ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

24. siječnja 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Rastavite na faktore izraz

$$a^5 + b^5 - ab(a^3 + b^3).$$

Rješenje. Zapišimo izraz na drugi način,

$$a^5 + b^5 - ab(a^3 + b^3) = a^5 + b^5 - a^4 b - ab^4,$$

grupirajmo članove i izlučimo zajednički faktor

$$a^4(a-b) - b^4(a-b) = (a-b)\left(a^4 - b^4\right). \qquad \text{(2 boda)}$$

Daljnjim faktoriziranjem slijedi

$$= (a-b)\left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2\right) = (a-b)^2(a+b)\left(a^2 + b^2\right). \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-1.2. Izračunajte:

$$\sqrt{\frac{145.5^2 - 96.5^2}{193.5^2 - 31.5^2}}.$$

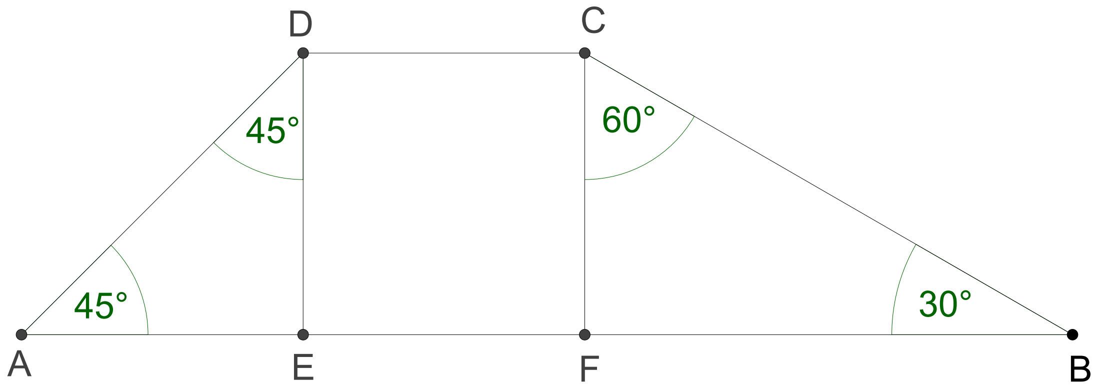
Rješenje.

$$\sqrt{\frac{145.5^2 - 96.5^2}{193.5^2 - 31.5^2}} = \sqrt{\frac{(145.5 + 96.5)(145.5 - 96.5)}{(193.5 + 31.5)(193.5 - 31.5)}} = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \sqrt{\frac{242 \cdot 49}{225 \cdot 162}} = \sqrt{\frac{121 \cdot 49}{225 \cdot 81}} = \frac{77}{135}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-1.3. Jedan krak trapeza duljine je 16 cm i zatvara s osnovicom kut od 30°. Drugi krak s osnovicom zatvara kut od 45°. Izračunajte površinu trapeza ako manja osnovica ima duljinu 2 cm.

Rješenje. potpuna skica (sa svim trokutima) (1 bod)



$$v = 8 \text{ cm} \tag{1 bod}$$

$$a = 8\sqrt{3} + 2 + 8 \text{ cm} \tag{1 bod}$$

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = 32\sqrt{3} + 48 \text{ cm}^2 \tag{1 bod}$$

Zadatak B-1.4. Stočar je za svoje 24 krave osigurao hranu za 18 tjedana. Koliko krava bi morao prodati nakon 8 tjedana da bi imao hrane za još 12 tjedana?

Prvo rješenje.

Označimo s x broj krava koje stočar treba prodati.

Ukupna količina hrane iznosi $24 \cdot 18$ tjedno potrebne količine i ona se ne mijenja, već samo preraspodjeljuje na količinu potrebnu za 24 krave 8 tjedana i $24 - x$ krave 12 tjedana.

Tada je

$$24 \cdot 18 = 24 \cdot 8 + (24 - x) \cdot 12. \tag{2 boda}$$

Odatle slijedi $x = 4$. Stočar nakon 8 tjedana treba prodati 4 krave. (2 boda)

Drugo rješenje. Označimo sa x broj krava koje stočar mora prodati.

$$\uparrow \begin{array}{cc} 24 \text{ krave} & 18 - 8 \text{ tjedana} \\ 24 - x \text{ krave} & 12 \text{ tjedana} \end{array} \downarrow \tag{1 bod}$$

S obzirom da su broj krava i broj tjedana obrnuto proporcionalne veličine, pišemo razmjer

$$(24 - x) : 24 = 10 : 12 \quad \Rightarrow \quad (24 - x) \cdot 12 = 10 \cdot 24 \; / : 12 \tag{1 bod}$$

te slijedi $24-x=20$, tj. $x=4$. (1 bod)

Dakle, stočar bi nakon 8 tjedana trebao prodati 4 krave da bi mu ostatak hrane trajao još 12 tjedana. (1 bod)

Napomena: Ako je na početku navedeno što je x te je x izračunat, ali nije riječima napisan odgovor, ne treba oduzeti bod.

