

Od uzoraka do algebarskih izraza

Razvoj algebarskog mišljenja kroz nastavu
matematike

dr.sc. Maja Cindrić, Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja Sveučilišta u Zadru

Algebarsko mišljenje

- *“Fokus aritmetike je na rješenju, a algebre na odnosima”*
- Algebarsko mišljenje je proces u kojem osoba generalizira matematičke ideje i postupke na temelju skupine pojedinačnih primjera, kroz argumentirani razgovor, pri čemu takvu generalizaciju iskazuju formalno u skladu s razvojnou dobi. (Kaput, Blanton, 2005.)
- proces

Algebarsko mišljenje i NOK

- prikazvanje i komunikacija,
- povezivanje,
- logičko mišljenje,
- zaključivanje i argumentiranje,
- rješavanje problema i matematičko modeliranje



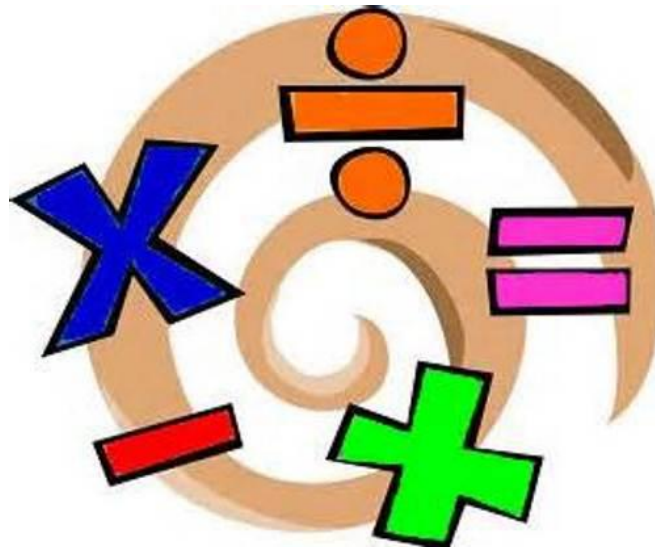
**Algebarsko
mišljenje**

Algebarsko mišljenje

- Algebra kao ***alat*** za rad s funkcijama i matematičko modeliranje podrazumijeva:
 - Pronalaženje, izražavanje i generaliziranje uzoraka i pravilnosti u realnom kontekstu
 - Reprezentacija matematičkih ideja korištenjem riječi, konkretnih materijala, crteža, grafova, tablica, jednažbi
 - Vještina snalaženja u koordinatnim prikazima

Algebarsko mišljenje

- Algebra kao ***generalizacija aritmetike*** uključuje:
 - razvoj koncepta računskih radnji kroz različite situacije, reprezentacije i strategije.



Algebarsko mišljenje

- Algebra kao ***jezik matematike*** podrazumijeva:
 - razumijevanje pojma varijable, koeficijenta, konstante i različitih algebarskih izraza,
 - razumijevanje pojma rješenja jednadžbe,
 - razumijevanje i korištenje svojstva računskih operacija u različitim brojevnim sustavima,
 - čitanje, pisanje i postavljanje brojevnih i algebarskih izraza i korištenje simbola(slova) kao zamjena za broj,
 - Korištenje i određivanje ekvivalentnih simboličkih izraza za manipuliranje formulama, izrazima, jednadžnama i nejednadžbama

Algebra kao alat

- Uzorci:



81, 79, 77, ...

$$0 \cdot 9 + 8 = 8$$

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$

$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$

$$987 \cdot 9 + 5 = 8,888$$

$$9,876 \cdot 9 + 4 = 88,888$$

$$98,765 \cdot 9 + 3 = 888,888$$

$$987,654 \cdot 9 + 2 = 8,888,888$$

$$9,876,543 \cdot 9 + 1 = 88,888,888$$

$$98,765,432 \cdot 9 + 0 = 888,888,888$$

Algebra kao generalizacija aritmetike

- Razvoj koncepta osnovnih matematičkih operacija mnogo je više od samog računanja
- Kako malom djetetu objasniti da je $2 + 3 = 5$?

Što je koncept ?

- Trojka $C = (S, I, R)$
- S: skup situacija koje čine koncept koristan i smislen
- I: skup operacijskih invarijanti koje koristi osoba kada se bavi tim situacijama
- R: skup simboličkih reprezentacija, lingvističkih, grafičkih ili gestikularnih koje mogu biti korištene za predstavljanje invarijanti, situacija ili procedura

- Koje kategorije situacija se nude djeci za razvoj matematičkih koncepata, u školi i izvan nje? Mogu li se te situacije rangirati po složenosti?
- Koje procedure koristi učenik za rad s tim situacijama? Pod kojim uvjetima?
- Koje se procedure uče? Koje se razvijaju spontano?
- Koje riječi rečenice i simboličke izraze učenik koristi u komunikaciji o situacijama?
- Koje vrste situacija, koje se ne sreću izvan škole, učeniku treba predstaviti, da bi mu neki matematički koncept bio jasniji?

