su Pitagorejci vjerovali da se svi brojevi mogu izraziti kao omjer dvaju prirodnih brojeva, upravo je Pitagorin učenik **Hipposus** (5.st.p.n.e.) prema nekim izvorima dokazao postojanje iracionalnog broja koristeći geometrijski argument



# Motivacija

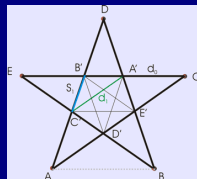
- Iako su Pitagorejci vjerovali da se svi brojevi mogu izraziti kao omjer dvaju prirodnih brojeva, upravo je Pitagorin učenik **Hippasus** (5.st.p.n.e.) prema nekim izvorima dokazao postojanje iracionalnog broja koristeći geometrijski argument



- Teodor iz Kirene** (400.g.p.n.e.) dokazao iracionalnost  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{17}$  (prema Platonu koji mu je bio učenik)

# Motivacija

- Iako su Pitagorejci vjerovali da se svi brojevi mogu izraziti kao omjer dvaju prirodnih brojeva, upravo je Pitagorin učenik **Hippasus** (5.st.p.n.e.) prema nekim izvorima dokazao postojanje iracionalnog broja koristeći geometrijski argument

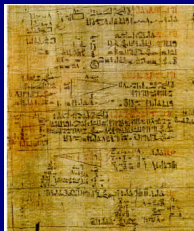


- Teodor iz Kirene** (400.g.p.n.e.) dokazao iracionalnost  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{17}$  (prema Platonu koji mu je bio učenik)
- Jednostavan dokaz iracionalnosti  $\sqrt{2}$  korištenjem metode "reductio ad absurdum" dao je **Aristotel** (4.st.p.n.e.)



# Motivacija - kvadratni korijen

No simbol  $\sqrt{\quad}$  javlja se i mnogo ranije, već kod starih Egipćana (1650 g. p.n.e.):



i u Babilonu (1600-1800 p.n.e.)



# Kvadratni korijen

## Definicija

*Kvadratni (drugi) korijen pozitivnog broja  $a$  je pozitivni broj  $\sqrt{a}$  za koji vrijedi  $(\sqrt{a})^2 = a$ . Također je  $\sqrt{0} = 0$ .*

Za bilo koji realni broj  $a$  vrijedi

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

a za sve pozitivne brojeve  $a$  i  $b$  vrijedi:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

# Kvadratni korijen

## Definicija

*Kvadratni (drugi) korijen pozitivnog broja  $a$  je pozitivni broj  $\sqrt{a}$  za koji vrijedi  $(\sqrt{a})^2 = a$ . Također je  $\sqrt{0} = 0$ .*

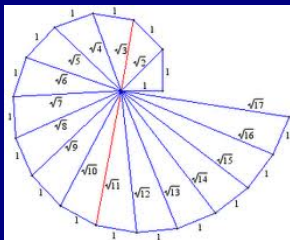
Za bilo koji realni broj  $a$  vrijedi

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

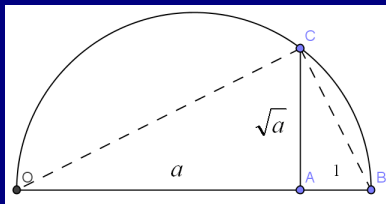
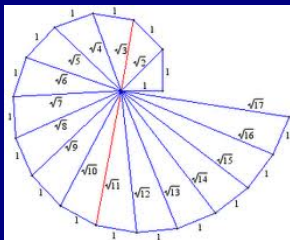
a za sve pozitivne brojeve  $a$  i  $b$  vrijedi:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

# Konstrukcija drugog korijena



# Konstrukcija drugog korijena



# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Neka je  $a > 1$  i neka je  $b$  najveći cijeli broj za koji vrijedi

$$b < \sqrt{a} < b + 1,$$

gdje je  $b \geq 1$ .

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Neka je  $a > 1$  i neka je  $b$  najveći cijeli broj za koji vrijedi

$$b < \sqrt{a} < b + 1,$$

gdje je  $b \geq 1$ . Tada je

$$b^2 < a < (b + 1)^2$$

pa možemo pisati

$$a = b^2 + r,$$

gdje je

$$0 < r < 2b + 1.$$



# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Nadalje, iz  $b < \sqrt{a} < b + 1$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = b + x,$$

( $x$  nepoznati decimalni dio korijena  $\sqrt{a}$ :  $0 < x < 1$ , koji je potrebno odrediti).