Zadatak B-1.5. Dokažite da je zbroj bilo koje tri potencije broja 2, kojima su eksponenti uzastopni neparni brojevi, djeljiv s 21.

Rješenje.

$$\begin{aligned} 2^{2n-1}+2^{2n+1}+2^{2n+3} &= && \text{(1 bod)} \\ &= 2^{2n-1}\left(1+2^2+2^4\right) = && \text{(2 boda)} \\ &= 2^{2n-1}\cdot 21. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Zadatak B-1.6. Ako je $\dfrac{z}{x+y}=2$ i $\dfrac{y}{x+z}=3$, kolika je vrijednost od $\dfrac{z}{y+z}$?

Rješenje. Iz pretpostavki dobivamo

$$\begin{aligned} z &= 2x+2y, \\ y &= 3x+3z. \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Izrazimo li y i z preko x dobivamo da je $y=-\frac{9}{5}x$, $z=-\frac{8}{5}x$. (4 boda)

Uvrstimo li to u izraz $\dfrac{z}{y+z}$, slijedi da je

$$\frac{z}{y+z}=\frac{-\frac{8}{5}x}{-\frac{9}{5}x-\frac{8}{5}x}=\frac{8}{17}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Primjetimo da ne može biti $x=0$ jer bi inače uvjeti zadatka glasili $\dfrac{z}{y}=2$ i $\dfrac{y}{z}=3$ što ne može vrijediti. Dakle, gornji račun ima smisla. (2 boda)

Zadatak B-1.7. Riješite jednadžbu:

$$\frac{2x+1}{6x^2-3x}-\frac{2x-1}{14x^2+7x}=\frac{8}{12x^2-3}.$$

Rješenje. Najprije primjetimo da mora biti $x \neq 0, \pm\frac{1}{2}$. (2 boda)

$$\frac{2x+1}{3x(2x-1)} - \frac{2x-1}{7x(2x+1)} = \frac{8}{3(2x-1)(2x+1)} \ \Big/ \cdot 21x(2x-1)(2x+1) \qquad \text{(2 boda)}$$

$$(2x+1)\cdot 7\cdot(2x+1) - 3(2x-1)^2 = 8\cdot 7x \qquad \text{(1 bod)}$$

$$7(4x^2+4x+1) - 3(4x^2-4x+1) - 56x = 0$$

$$28x^2+28x+7-12x^2+12x-3-56x = 0$$

$$16x^2-16x+4 = 0$$

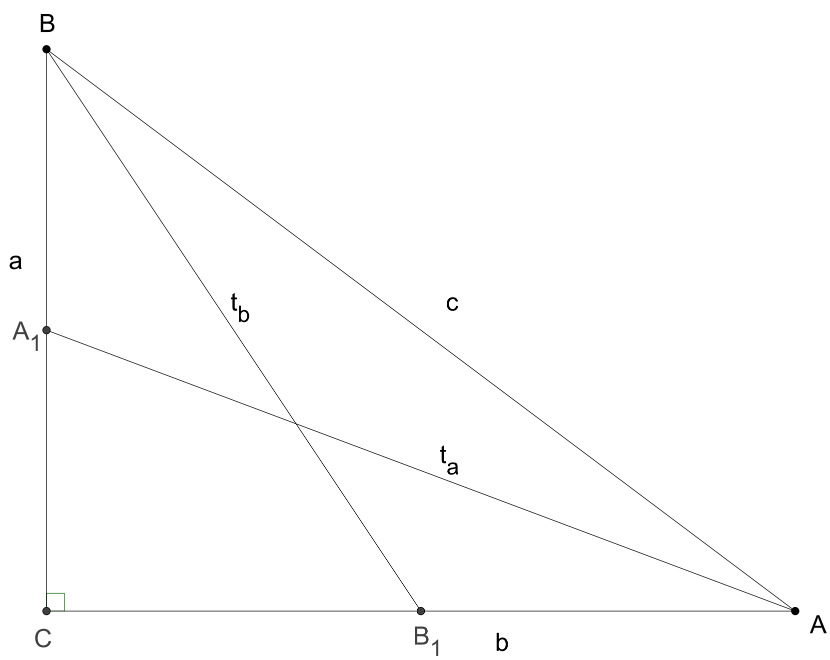
$$4x^2-4x+1 = 0 \qquad \text{(2 boda)}$$

$$(2x-1)^2 = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

No, na početku smo komentirali da mora biti $x \neq \frac{1}{2}$ pa jednadžba nema rješenja. (2 boda)

Zadatak B-1.8. Ako se od težišnica pravokutnog trokuta može napraviti pravokutni trokut, dokažite da je duljina bar jedne katete danog trokuta iracionalan broj.

Rješenje.