Tip problema			
Spajanje (Join)	(Rezultat nepoznat) Robi je imao 3 autića. Roditelji su mu za rođendan dali još 2 autića. Koliko autića sada ima Robi?	(Promjena nepoznata) Ivo je imao 3 kune. Danas ga je posjetila baka koja mu je poklonila nešto kuna, tada je Ivo imao 5 kuna. Koliko je kuna baka dala Ivi?	(Početak nepoznat) Ana je imala nekoliko bombona, a kada joj je Iva dala još 2 imala ih je ukupno 5. Koliko je bombona na početku imala Ana?
Razdvajanje (Separate)	(Rezultat nepoznat) Mare je ubrala 5 cvjetova i 3 je dala Lei. Koliko je cvjetova ostalo Mari?	(Promjena nepoznata) Tamara ima 5 kuna i želi kupiti čokoladicu. Koliko košta čokoladica ako joj je ostalo 2 kune?	(Početak nepoznat) Mario je kupio bilježnicu koja košta 3 kune i ostale su mu 2 kune. Koliko je Mario imao bilježnica na početku?
Dio-Dio-Cjelina (Part-Part-Whole)	(Cjelina nepoznata) 6 dječaka i 4 djevojčice igraju graničara. Koliko djece igra graničar?	(Dio nepoznat) 10 djece igraju graničara, 6 od njih su dječaci, a ostalo su djevojčice. Koliko je djevojčica?	
Usporedba (Compare)	(Razlika nepoznata) Stipe ima 3 kune, a Matea ima 7 kuna. Koliko kuna više ima Matea?	(Uspoređena veličina nepoznata) Lucija ima 3 kune, a Ante ima 4 kune više od nje. Koliko kuna ima Ante?	(Odnos nepoznat) Josipa ima 7 kuna. Ona ima 10 kune više od Marije. Koliko kuna ima Marija?

Klasa	Množenje	Partitivno dijeljenje	Mjerno dijeljenje
Jednake grupe	3 djece imaju svatko po 4 naranče. Koliko naranči imaju svi zajedno?	12 naranča treba podijeliti pravedno između 3 djece. Koliko će dobiti svako dijete?	Ako imaš 12 naranči i daješ djeci svakom po 4 naranče, koliko će djece dobit naranče?
Jednake mjere	3 djece imaju svatko po 4,2 litre soka. Koliko soka imaju svi zajedno?	12,6 litara soka treba podijeliti pravedno između 3 djece. Koliko će dobiti svako dijete?	Ako imaš 12,6 litara soka i daješ djeci svakom po 4,2 litre, koliko će djece dobit sok?
Razmjer	Brod se giba brzinom 4,2 metra u sekundi. Koliki put prijeđe za 3,3 sekunde?	Ako brod prijeđe 13,9 metara za 3,3 sekunde. Koliko metara prijeđe u jednoj sekundi?	Koliko dugo će trebati brodu da prijeđe 13,9 metara, ako vozi brzinom od 4,2 metra u sekundi?
Promjena mjernih jedinica	Inč ima 2,54 cm. Koliko centimetara je u 3,1 inču?	3,1 inč je 7,84 cm. Koliko je centimetara u inču?	Inč je 2,54 cm. Koliko u inčima je 7,84 cm?
Dio –cjelina	Škola ima 80 učenika. $\frac{3}{5}$ su djevojčice. Koliko je djevojčica?	U nekoj školi $\frac{3}{5}$ učenika su djevojčice. Ako je djevojčica 48, koliko je učenika u školi?	U nekoj školi 80 je učenika od toga je 48 djevojčica. Koliki je to dio ?
Multiplikativna usporedba	Žirafa je 3 puta viša od klokana. Ako klokan ima 1,2m, koliko je visoka žirafa?	Žirafa je visoka 3,6 m. Ona je 3 puta viša od klokana. Koliko je visok klokan?	Žirafa je visoka 3,6 m. Klokan je visok 1,2 m. Koliko puta je žirafa viša od klokana?
Kartezijev produkt	Od mjesta A do mjesta B postoje 3 različita puta. Od mjesta B do mjesta C postoje 4 različita puta. Koliko različitih putova ima od A do C?	Ako postoji 12 različitih putova od A do C i 3 puta od A do B, koliko ima putova od B do C?	
Pravokutni pristup	Kolika je površina pravokutnika koji je 3,3m širok i 4,2m dug?	Ako je površina pravokutnika $13,9 \text{ m}^2$ i duljina mu je 3,3 m, koliko je širok?	

Što to znači za razvoj algebarskog mišljenja?

- Svaka računska operacija nije jedna od tih priča niti neki od tih prikaza,
- ona je poopćenje istih i moguće ih je na mentalnoj razini odvojiti od konkretnih priča i prikaza onda kada je pojedina osoba za to spremna.
- Uočavanje pravilnosti i zajedničkih obilježja svih situacija i prikaza, te njihovo povezivanje razvija kod osobe algebarsko mišljenje

Metodika nastave matematike i razvoj algebarskog mišljenja

- Metodički postupci moraju biti orijentirani prema iznošenju različitih priča (situacija) u obliku problema.
- Probleme učenici samostalno rješavaju , komuniciraju i daju svoje prijedloge generalizacija.
- Ključni trenutci - prelasci s situacija koje uključuju prirodne brojeve, na cijele brojeve, racionalne i u konačnici realne i kompleksne brojeve
- najvažnije je koristiti adekvatne modele i modele kojima je moguće uspostaviti poveznicu.