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Nadalje, iz  $b < \sqrt{a} < b + 1$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = b + x,$$

( $x$  nepoznati decimalni dio korijena  $\sqrt{a}$ :  $0 < x < 1$ , koji je potrebno odrediti). Dakle,

$$a = b^2 + r$$

$$\sqrt{a} = b + x$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Nadalje, iz  $b < \sqrt{a} < b + 1$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = b + x,$$

( $x$  nepoznati decimalni dio korijena  $\sqrt{a}$ :  $0 < x < 1$ , koji je potrebno odrediti). Dakle,

$$\begin{aligned} a &= b^2 + r \\ \sqrt{a} &= b + x \end{aligned} \Rightarrow (b + x)^2 = b^2 + r$$

odakle dobijemo

$$x = \frac{r}{2b + x}.$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Nadalje, iz  $b < \sqrt{a} < b + 1$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = b + x,$$

( $x$  nepoznati decimalni dio korijena  $\sqrt{a}$ :  $0 < x < 1$ , koji je potrebno odrediti). Dakle,

$$\begin{aligned} a &= b^2 + r \\ \sqrt{a} &= b + x \end{aligned} \Rightarrow (b + x)^2 = b^2 + r$$

odakle dobijemo

$$x = \frac{r}{2b + x}.$$

Budući da je  $x > 0$  vrijedi

$$x < \frac{r}{2b}$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Nadalje, iz  $b < \sqrt{a} < b + 1$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = b + x,$$

( $x$  nepoznati decimalni dio korijena  $\sqrt{a}$ :  $0 < x < 1$ , koji je potrebno odrediti). Dakle,

$$\begin{aligned} a &= b^2 + r \\ \sqrt{a} &= b + x \Rightarrow (b + x)^2 = b^2 + r \end{aligned}$$

odakle dobijemo

$$x = \frac{r}{2b + x}.$$

← sada tu nejednakost primijenimo ovdje

Budući da je  $x > 0$  vrijedi

$$x < \frac{r}{2b}$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Nadalje, iz  $b < \sqrt{a} < b + 1$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = b + x,$$

( $x$  nepoznati decimalni dio korijena  $\sqrt{a}$ :  $0 < x < 1$ , koji je potrebno odrediti). Dakle,

$$\begin{aligned} a &= b^2 + r \\ \sqrt{a} &= b + x \Rightarrow (b + x)^2 = b^2 + r \end{aligned}$$

odakle dobijemo

$$x = \frac{r}{2b + x}. \leftarrow \text{sada tu nejednakost primijenimo ovdje}$$

Budući da je  $x > 0$  vrijedi

$$\Rightarrow x > \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}}.$$

Dakle,

$$\frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < x < \frac{r}{2b}$$

Dakle,

$$\frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < x < \frac{r}{2b} + b$$

$$\Rightarrow b + \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < b + x < b + \frac{r}{2b}$$



Dakle,

$$\frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < x < \frac{r}{2b} + b$$

$$\Rightarrow b + \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < b + x < b + \frac{r}{2b}$$

$$\stackrel{(\sqrt{a}=b+x)}{\Rightarrow} b + \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < \sqrt{a} < b + \frac{r}{2b}.$$

Ova nejednakost daje dvije približne vrijednosti  $\sqrt{a}$ : jednu veću od prave vrijednosti toga korijena, a drugu manju od te vrijednosti. Uspoređivanjem obje približne vrijednosti može se ocijeniti koliku točnost one daju.

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (Aproksimacija  $\sqrt{174}$ )

*Nađimo najprije  $b$  i  $r$ :*

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (Aproksimacija  $\sqrt{174}$ )

*Nađimo najprije  $b$  i  $r$ :*

$$a = 174 = 13^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad b = 13, r = 5.$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (Aproksimacija  $\sqrt{174}$ )

*Nađimo najprije  $b$  i  $r$ :*

$$a = 174 = 13^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad b = 13, r = 5.$$

*Uvrštavanjem u  $b + \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < \sqrt{a} < b + \frac{r}{2b}$*

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (Aproksimacija  $\sqrt{174}$ )

*Nađimo najprije  $b$  i  $r$ :*

$$a = 174 = 13^2 + 5 \Rightarrow b = 13, r = 5.$$

*Uvrštavanjem u  $b + \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < \sqrt{a} < b + \frac{r}{2b}$  dobijemo*

$$13 + \frac{5}{2 \cdot 13 + \frac{5}{2 \cdot 13}} < \sqrt{174} < 13 + \frac{5}{2 \cdot 13}$$

*odnosno,*

$$13.19089... < \sqrt{174} < 13.19230...$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (Aproksimacija  $\sqrt{174}$ )