Ako su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a t_a, t_b i t_c duljine težišnica pravokutnog trokuta (*v. sliku*), onda je

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako je središte opisane kružnice pravokutnom trokutu u polovištu hipotenuze, vrijedi $t_c = R = \dfrac{c}{2}$, odnosno

$$t_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Pretpostavimo da su t_a, t_b i t_c duljine stranica nekog pravokutnog trokuta. Tada je ili t_a ili t_b najveća stranica ili hipotenuza. Neka je to t_b. Tada vrijedi

$$t_b^2 = t_a^2 + t_c^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Uvrštavanjem prije dobivenih izraza za kvadrate težišnica u gornju formulu, dobivamo da je

$$a^2 + \frac{b^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4},$$

odnosno

$$3a^2 = 3b^2 + c^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako je $a^2 + b^2 = c^2$, slijedi da je $a^2 = 2b^2$, ondosno $a = \sqrt{2} \cdot b$. Ako je b racionalan, a je iracionalan i obratno. (2 boda)

Analogno bi dobili da je t_a hipotenuza, dok ako je t_c hipotenuza, istim postupkom dobivamo da je $c^2 = 5(a^2 + b^2)$ što je nemoguće. (1 bod)

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

24. siječnja 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Odredite modul kompleksnog broja $z = \dfrac{(2+3i)^{2011}}{(2-3i)^{2009}}$.

Rješenje.

$$|z| = \frac{|2+3i|^{2011}}{|2-3i|^{2009}} = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \frac{\sqrt{13}^{2011}}{\sqrt{13}^{2009}} = \left(\sqrt{13}\right)^{2011-2009} = \sqrt{13}^{2} = 13. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.2. Riješite jednadžbu u skupu $\mathbb{C}$:

$$x^6 + x^3 = 18\left(12 - x^3\right).$$

Rješenje. Sređivanjem dobivamo:

$$x^6 + 19x^3 - 216 = 0$$
$$t = x^3$$
$$t^2 + 19t - 216 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-19 \pm 35}{2}$$

$$\begin{array}{ll} t_1 = 8 & t_2 = -27 \\ x^3 = 8 & x^3 = -27 \qquad \text{(1 bod)} \\ x^3 - 8 = 0 & x^3 + 27 = 0 \\ (x-2)(x^2+2x+4) = 0 & (x+3)(x^2-3x+9) = 0 \\ x-2=0,\ x^2+2x+4=0 & x+3=0,\ x^2-3x+9=0 \\ x_1 = 2,\ x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}, & x_4 = -3,\ x_{5,6} = \dfrac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}. \end{array}$$

Za x_1 i x_4 (1 bod), $x_{2,3}$ (1 bod) i za $x_{5,6}$ (1 bod).

Zadatak B-2.3. Ne rješavajući kvadratnu jednadžbu $x^2 + 2x + 2 = 0$, izračunajte vrijednost izraza $\dfrac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 - x_2)^2}$, gdje su x_1, x_2 rješenja dane jednadžbe.

Rješenje.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2. \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \frac{(-2)^3 - 3 \cdot 2 \cdot (-2)}{(-2)^2 - 4 \cdot 2} = \frac{-8 + 12}{4 - 8} = -1. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-2.4. Gliser je morao svratiti u mjesto pored kojeg je prolazio da u pristaništu natoči gorivo. Pri tom se zadržao 12 minuta. To zakašnjenje je nadoknadio na preostalom dijelu puta od 60 km povećanjem brzine za 10 km / h. Kolika je bila brzina glisera prije pristajanja u luci?

Rješenje.

Neka je x km / h brzina glisera prije nego je pristao u luku da natoči gorivo. S tom brzinom bi preostali dio puta od 60 km prevalio za $\frac{60}{x}$ sati, a s povećanom brzinom za $\frac{60}{x+10}$ sati. Razlika tih vremena mora biti jednaka vremenu zadržavanja u pristaništu, tj.

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{5}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Odavde se dobije $300(x + 10) - 300x = x(x + 10)$, odnosno

$$x^2 + 10x - 3000 = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = -60$ i $x_2 = 50$.

Prije pristajanja u luci gliser je vozio brzinom $x = 50$ km / h. (1 bod)

Zadatak B-2.5. Odredite vrijednosti realnog parametra a tako da je nejednakost

$$(a + 1)x^2 - 3(a + 1)x + a < 0$$

točna za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Mora vrijediti $a + 1 < 0$ i $D = 9(a + 1)^2 - 4(a + 1)a < 0$, odnosno

$$(a + 1)(5a + 9) < 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz prve nejednakosti vrijedi $a \in \langle -\infty, -1\rangle$, a iz druge $a \in \left\langle -\frac{9}{5}, -1\right\rangle$. (2 boda)

Dakle, dana nejednakost je točna za svaki $x \in \mathbb{R}$ ako je $a \in \left\langle -\frac{9}{5}, -1\right\rangle$. (1 bod)