Metodika nastave matematike i razvoj algebarskog mišljenja

- Primjer 1. – ***Partitivni model dijeljenja***
- „Mama ima 12 jabuka i želi ih podijeliti troje svoje djece tako da svako dijete dobije jednako mnogo jabuka. Koliko će svako dijete dobiti jabuka?“
- „Djed ima 3,25 keksa i 0,75 unučadi. Kad svakom unuku da jednako mnogo keksiju, koliko će svako unučić dobiti keksa?“ (dijete, 10 godina)

Vježba 1. Povežite izraze u stupcu lijevo s izrazima desno u stupcu.

1) $3 + 9$	a) 9 puta više od 3
2) $3 \cdot 9$	b) Za 9 manje od 3
3) $3 : 9$	c) Za 9 više od 3
4) $3 - 9$	d) 9 puta manje od 3

Vježba 1. Povežite izraze u stupcu lijevo s izrazima desno u stupcu.

a) $M + \frac{3}{5}$	1. Ako imaš M litara soka i daješ djeci svakom po $\frac{3}{5}$ litre, koliko će djece dobit sok?
b) $M - \frac{3}{5}$	2. Ako imaš M litara soka i popila si $\frac{3}{5}$ litre soka, koliko ti je ostalo?
c) $M \cdot \frac{3}{5}$	3. Škola ima M učenika. $\frac{3}{5}$ su djevojčice. Koliko je djevojčica?
d) $M : \frac{3}{5}$	4. U M litara soka utočio si još $\frac{3}{5}$ litre vode. Koliko mješavine vode i soka sada imaš?

Razvoj algebarskog mišljenja kroz rad na modelima

- Algebrarski štapići mogu se koristiti kao model za računske operacije s racionalnim brojevima .
- Žuti kvadratić predstavlja $+1$ a crveni -1 (okrenuti žuti).



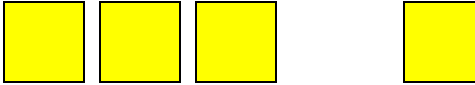
- Žuti i crveni kvadratići model su suprotnih brojeva

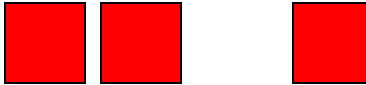
Razvoj algebarskog mišljenja kroz rad na modelima

- Modeli suprotnih brojeva
- Kad su zajedno međusobno se poništavaju
- Crveni poništava zelenog ili žutog



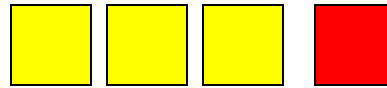
Zbrajanje cijelih brojeva

$$(+3) + (+1) =$$
The diagram shows four yellow squares arranged horizontally, representing the sum of +3 and +1. Each square is a simple yellow rectangle with a black border.

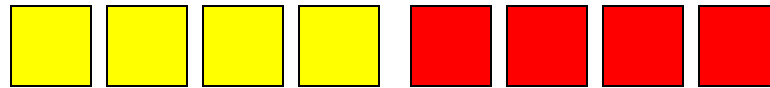
$$(-2) + (-1) =$$
The diagram shows three red squares arranged horizontally, representing the sum of -2 and -1. Each square is a simple red rectangle with a black border.

Zbrajanje cijelih brojeva

$$(+3) + (-1) =$$



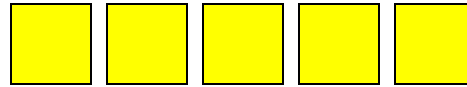
$$(+4) + (-4) =$$



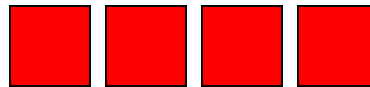
- Nakon mnogo primjera dijete uopćava zakonitost i tek tada samo definira pravilo

Oduzimanje cijelih brojeva

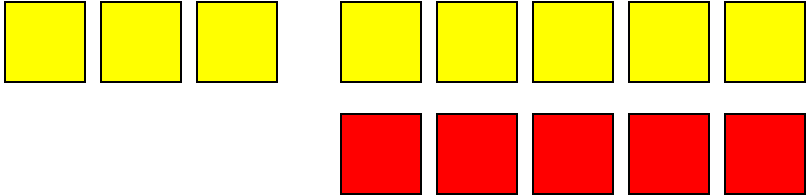
$$(+5) - (+2) =$$



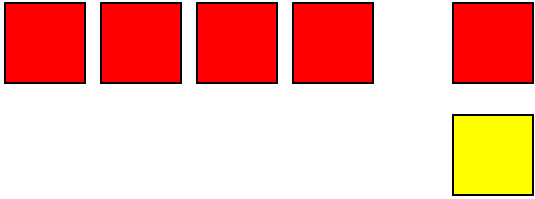
$$(-4) - (-3) =$$



Oduzimanje cijelih brojeva

$$(+3) - (-5)$$


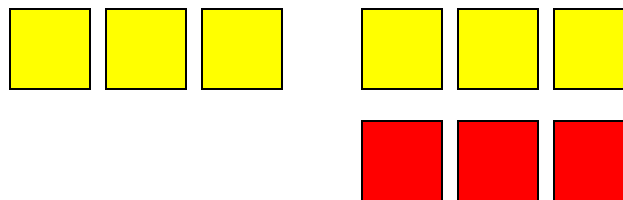
The diagram illustrates the subtraction of a negative number. It shows 3 yellow squares representing +3, followed by 5 red squares representing -5. The red squares are arranged in two rows: the first row has 4 red squares and the second row has 1 red square.

$$(-4) - (+1)$$


The diagram illustrates the subtraction of a positive number. It shows 4 red squares representing -4, followed by 1 yellow square representing +1. The yellow square is positioned below the red squares.