*Nađimo najprije  $b$  i  $r$ :*

$$a = 174 = 13^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad b = 13, r = 5.$$

*Uvrštavanjem u  $b + \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < \sqrt{a} < b + \frac{r}{2b}$  dobijemo*

$$13 + \frac{5}{2 \cdot 13 + \frac{5}{2 \cdot 13}} < \sqrt{174} < 13 + \frac{5}{2 \cdot 13}$$

*odnosno,*

$$13.19089... < \sqrt{174} < 13.19230...$$

$$\Rightarrow \sqrt{174} \approx 13.19$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (Aproksimacija  $\sqrt{174}$ )

*Nađimo najprije  $b$  i  $r$ :*

$$a = 174 = 13^2 + 5 \Rightarrow b = 13, r = 5.$$

*Uvrštavanjem u  $b + \frac{r}{2b + \frac{r}{2b}} < \sqrt{a} < b + \frac{r}{2b}$  dobijemo*

$$13 + \frac{5}{2 \cdot 13 + \frac{5}{2 \cdot 13}} < \sqrt{174} < 13 + \frac{5}{2 \cdot 13}$$

*odnosno,*

$$13.19089... < \sqrt{174} < 13.19230...$$

$\Rightarrow \sqrt{174} \approx 13.19$  i greška aproksimacije je manja od  $\frac{1}{2 \cdot 10^2}$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

**Problem:** nepovoljni rezultati u određenim primjerima (točnost se povećava kada  $r$  raste a  $b$  pada).



# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

**Problem:** nepovoljni rezultati u određenim primjerima (točnost se povećava kada  $r$  raste a  $b$  pada).

Npr.  $\sqrt{3} = 1^2 + 2$ , pa dobijemo

$$1.66 \dots < \sqrt{3} < 2,$$

odnosno vrlo nepovoljan rezultat.

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

**Problem:** nepovoljni rezultati u određenim primjerima (točnost se povećava kada  $r$  raste a  $b$  pada).

Npr.  $\sqrt{3} = 1^2 + 2$ , pa dobijemo

$$1.66 \dots < \sqrt{3} < 2,$$

odnosno vrlo nepovoljan rezultat.

Kako "poboljšati" aproksimaciju?

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primijetimo da vrijedi

$$x > \frac{r}{2b+1}$$

jer je  $x < 1$ .

Sada na sličan način kao prije dobijemo:

$$b + \frac{r}{2b+1} < \sqrt{a} < b + \frac{r}{2b}.$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primijetimo da vrijedi

$$x > \frac{r}{2b+1}$$

jer je  $x < 1$ .

Sada na sličan način kao prije dobijemo:

$$b + \frac{r}{2b+1} < \sqrt{a} < b + \frac{r}{2b}.$$

Npr. za  $\sqrt{5} = 2^2 + 1$  dobijemo

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,25.$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

$$\sqrt{174} = 13.19$$

--

74

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

$$\sqrt{174} = 13.19$$

--

74

: 23 · 3

69

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

$$\sqrt{174} = 13.19$$

$$\begin{array}{r} \text{--} \text{--} \\ 74 \qquad \qquad : \quad 23 \cdot 3 \\ 69 \\ \text{--} \text{--} \\ 500 \end{array}$$



# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

$$\sqrt{174} = 13.19$$

$$\begin{array}{r} \text{--} \text{--} \\ 74 \qquad \qquad : \quad 23 \cdot 3 \\ 69 \\ \text{--} \text{--} \\ 500 \qquad \qquad : \quad 261 \cdot 1 \\ 261 \end{array}$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

$$\sqrt{174} = 13.19$$

$$\begin{array}{r} \text{-- --} \\ 74 \qquad \qquad : \quad 23 \cdot 3 \\ 69 \\ \text{-- --} \\ 500 \qquad \qquad : \quad 261 \cdot 1 \\ 261 \\ \text{-- -- --} \\ 23900 \end{array}$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

$$\sqrt{174} = 13.19$$

$$\begin{array}{r} \text{-- --} \\ 74 \qquad \qquad : \quad 23 \cdot 3 \\ 69 \\ \text{-- --} \\ 500 \qquad \qquad : \quad 261 \cdot 1 \\ 261 \\ \text{-- -- --} \\ 23900 \qquad \qquad : \quad 2629 \cdot 9 \\ 23661 \end{array}$$

# Algoritam za aproksimaciju kvadratnog korijena

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

$$\sqrt{174} = 13.19$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} - - \\ 74 \\ 69 \\ - - \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} : \quad 23 \cdot 3 \\ \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} - - \\ 500 \\ 261 \\ - - \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} : \quad 261 \cdot 1 \\ \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} - - - \\ 23900 \\ 23661 \\ - - - - - \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} : \quad 2629 \cdot 9 \\ \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} - - - - - \\ 239 \end{array} \end{array}$$