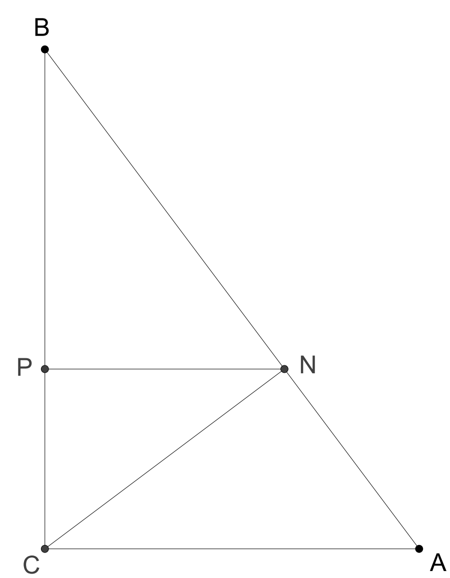
Zadatak B-2.6. Napišite neku kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima čije je jedno rješenje $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2011}$.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2011} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2010} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2}\right)^{1005} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \\
&= \left(\frac{2}{1-2i-1}\right)^{1005} \cdot \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = \left(\frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i}\right)^{1005} \cdot \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = i^{1005} \cdot \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = \\
&= i \cdot \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} && \text{(5 bodova)}\\
x_2 &= \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} && \text{(1 bod)}\\
x_1 + x_2 &= -\sqrt{2} && \text{(1 bod)}\\
x_1 \cdot x_2 &= 1 && \text{(1 bod)}\\
x^2 - (x_1+x_2)x + x_1 \cdot x_2 &= 0\\
x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1 &= 0 && \text{(2 boda)}
\end{aligned}
$$

Zadatak B-2.7. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutem u vrhu C. Povučena je visina CN na stranicu AB i iz točke N povučemo visinu NP na stranicu BC u trokutu BCN. Ako su duljine kateta $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$, kolika je duljina visine NP?

Rješenje. (1 bod)



Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle CBN$ su slični (1 bod)

pa imamo sljedeći omjer:

$$\frac{|NB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|} \qquad \text{(2 boda).}$$

No, i trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle NBP$ su slični (1 bod)

pa vrijedi

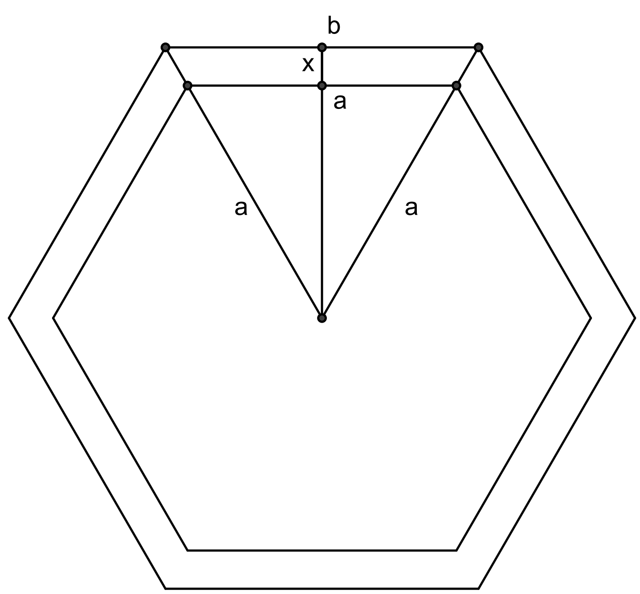
$$\frac{|NP|}{|AC|} = \frac{|NB|}{|AB|} \qquad \text{(2 boda).}$$

Zbog gornja dva omjera i zbog Pitagorinog teorema je

$$|NP| = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot |NB| = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{|BC|}{|AB|} \cdot |BC| = \frac{|AC| \cdot |BC|^2}{|AB|^2} = \frac{3 \cdot 4^2}{3^2 + 4^2} = \frac{48}{25}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Zadatak B-2.8. Oko bazena u obliku pravilnog šesterokuta napravljena je staza širine 2 m i površine 36 m^2. Koliki je opseg bazena?

Rješenje. (1 bod)



$x = 2$ m, $P = 36$ m^2.

Staza se sastoji od 6 jednakokračnih trapeza osnovica a i b, i visine x. Površina jednog trapeza je 6 cm^2. (1 bod)

$$P_t = \frac{a+b}{2} \cdot x \quad \Rightarrow \quad a + b = 6. \qquad \text{(2 boda)}$$

Površina trapeza je razlika površina jednakostraničnih trokuta stranica b i a.

$$\frac{b^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6$$
$$b^2 - a^2 = 8\sqrt{3}$$
$$(b-a)\cdot(b+a) = 8\sqrt{3}$$
$$(b-a)\cdot 6 = 8\sqrt{3}$$
$$b - a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(2 boda)

Rješavanjem sustava jednadžbi: $a+b=6$ i $b-a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ dobivamo $a=\frac{9-2\sqrt{3}}{3}$ m.

