

S matematikom kroz život

09.01.2015.

**Pripremila: doc.dr.sc. Snježana Braić,
Prirodoslovno matematički fakultet, Split
sbraic@pmfst.hr**

*Matematika – to je jezik kojim govore sve prirodne
znanosti.*

*Ne postoji nijedna matematička grana, ma kako ona
apstraktna bila, koja se ne bi mogla primijeniti u
realnom svijetu.*

Nikolaj Ivanovič Lobačevski

Matematika je ljudska djelatnost već tisućama godina i svatko je svjesno ili nesvjesno rabi.

Ona nije strano tijelo odvojeno od života, ona je utkana u život. Dok dijete istražuje i otkriva zemaljski svijet, konstantno se susreće sa svijetom matematike.

Prirodne brojeve upoznaje i usvaja sasvim intuitivno pridružujući im konkretna značenja: jedan nos, dvije ruke, deset prstiju...

I premda još ne zna brojiti vrlo dobro zna kada mu nedostaje 1 igračka ili 3 bombona i teško da ga možete umiriti dok mu ne vratite sve što je imalo- što već spada u područje zbrajanja i oduzimanja.

Zna pokazati koliko ima godina tako da podigne jedan ili dva prstića, a ako želi pokazati da ima npr. tri i pol godine jedan prstić podigne na pola.

Od popločavanja poda do postavljanja ograde, od obračuna kamata do sniženih cijena u prodavaonici, od količine kalorija u hrani do količine benzina potrebnog za put od jednog grada do drugog, matematika je važan dio našeg svakodnevnog života.

Pomozimo djeci da prepoznaju i shvate povezanost matematike sa životom.

Mnogi govore i pišu o matematici kao o predmetu koji izaziva strah i frustraciju kod učenika, zagorčava im život, te smatraju da se učenike nepotrebno maltetira njezinim apstraktnim, imaginarnim i nerazumljivim sadržajima.

Matematički pojmovi i sadržaji jesu apstraktni, ali su proizašli iz realnog svijeta i stoga je potrebna stalna povezanost s realnošću da bi ih približili djeci.

Nisu naša djeca nesposobnija od drugih kao što pokazuju neka međunarodna istraživanja.

Problem je u nečem drugom: uče je nepovezano i uče napamet, kako pravila tako i sam postupak rješavanja pojedinih zadataka.

Traže recepte. Mi se takvim njihovim „znanjem” ne bi smjeli zadovoljiti.

Teoretska znanja i pravila trebaju znati ali kad god je to moguće neka do njih dođu empirijski.

Npr. ako učeniku damo da konstruira trokut s duljinama stranica koje ne zadovoljavaju nužan uvjet on ga neće moći konstruirati.

Nakon nekoliko pokušaja uvidjet će da to ne može i „otkriti” zašto to ne može učiniti. Izreći će to, objasniti i zapamtiti - to je znanje.

Ako ga naučimo samo pravilo o odnosu stranica u trokutu bez dodatnog pojašnjenja, to je mrtvo slovo na papiru, to mu je još samo jedna nova informacija koju će izbrisati čim mu više ne bude trebala.

Učenici nauče neke definicije, ali pojma nemaju čemu služe i gdje ih primijeniti.

Najbolji primjer za to je definicija postotka. To nauči svaki učenik, ali riješiti zadatak s postotkom, znati što treba izračunati, što znači i čemu služi je problem.

Sjetimo se samo onog dobrog starog primjera:

ako je nešto poskupilo 10%, pa pojeftinilo 10%, kolika je konačna cijena u odnosu na početnu?

Većina učenika će odgovoriti da je cijena ostala ista.

Čak i kad ih na konkretnom primjeru uvjerimo da nije ostati ista malo tko će znati objasniti zašto se cijena promijenila.

Pokušamo li stvari poopćiti imamo još veći problem, kao i uvijek kad se brojevi zamjene slovima.