Oduzimanje cijelih brojeva

$$(+3) - (-3)$$

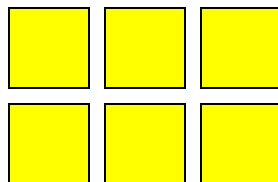


- Nakon puno primjera dijete generalizira zakonitost i samostalno iznosi pravilo.

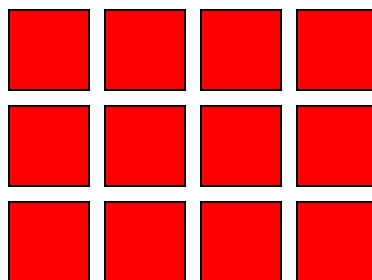
Množenje cijelih brojeva

- Prvi faktor govori u koliko redova smještamo onoliko kvadratića koliko kaže drugi faktor

$$(+2)(+3) =$$



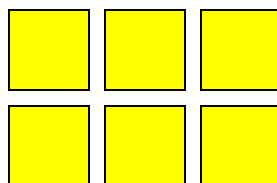
$$(+3)(-4) =$$



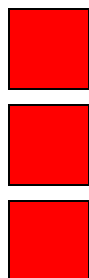
Množenje cijelih brojeva

- Ako je prvi faktor negativan sve dobiveno treba okrenuti na drugu stranu

$$(-2)(+3)$$

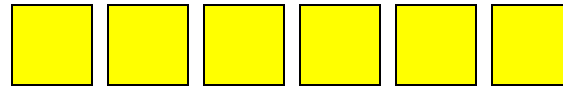


$$(-3)(-1)$$

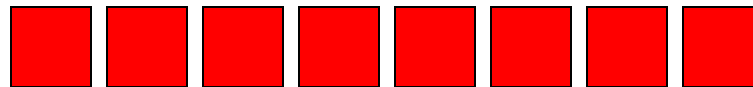


Dijeljenje cijelih brojeva

$$(+6):(+2) =$$



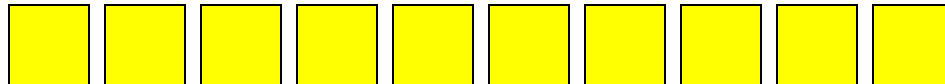
$$(-8):(+2) =$$



Dijeljenje cijelih brojeva

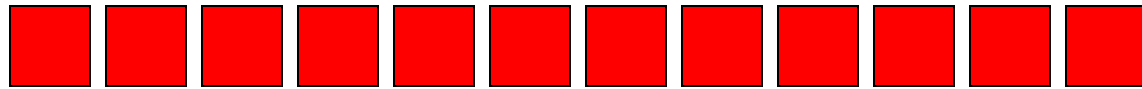
- Negativni dijeljenik znači okreni sve na drugu stranu

$$(+10):(-2) =$$



Dijeljenje cijelih brojeva

$$(-12):(-3) =$$



- Cilj rada na modelu je razvijanje alebarskog mišljenja kod učenika na svim aspektima. Promatranje pojedinačnih primjera, komentiranje, logičko zaključivanje i generalizacija

Algebra kao jezik matematike

- razumijevanje pojma varijable, koeficijenta, konstante i različitih algebarskih izraza,
- razumijevanje pojma rješenja jednadžbe,
- razumijevanje i korištenje svojstva računskih operacija u različitim brojevnim sustavima,
- čitanje, pisanje i postavljanje brojevnih i algebarskih izraza i korištenje simbola(slova) kao zamjena za broj,
- korištenje i određivanje ekvivalentnih simboličkih izraza za manipuliranje formulama, izrazima, jednadžnima i nejednadžbama

Algebra kao jezik matematike

- Napiši brojevni izraz kojim bi iskazao broj keksa na slici.



$$4x + 2$$

Algebra kao jezik matematike

- Koliko keksa imaju Ana i Iva zajedno



ANA



IVA

$$x + 3 + 4x + 2 = 5x + 5$$

Modeliranje polinoma

- Iz crteža postaviti polinom
- Proces stvaranja polinoma je bitan
- Iz simboličkog polinoma crtež