(2 boda)

Opseg bazena je $6a$. (1 bod)

$$O = 18 - 4\sqrt{3} \text{ m.}$$

(1 bod)

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

24. siječnja 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 3^y &= 24 \\ 2^y \cdot 3^x &= 54. \end{aligned}$$

Rješenje. Za ideju množenja ili dijeljenja ili jedno od toga. (1 bod)

Množenjem danih jednadžbi izlazi

$$\begin{aligned} 2^{x+y} \cdot 3^{x+y} &= 24 \cdot 54 \\ 6^{x+y} &= \left(2^3 \cdot 3\right) \cdot \left(2 \cdot 3^3\right) \\ 6^{x+y} &= 2^4 \cdot 3^4 \\ 6^{x+y} &= 6^4 \\ x + y &= 4 \end{aligned} \tag{1}$$

(1 bod)

Dijeljenjem danih jednadžbi izlazi

$$\begin{aligned} 2^{x-y} \cdot 3^{x-y} &= \frac{24}{54} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} &= \frac{2^3 \cdot 3}{2 \cdot 3^3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ x - y &= 2 \end{aligned} \tag{2}$$

(1 bod)

Iz (1) i (2) slijedi

$$x = 3, \quad y = 1.$$ (1 bod)

Zadatak B-3.2. Osni presjek uspravnog valjka je kvadrat. Odredite duljinu polumjera osnovke tako da njegovo oplošje i obujam imaju istu brojčanu vrijednost.

Rješenje.

Iz uvjeta da je osni presjek valjka kvadrat, slijedi $2r = v$. (1 bod)

Tada iz $O = V$ dobivamo

$$\begin{aligned} 2r^2\pi + 2r\pi \cdot v &= r^2\pi \cdot v \\ 2r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r &= r^2\pi \cdot 2r \\ 6r^2\pi &= 2r^3\pi \end{aligned}$$ (2 boda)

Iz posljednje jednakosti slijedi $r = 3$. (1 bod)

Zadatak B-3.3. Riješite jednadžbu:

$$\cos 2012x - \cos 2010x = 0.$$

Prvo rješenje.

$\cos 2012x - \cos 2010x = 0$

$\cos 2012x = \cos 2010x$ (1 bod)

$2012x = 2010x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ili} \quad 2012x = -2010x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ (1 bod)

$2012x - 2010x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ili} \quad 2012x + 2010x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ili} \quad x = \dfrac{k\pi}{2011}, \quad k \in \mathbb{Z}$ (2 boda)

Drugo rješenje.

$$\cos 2012x - \cos 2010x = 0$$

$$-2\sin\frac{2012x + 2010x}{2}\sin\frac{2012x - 2010x}{2} = 0$$ (1 bod)

$$\sin 2011x \sin x = 0$$

Odatle je $\sin x = 0$ ili $\sin 2011x = 0$. (1 bod)

Iz prve jednakosti slijedi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (1 bod)

a iz druge je $2011x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. $x = \dfrac{k\pi}{2011}$, $k \in \mathbb{Z}$. (1 bod)

Napomena: Priznati ako učenik nije napisao $x = k\pi$.

Zadatak B-3.4. Ako je $\operatorname{tg} x = 4 + \operatorname{ctg} x$, izračunajte

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x}.$$

Rješenje.

$$A = \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x} = \frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)}{(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)(\operatorname{tg}^2 x - 1 + \operatorname{ctg}^2 x)} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 1} \tag{1}$$

(1 bod)

Iz $\operatorname{tg} x = 4 + \operatorname{ctg} x$ izlazi

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 4, \tag{2}$$

(1 bod)

a odatle kvadriranjem

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 + \operatorname{ctg}^2 x = 16$$
$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 1 = 17 \tag{3}$$

(1 bod)

Sada iz (1), (2) i (3) slijedi $A = \dfrac{4}{17}$. (1 bod)

Zadatak B-3.5. U pravokutnom trokutu je omjer sinusa šiljastih kutova $\sqrt{3} : 1$. Odredite kutove trokuta.

Prvo rješenje.

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{3}b$ (2 boda)

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ$ (1 bod)

$\beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (1 bod)

Drugo rješenje.

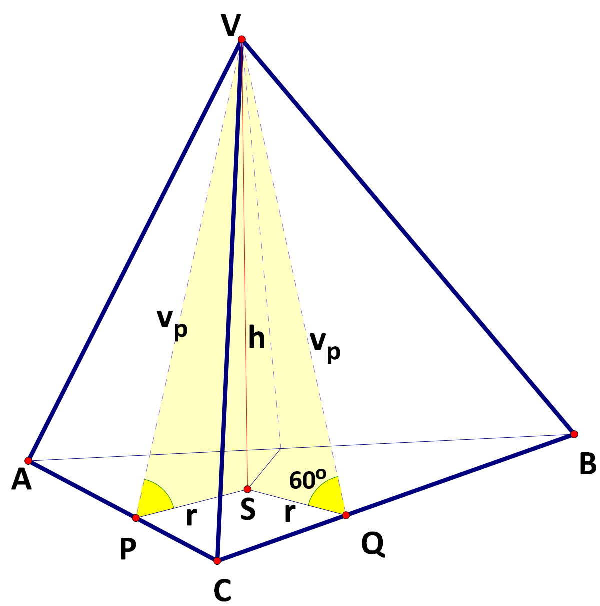
$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$ (1 bod)

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ$ (2 boda)

$\beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (1 bod)

Zadatak B-3.6. Osnovka trostrane piramide je pravokutan trokut s katetama duljine 12 cm i 35 cm. Sve bočne strane zatvaraju s ravninom osnovke kut od 60°. Odredite oplošje i obujam piramide.

Rješenje.