A upravo tu sposobnost poopćavanja, sposobnost razumijevanja i produktivnog znanje koje će moći povezati sa sličnim sadržajima i primijeniti u svakodnevnom životu, sposobnost sagledavanja uzročno-posljedičnih veza i korektnog zaključivanja stiču učeći matematičke sadržaje.

Zato im je ona toliko važna i zato je važno da učinimo sve da vide njezinu ljepotu i da je zavole.

Pri poučavanju djece neophodno je težiti tome da se kod njih postepeno sjedinjuje znanje s umijećem. Izgleda da je od svih znanosti jedino matematika sposobna da u potpunosti zadovolji ovaj zahtjev. I. Kant

Trebamo ih usmjeravati da više razmišljaju, istražuju, povezuju i da stečeno znanje znaju primijeniti u svakodnevnom životu.

Neki zadatci se mogu točno riješiti na više načina. To bi trebalo poticati kod učenika i posebno nagrađivati. Ne priznavanjem drugih i drukčijih postupaka se guši inovativnost i kreativnost učenika, te ga se potiče na učenje bez razmišljanja.

Zanimljivo je objašnjenje jednog učenika na onaj vječni upit: Zašto ovo moram učiti kad mi nikad u životu neće trebati? Njegov odgovor glasi:

Bitniji je način na koji te matematika uči razmišljati, nego sadržaj koji si naučio. Uči te da razmišljaš svojom glavom i da se pitaš: Zašto? Kako? ...

Uči te ekonomičnosti jer ti pokazuje kako najkraće doći do rješenja. Uči te analizi jer su sva ta rješenja rezultat mnogih izvedenica.

Matematika je jednostavno umjetnost razmišljanja, dovoljno apstraktna, dovoljno precizna, dovoljno mistična.

Modeliranje situacija

Što vrijedi učeniku da zna riješiti neki zadatak, ako ne zna izračunati koliko mu litara vode treba za napuniti bazen, kolika mu je kvadratura kuće ili koliko će jednog dana vraćati banci kamata...

Potrebno je da usvoji praktična znanja. Posebno je to važno u geometriji.

Geometriju jako loše znaju. Na prvoj godini im je taj kolegij jedan od težih, ni Matematička analiza, ni Linearna algebra im ne stvara toliko teškoća koliko im stvara geometrija.

To treba promijeniti, oni geometriju moraju osjetiti i razumjeti jer geometrija je beskrajno lijepa kada je razumiju.

*Neka ne ulazi onaj tko ne zna geometriju
(natpis na ulazu u Platonovu Akademiju)*

Učenici barataju velikim količinama informacija ali su te informacije najčešće nepovezane.

Npr. zašto djeca tako dugo razmišljaju kada im se postavi pitanje što je umnožak, a odgovor je skriven u samoj riječi “uMNOŽak”? Zar se u riječi umnožak ne krije korijen riječi množiti?

Imamo li u ovom nepovezivanju pojmova udjela i mi, jesmo li im dovoljno ukazali na određene sličnosti među riječima i dali objašnjenje koje bi učenicima pomoglo povezati i dublje razumjeti važne pojmove?

A i kada učenici usvoje neki pojam i aktivno ga koriste na satu matematike, zašto je onda tako veliki problem primijeniti ga na satu fizike i drugih predmeta? Uče li naša djeca matematičke pojmove zasebno, kao da se ti pojmovi koriste samo u matematici i nigdje drugdje?

Možda bi bilo dobro, na primjer, pri obradi ili spominjanju metode supstitucije objasniti im što znači supstituirati, odakle ta riječ dolazi i gdje se još koristi u svakodnevnom životu pa neka sami izvedu zaključak zašto se dana metoda zove metoda supstitucije.

Objašnjenje korijena novog pojma na satu matematike može učenicima pomoći da intuitivno shvate njegovu definiciju. A to je lijep početak za kreiranje prave, matematičke definicije i opažanja svojstava danog pojma.