$x + 4$

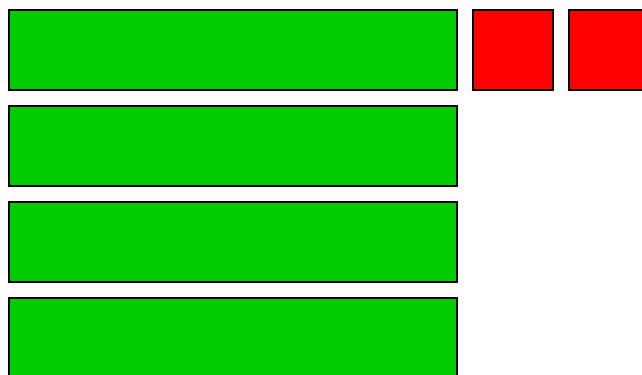


Modeliranje polinoma

$$2x + 3$$

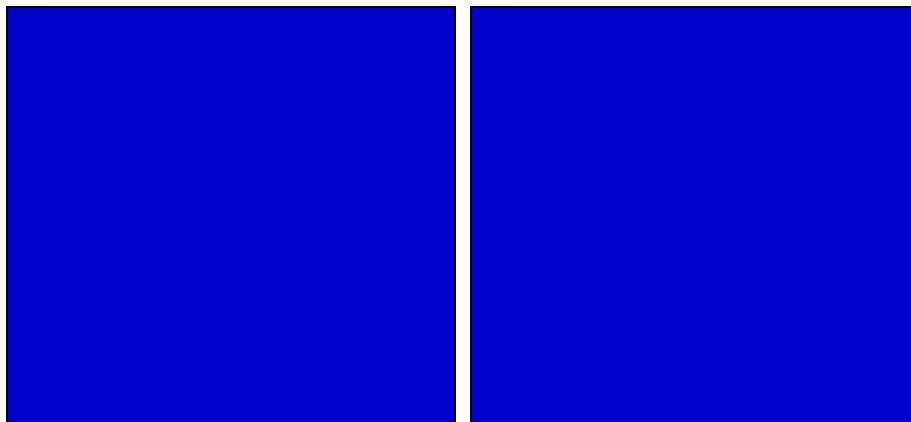


$$4x - 2$$

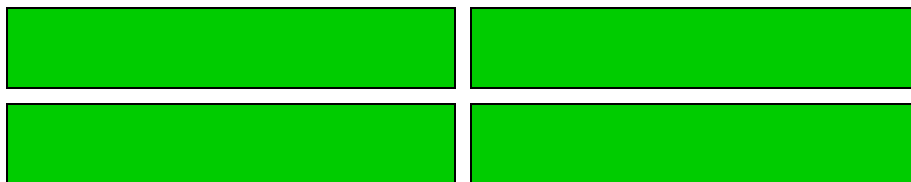


Modeliranje polinoma

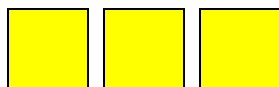
$2x^2$



$4xy$

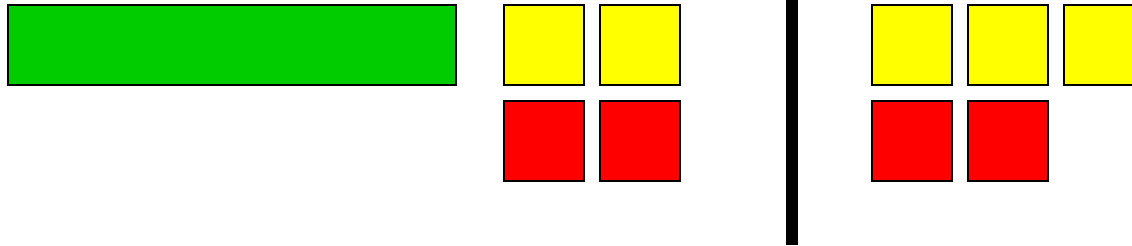


$3y^2$



Rješavanje jednažbi modelom algebarskih štapića

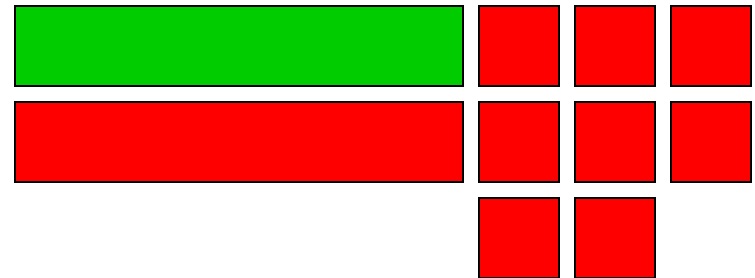
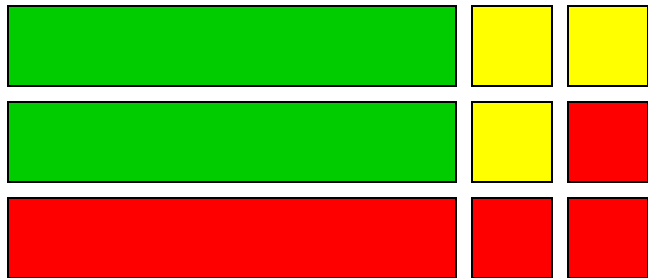
$$X + 2 = 3$$



$$2X - 4 = 8$$

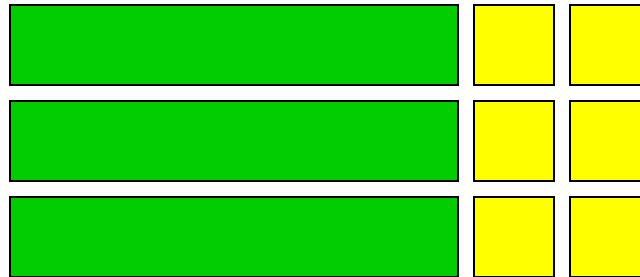
Rješavanje jednažbi modelom algebarskih štapića