Za skicu ako se jasno vidi koji je kut 60°, r, visina pobočke, visina piramide – ili u piramidi ili samo u trokutu. Nije nužno da ima posebno nacrtanu bazu. (2 boda)

$$c = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37 \text{ cm} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$c = AM + BM = BQ + AP = (a - r) + (b - r)$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} = 5 \text{ cm} \qquad \text{(2 boda)}$$

Napomena: r se može izračunati i koristeći površinu $r \cdot s = \dfrac{ab}{2}$.

Kako sve bočne strane zatvaraju s ravninom osnovke kut od 60°, slijedi da visine v_p, svih pobočki, imaju iste duljine pa iz trokuta SDV slijedi

$$v_p = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm},$$

a visina cijele piramide je

$$h = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Oplošje je

$$O = B + Pl = \frac{12 \cdot 35}{2} + \frac{10 \cdot (35 + 12 + 37)}{2} = 210 + 420 = 630 \text{ cm}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Volumen iznosi:

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{210 \cdot 5\sqrt{3}}{3} = 350\sqrt{3} \text{ cm}^3. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-3.7. Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ za koje je izraz

$$x^{2-\log_a^2 x - \log_a\left(x^2\right)} - \frac{1}{x}$$

pozitivan.

Rješenje.

$$x^{2-\log_a^2 x - \log_a\left(x^2\right)} - \frac{1}{x} > 0$$
$$x^{2-\log_a^2 x - \log_a\left(x^2\right)} > \frac{1}{x}$$

Kako je baza $x > 1$, slijedi

$$2 - \log_a^2 x - 2\log_a x > -1.$$

Dobivamo nejednadžbu

$$\log_a^2 x + 2\log_a x - 3 < 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Slijedi

$$-3 < \log_a x < 1, \qquad \text{(2 boda)}$$

odakle slijede dvije mogućnosti:

1°) Za $a > 1$ je $a^{-3} < x < a$. (1 bod)
Kako je $a > 1$, onda je $a^{-3} < 1$ pa zajedno s $x > 1$ dobivamo $x \in \langle 1, a\rangle$. (2 boda)

2°) Za $0 < a < 1$ je $a^{-3} > x > a$, odnosno $a < x < a^{-3}$. (1 bod)
Kako je $a < 1$, onda je $a^{-3} > 1$ pa zajedno s $x > 1$ dobivamo $x \in \langle 1, a^{-3}\rangle$. (2 boda)

Zadatak B-3.8. Za kutove α i β trokuta ABC vrijedi:

$$\begin{aligned}
3\sin\alpha + 4\cos\beta &= 6 \\
4\sin\beta + 3\cos\alpha &= 1.
\end{aligned}$$

Odredite mjeru kuta γ tog trokuta.

Rješenje. Nakon kvadriranja zadanih jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned}
9\sin^2\alpha + 24\sin\alpha\cos\beta + 16\cos^2\beta &= 36 \\
16\sin^2\beta + 24\sin\beta\cos\alpha + 9\cos^2\alpha &= 1
\end{aligned}$$ (2 boda)

Ove jednakosti zbrojimo i dobivamo

$$9\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + 24\left(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha\right) + 16\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) = 37$$ (1 bod)

$$24\sin(\alpha+\beta) = 12$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}$$ (2 boda)

Slijedi da je $\alpha+\beta = 30^\circ$ ili $\alpha+\beta = 150^\circ$. (1 bod)

Ako je $\alpha+\beta = 30^\circ$, onda je $\alpha < 30^\circ$ i $\sin\alpha < \frac{1}{2}$, što je u kontradikciji s prvom jednakosti. Naime,

$$3\sin\alpha + 4\cos\beta < 3\cdot\frac{1}{2} + 4 < 6$$ (2 boda)

te prva jednakost ne bi bila zadovoljena.

Dakle, $\alpha+\beta = 150^\circ$ pa je $\gamma = 30^\circ$ (2 boda)

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

24. siječnja 2011.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Odredite prirodan broj $n \geq 2$ tako da vrijedi jednakost

$$\frac{(n-1)^2 n(n+1)!}{(n+2)!} = \binom{n}{2}.$$

Rješenje.

$$\frac{(n-1)(n-1)n(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\frac{(n-1)\cancel{(n-1)n(n+1)!}}{(n+2)\cancel{(n+1)!}} = \frac{\cancel{(n-2)!(n-1)n}}{2\cancel{(n-2)!}} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{1}{2}$$

$$2n-2 = n+2$$

$$n = 4 \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-4.2. Koliko je $49 \cdot 35$ ako je $49 + 35 = 82$?

Rješenje. Očito je da račun nije izveden u dekadskom sustavu, tj. da je

$$49_{(x)} + 35_{(x)} = 82_{(x)}.$$

Iz $4x + 9 + 3x + 5 = 8x + 2$ dobivamo da je baza sustava $x = 12$. Tada je $49_{(12)} = 57$ i $35_{(12)} = 41$. (2 boda)

Iz $57 \cdot 41 = 2337$ i $2337 = 1429_{(12)}$, slijedi da je $49 \cdot 35 = 1429$ (u bazi 12). (2 boda)

Zadatak B-4.3. Odredite kompleksan broj z^3, ako je imaginarni dio broja z jednak $-\frac{1}{3}$ i ako je argument broja z jednak $\frac{7\pi}{6}$.