U uvodnom kolegiju koji već godinama predajem na prvoj godini jasno uočavam gdje studenti imaju najviše problema, a napominjem da radim sa studentima koji su upisali studij Matematike, dakle koji je vole i koji su u osnovnoj i srednjoj školi bili među boljima ako ne i najbolji iz tog predmeta.

- *Misle da trebaju znati gomilu formula iz trigonometrije i geometrije*
- *Ne povezuju trigonometriju pravokutnog trokuta s općom definicijom trigonometrijskih funkcija preko funkcije namatanja (zašto sinus kuta ovisi samo o kutu, a ne i o duljinama stranica danog pravokutnog trokuta).*
- *Geometrijski riješiti jednadžbe ili nejednadžbu i objasniti zašto imaju ili nemaju rješenja.*

- *Povezati da jednostavni kamatni račun ima veze s linearnom funkcijom, a složeni kamatni račun s eksponencijalnom funkcijom.*
- *Povezati da je aritmetički niz restrikcija linearne, a geometrijski niz restrikcija eksponencijalne funkcije na domenu prirodnih brojeva.*
- *Uočiti da povećavanje za određeni konstantni iznos predstavlja linearnu funkciju, odnosno jedan aritmetički niz, dok svako umnažanje istim brojem predstavlja neki geometrijski niz.*

Primjer 1.

Tijelo pri padu u prvoj sekundi prijeđe 4 metra, a svake sljedeći sekunde prevaljeni put se povećava za 8 metara. Koliko dugo će tijelo padati s visine od 1024 metara? $S_n = 1024 \Rightarrow n = 16$.

Koliko dugo će tijelo padati ako se svake sljedeći sekunde prevaljeni put povećava 2 puta?

Primjer 2.

Ako list papira debljine 0,1mm prerežemo na dva dijela, pa svaki od ta dva dijela opet prerežemo na dva dijela, i tako napravimo 16 puta, izračunajte visinu stupca naslaganih tako dobivenih djelova.

$$a_{16} = 2^{15} = 32768 \text{ djelova}$$

$$0.1 \cdot 32768 \text{mm} = 3.2768 \text{km}$$

Kada bi to uradili 50 puta dobili bismo da visina naslaganih djelova iznosi $1.126 \cdot 10^8 \text{km}$ što je gotovo jednako udaljenosti Zemlje od Sunca.

Primjer 3.

Na dubini od 25m prosječna temperatura Zemlje je 9°C, a nakon toga na svaka 33m dubine raste za 1°C. Sa koje dubine izvire termalna voda temperature 70 °C? $a_{62} = 2038$ (treba primijetiti da je riječ o dva aritmetička niza)

- *Koristiti omjere i razmjere u najobičnijim životnim situacijama. (ulože u neki posao novac u omjeru 2:5, dobit je tolika i tolika, koliko će dobiti svatko od njih)*
- *Primijeniti pravilo smjere (od mlijeka s 3,8% masnoće i mlijeka s 0,9% masnoće treba napraviti 100 l smjese s 2,6% masnoće, koliko litara kojeg mlijeka treba uzeti).*

Kad god je to moguće treba se s njima igrati. Ima jako lijepih i poučnih pitalica i igrica kojima se potiče njihovo aktivno sudjelovanje i tjera ih se da razmišljaju, procjenjuju i objašnjavaju zapaženo.

Geometija, kominatorika, vjerojatnost su idealni poligoni za takvu vrstu nastave, mada se i za druge matematičke sadržaje može naći zgodnih životnih primjera koji ih opisuju. Evo nekih od njih.

Lopov u knjižnici

Jedan od 6 studenata: A,B,C,D,E,F ukrao je knjigu iz knjižnice. Svaki od njih je pitan koga je od preostalih studenata vidio u knjižnici i svi su rekli istinu osim lopova (pretpostavljamo da ako su se dvojica našla u knjižnici u isto vrijeme da su vidjeli jedan drugoga). A je rekao da je vidio B i E, B je rekao da je vidio A i F, C da je vidio D i F, D da je vidio A i F, E da je vidio A i D, te F da je vidio C i B. Tko je lopov?