$$2X + 3 = X - 5$$



Distributivnost

$$3(X + 2)$$



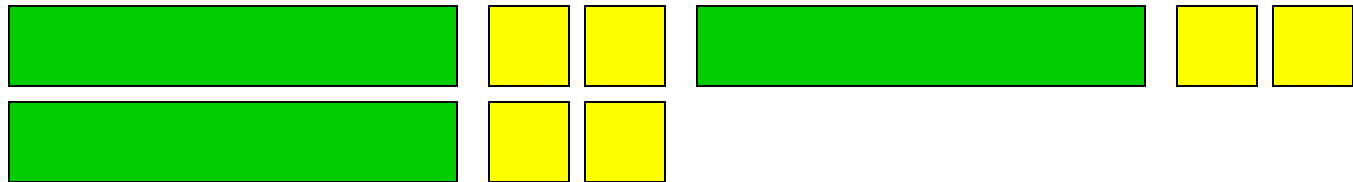
$$3(X - 4)$$

$$-2(X + 2)$$

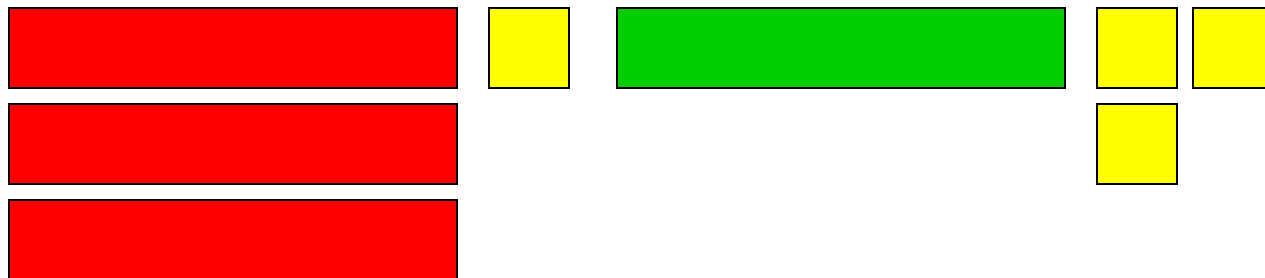
$$-3(X - 2)$$

Zbrajanje polinoma

$$2x + 4 + x + 2$$

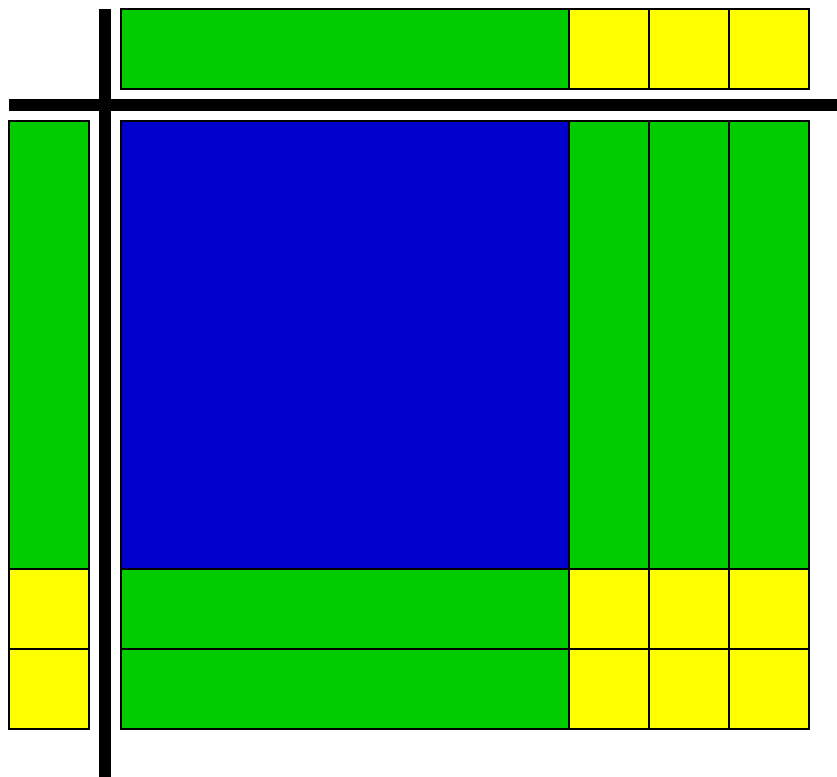


$$-3x + 1 + x + 3$$