Rješenje. Neka je $z = a + bi$, argument $z = \varphi$, tada je $b = -\frac{1}{3}$ i $\varphi = \frac{7\pi}{6}$.

Iz $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ dobivamo $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. (1 bod)

Kako je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2}{3}$, to je

$$z^3 = |z|^3 \left(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi\right), \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno

$$z^3 = \frac{8}{27}\left(\cos\frac{7\pi}{2} + i\sin\frac{7\pi}{2}\right) = -\frac{8}{27} i. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-4.4. Nakladnik je odlučio rasprodati zalihe knjiga koje već dulje vrijeme čuva u skladištu. Slaže ih u pakete i određuje reklamne cijene paketa. Svaka knjiga ima istu novčanu vrijednost. Kad bi pakirao po 4, 5 ili 6 knjiga, svaki put ostale bi mu dvije knjige, a ako ih pakira po 7, sve će knjige iskoristiti. Koliko je najmanje knjiga u skladištu.

Rješenje. Neka je n traženi broj knjiga.

Prema uvjetima zadatka $n - 2$ je djeljivo s 4, 5, 6. Tada je $n - 2 = 60k$, $k \in \mathbb{N}_0$. (1 bod)

Dakle, treba naći broj oblika $60k + 2$ koji je djeljiv sa 7. Najmanji takav je za $k = 3$. (2 boda)

U skladištu su najmanje 182 knjige. (1 bod)

Zadatak B-4.5. U pravilnom n–terokutu je polumjer opisane kružnice 2, S je njeno središte, A, B su uzastopni vrhovi n–terokuta. Odredite n i unutrašnji kut pravilnog n–terokuta ako je skalarni umnožak $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 2\sqrt{2}$.

Rješenje. Neka je α središnji kut pravilnog n–terokuta.

Iz $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 2\sqrt{2}$ slijedi

$$|SA| \cdot |SB| \cos\alpha = 2\sqrt{2}, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno $2 \cdot 2 \cdot \cos\alpha = 2\sqrt{2}$ pa je

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

te je $\alpha = 45^\circ$. (1 bod)

Kako je $\alpha = \dfrac{360^\circ}{n} = 45^\circ$ te je $n = 8$. (1 bod)

Unutrašnji kut je $2 \cdot \left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 135^\circ$. (1 bod)

Zadatak B-4.6. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^{n}=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}.$$

Rješenje.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Provjera za $n=1$.

$$\begin{aligned} 2 &= 10+(3-5)\cdot 2^{2} \\ 2 &= 10-8 \end{aligned}$$ (1 bod)

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n=1$.

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi tvrdnja (1 bod)

$$2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^{n}=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}.$$

Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za $n+1$, odnosno da vrijedi

$$2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^{n}+(3n+1)\cdot 2^{n+1}=10+(3n-2)\cdot 2^{n+2}.$$ (2 boda)

Krenimo od lijeve strane prethodne jednakosti i iskoristimo pretpostavku indukcije:

$$\begin{aligned} &2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^{n}+(3n+1)\cdot 2^{n+1}=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}+(3n+1)\cdot 2^{n+1}= \\ &=10+2^{n+1}\cdot(6n-4)=10+2^{n+1}\cdot 2(3n-2)=10+2^{n+2}\cdot(3n-2). \end{aligned}$$ (5 bodova)

Prema tome, tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. (1 bod)

Zadatak B-4.7. Deltoid rotira oko pravca koji prolazi jednim njegovim vrhom, a paralelan je s osi simetrije deltoida. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom ako su duljine stranica deltoida $a=2$ cm, $b=8$ cm, a kut među njima $\alpha=120^{\circ}$.

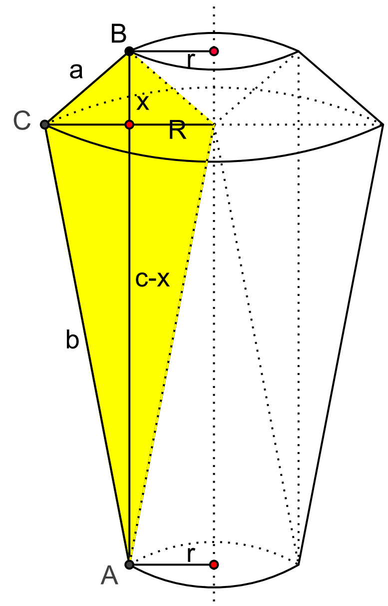
Rješenje.

Tijelo koje se dobije danom rotacijom je sastavljeno od dva krnja stošca kojima nedostaju dva stošca (slika!) (2 boda)

Oba krnja stošca imaju polumjere manje baze r, a veće (zajedničke baze) R, dok oba stošca imaju polumjer baze r.

r je jednak polovici manje dijagonale deltoida ili visini na stranicu c trokuta ABC, a $R=2r$.