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

*Ako se dobiveni rezultat shvaća kao cijeli broj  $b = 1319$ , onda je  $r = 239$ , pa je*

Primjer (aproksimacija  $\sqrt{174}$  s većom preciznošću)

Ako se dobiveni rezultat shvaća kao cijeli broj  $b = 1319$ , onda je  $r = 239$ , pa je

$$\frac{r}{2b} = 239 : 2638 = 0.09059$$

$$\Rightarrow \sqrt{174} \approx 13.19091$$

s greškom manjom od  $\frac{1}{2 \cdot 10^5}$

# Metoda verižnog razlomka

Verižni razlomak realnog broja  $\alpha_0$  definira se na sljedeći način.

# Metoda verižnog razlomka

Verižni razlomak realnog broja  $\alpha_0$  definira se na sljedeći način.  
Za  $i = 0, 1, 2, \dots$  neka je

$$a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor, \quad \alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}.$$

Ako je  $a_n = \alpha_n$  za neki  $n$ , onda se postupak završava.



# Metoda verižnog razlomka

**Verižni razlomak** realnog broja  $\alpha_0$  definira se na sljedeći način.  
Za  $i = 0, 1, 2, \dots$  neka je

$$a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor, \quad \alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}.$$

Ako je  $a_n = \alpha_n$  za neki  $n$ , onda se postupak završava.

Može se to pokazati da će se to dogoditi ako i samo ako je  $\alpha_0$  racionalan broj. Pišemo

$$\alpha_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

$$\alpha_0 = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

U slučaju kad je  $\alpha_0 = \sqrt{n}$ , gdje je  $n$  prirodan broj koji nije potpun kvadrat, njegov razvoj u verižni razlomak je periodičan. Preciznije,

$$\sqrt{n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, 2a_0].$$

U slučaju kad je  $\alpha_0 = \sqrt{n}$ , gdje je  $n$  prirodan broj koji nije potpun kvadrat, njegov razvoj u verižni razlomak je periodičan. Preciznije,

$$\sqrt{n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, 2a_0].$$

## Primjer

U slučaju kad je  $\alpha_0 = \sqrt{n}$ , gdje je  $n$  prirodan broj koji nije potpun kvadrat, njegov razvoj u verižni razlomak je periodičan. Preciznije,

$$\sqrt{n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, 2a_0].$$

### Primjer

- $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = [1; 2, 2, 2, \dots]$

U slučaju kad je  $\alpha_0 = \sqrt{n}$ , gdje je  $n$  prirodan broj koji nije potpun kvadrat, njegov razvoj u verižni razlomak je periodičan. Preciznije,

$$\sqrt{n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, 2a_0].$$

### Primjer

- $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = [1; 2, 2, 2, \dots]$
- $\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \dots}}}} = [3; 3, 6, 3, 6, \dots]$

U slučaju kad je  $\alpha_0 = \sqrt{n}$ , gdje je  $n$  prirodan broj koji nije potpun kvadrat, njegov razvoj u verižni razlomak je periodičan. Preciznije,

$$\sqrt{n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, 2a_0].$$

### Primjer

- $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = [1; 2, 2, 2, \dots]$
- $\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \dots}}}} = [3; 3, 6, 3, 6, \dots]$
- $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$

U slučaju kad je  $\alpha_0 = \sqrt{n}$ , gdje je  $n$  prirodan broj koji nije potpun kvadrat, njegov razvoj u verižni razlomak je periodičan. Preciznije,

$$\sqrt{n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, 2a_0].$$

### Primjer

- $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = [1; 2, 2, 2, \dots]$
- $\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \dots}}}} = [3; 3, 6, 3, 6, \dots]$
- $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$
- $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, 4, \dots]$

## Literatura:

David Wells, Rječnik zanimljivih i neobičnih brojeva

Vladimir Devidé, Matematika kroz kulture i epohe

Vladimir Devidé, Matematička čitanka

Poučak, časopis za metodiku i nastavu matematike, br.17

Mirko Radić: Brojevi i nejednakosti



*Na velike se vrhunce koji put može uspeti s različitih padina planine, no one koji stignu na vrh obasjava isto Sunce.*

V.Devidé



Slika: V.Devidé(1925.-2010.) kao gost predavač u PSHG na znanstvenom skupu "Matematika - jučer, danas, sutra" 2000.g.

Hvala vam na pažnji!