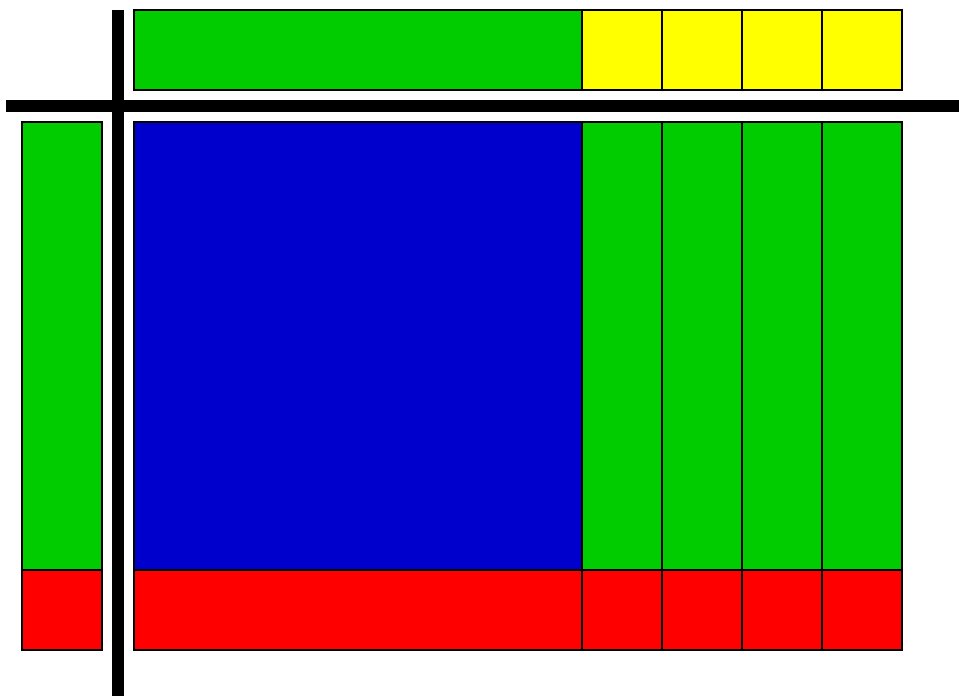
Množenje polinoma

$$(x + 2)(x + 3)$$



Množenje polinoma

$$(x - 1)(x + 4)$$



Faktorizacija polinoma

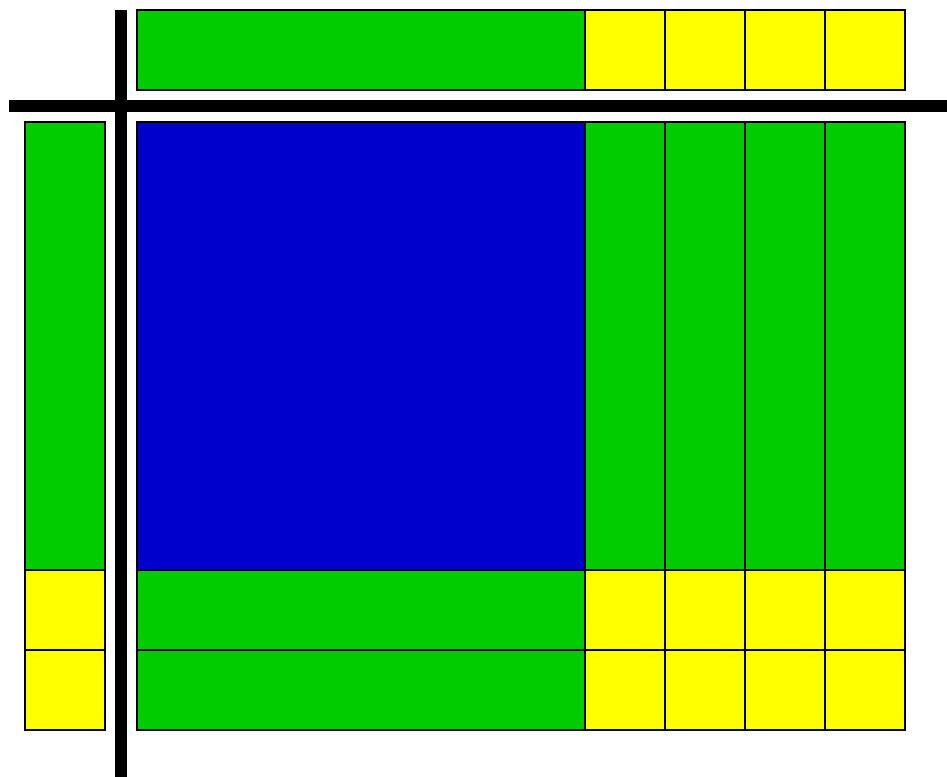
$$3x + 3$$



$$2x - 6$$

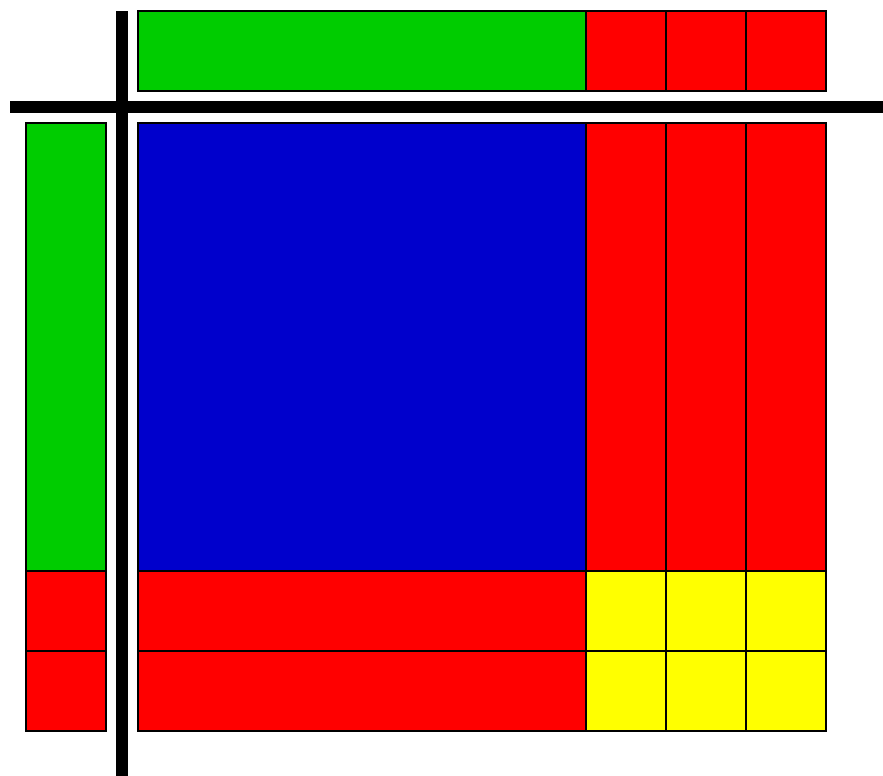
Faktorizacija polinoma