Označimo s V_{ks1} obujam krnjeg stošca kojemu je visina x, s V_{ks2} obujam krnjeg stošca kojemu je visina $c-x$, s V_1 obujam stošca kojemu je visina x, a s V_2 obujam stošca kojemu je visina $c-x$.



Traženi obujam je $V = V_{ks1} + V_{ks2} - V_1 - V_2$. (1 bod)

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{x\pi}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right) + \frac{(c-x)\pi}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right) - \frac{r^2\pi x}{3} - \frac{r^2\pi(c-x)}{3} = \\
&= \frac{\pi\left(R^2+r^2+Rr\right)}{3}(x+c-x) - \frac{r^2\pi}{3}(x+c-x) = \\
&= \frac{c\pi}{3}\left(R^2+r^2+Rr-r^2\right) = \frac{c\pi}{3}\left(R^2+Rr\right).
\end{aligned}
$$

Tada je uz $R = 2r$

$$V = 2r^2 c\pi.$$ (4 boda)

Izračunajmo r i c.

$$
\begin{aligned}
c^2 &= 2^2 + 8^2 - 2\cdot 2\cdot 8\cos 120^\circ = 84 \\
c &= 2\sqrt{21}\ \text{cm}.
\end{aligned}
$$ (1 bod)

r računamo koristeći površinu trokuta ABC.

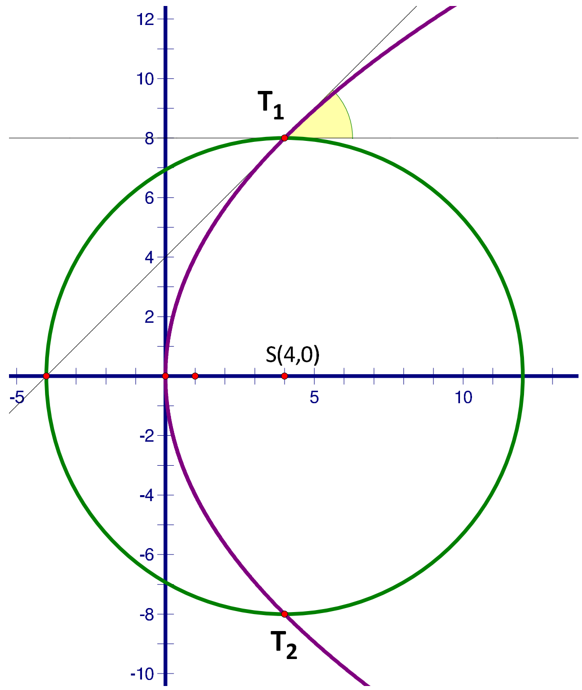
$$
\begin{aligned}
\frac{r\cdot c}{2} &= \frac{ab}{2}\sin 120^\circ \\
r &= \frac{2\cdot 8\sin 120^\circ}{2\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{7}}\ \text{cm}.
\end{aligned}
$$ (1 bod)

Tada je traženi obujam

$$V = 2\cdot\frac{16}{7}\cdot 2\sqrt{21}\cdot\pi = \frac{64\sqrt{21}\cdot\pi}{7}\ \text{cm}^3.$$ (1 bod)

Zadatak B-4.8. Oko žarišta parabole $y^2 = 16x$ opisana je kružnica koja dira ravnalicu parabole. Pod kojim se kutem sijeku ove dvije krivulje?

Rješenje.



Iz jednadžbe parabole dobivamo $2p = 16$, odnosno $\frac{p}{2} = 4$.

Žarište parabole je točka $(4, 0)$. Ravnalica je pravac $x = -4$.

Središte kružnice je u točki $S(4, 0)$, a polumjer kružnice je udaljenost od S do ravnalice, $r = 8$. Tada je jednadžba kružnice $(x-4)^2 + y^2 = 64$. (2 boda)

Presjek parabole i kružnice je rješenje sustava jednadžbi $(x-4)^2 + y^2 = 64$, $y^2 = 16x$.

$$(x-4)^2 + 16x = 64$$
$$(x+4)^2 = 64.$$

$x + 4 = \pm 8$, tj. $x = 4$ ili $x = -12$.

Rješenje je $x = 4$ (-12 nije moguće jer bi tada bilo $y^2 < 0$). (2 boda)

Tada je $y^2 = 16 \cdot 4$, $y = \pm 8$, a sjecišta su točke $T_1 = (4, 8)$, $T_2 = (4, -8)$. (2 boda)

Zbog simetrije, traženi kut neće ovisiti o izboru točke.

Tangenta na parabolu u $T_1 = (4, 8)$ je $y \cdot 8 = 8(x + 4)$, odnosno $y = x + 4$. (1 bod)

Tangenta na kružnicu u $T_1 = (4, 8)$ je pravac $y = 8$. (1 bod)

Tada je kut između danih krivulja ili kut između dobivenih tangenti jednak kutu φ što ga pravac $y = x + 4$ zatvara s pozitivnim dijelom osi x.

Kako je $\operatorname{tg} \varphi = k = 1$, slijedi da je $\varphi = 45°$. (2 boda)