$$x^2 + 6x + 8$$



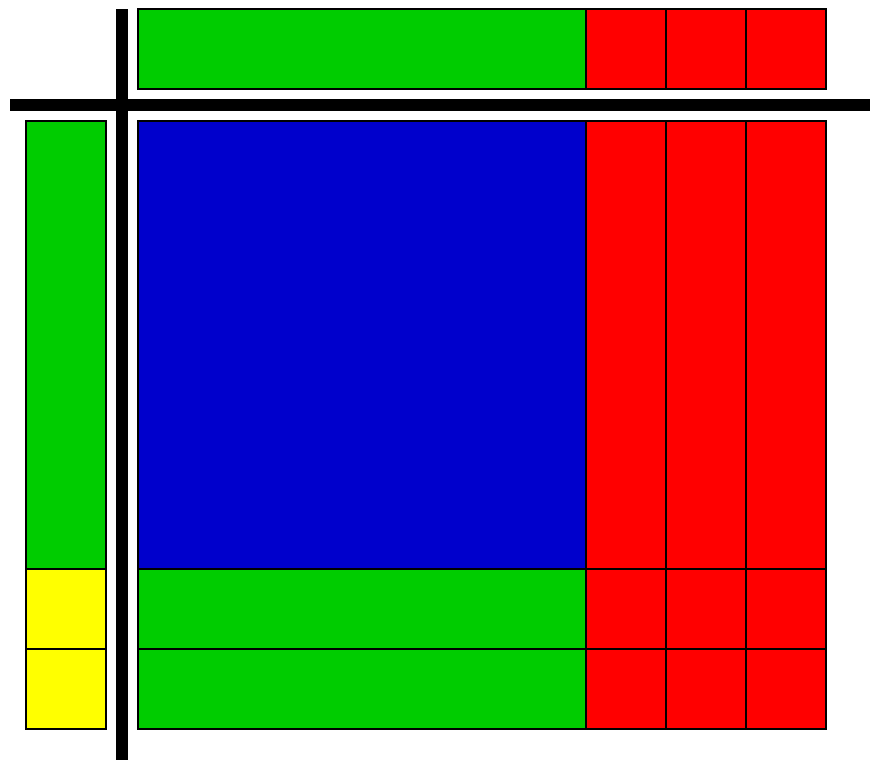
Faktorizacija polinoma

$$x^2 - 5x + 6$$



Faktorizacija polinoma

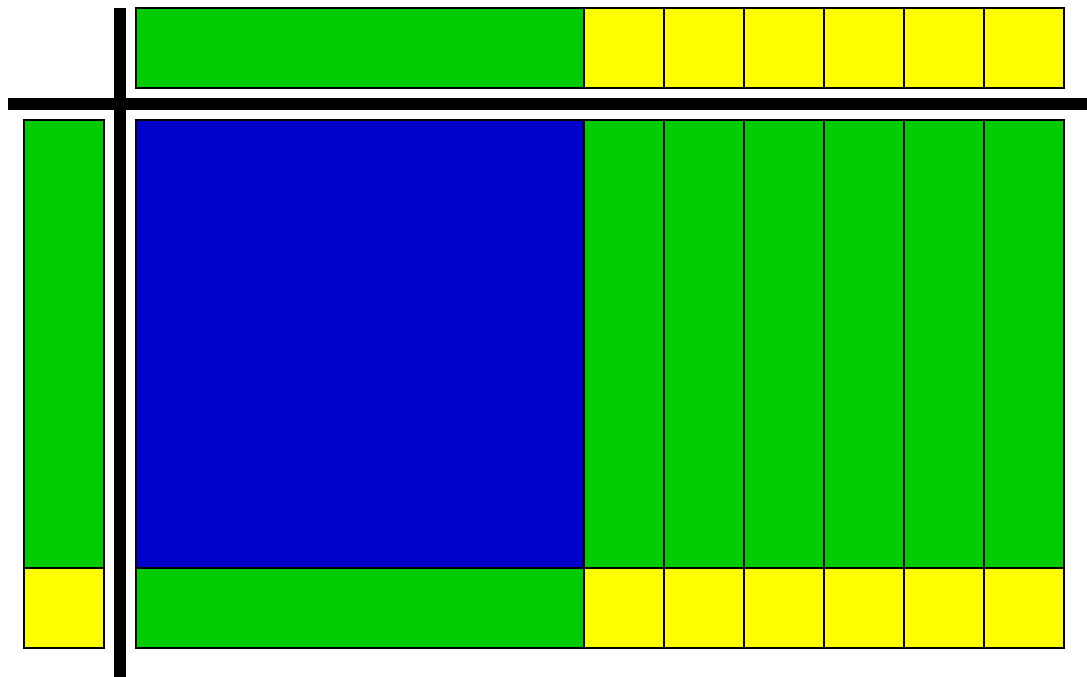
$$x^2 - x - 6$$



Dijeljenje polinoma

$$\underline{x^2 + 7x + 6}$$

$$x + 1$$



Hvala na pažnji!