Prikaže se u koordinatnom sustavu i vrlo lako se uoči gdje je narušena simetričnost relacije i koje se slovo uvijek pojavljuje kod parova gdje je to narušeno-lopov je student D

Sljedeći primjer nam ilustrira kako prividno poštena podjela između prvog i drugog igrača uopće nije poštena jer je jako velika razlika u vjerojatnosti dobitka prvog i drugog igrača.

Ovo je idealna igra koja se može odigrati s djecom u razredu.

Igra: Razlika kockica

Dva igrača naizmjenice bacaju dvije kockice. Kod svakog bacanja trebaju oduzeti manji broj od većega. Najmanja moguća razlika je 0 (ako se dobiju isti brojevi), a najveća je 5 (ako se dobiju 1 i 6).

Ako je razlika kockica 0, 1 ili 2, prvi igrač dobiva bod, a ako je razlika 3, 4 ili 5, drugi igrač dobiva bod.

Par treba odigrati 36 bacanja. Što vam se čini, imaju li oba igrača jednake šanse za pobjedu?

U pronalaženju odgovora sigurno će im pomoći sljedeća tablica. Sada lako mogu izbrojiti koliko se puta pojavila koja razlika i izračunati kolika je vjerojatnost da se pojavi svaka pojedina razlika.

Razlika kockica		Kockica 2					
		1	2	3	4	5	6
Kockica 1	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

Paradoks Montyja Halla

Paradoks Montyja Halla je vjerojatnosna zagonetka koja se temelji na igri iz američkog show programa „Let's Make a Deal“, a dobila je ime po domaćinu showa, Montyju Hallu.

U TV igri na sreću biramo jedna od triju zatvorenih vrata. Iza samo jednih vrata nalazi se nagrada. Nakon što odaberemo vrata, voditelj otvori jedna od preostalih vrata, pokaže da iza njih nema nagrade, te nas pita želimo li promijeniti izbor. Imamo li veće šanse za pobjedu ako promijenimo izbor?

Budući da igrač ne zna koja od preostalih vrata kriju nagradu, većina će pretpostaviti da je svejedno koja od zatvorenih vrata odaberemo, te da nema razloga mijenjati izbor. No, to nije istina, igrač bi trebao promijeniti izbor jer time šansu za pobjedu povećava s $1/3=33\%$ na $2/3=66\%$. Ovaj problem je postao jako popularan baš zbog toga što se čini da se vjerojatnost ne mijenja, čak je i neke poznate matematičare bilo teško uvjeriti u točnost dobivenog rješenja.

Kada je 1990. godine rješenje objavljeno u časopisu Parade, tisuće čitatelja poslale su žalbe tvrdeći da je objavljeni rezultat netočan. U odgovoru, autorica članka pozvala je sve nastavnike matematike u školama da s učenicima naprave sličan pokus sa šalicama i novčićem. Trebali su 200 puta odigrati situaciju pogađanja bez promjene nakon otkrivene prazne šalice, a zatim 200 puta s promjenom izbora.

Jedan način kako točno rješenje može postati više intuitivno je zamisliti isti slučaj sa 100 vrata, gdje nakon što odaberemo jedna, voditelj otvori još 98 i pokaže da iza njih nije nagrada. Sad se nekako čini da su ipak šanse da smo prvi put izabrali jedna od pogrešnih vrata (vjerojatnost za to je čak 99%) i da je dobra ideja promijeniti odluku.

Matematički se ovaj problem rješava pomoću Bayesove formule.

Matematika je – znanost mladih. Drugačije ne može ni biti. Bavljenje matematikom predstavlja takvu gimnastiku uma, da je za nju potrebna sva gipkost i izdržljivost mladosti. N. Viner

Pokretač matematike nije zaključivanje, nego mašta. A. DeMorgan

Nemoguće je biti matematičar, a da nisi u duši i pjesnik. S. Kovalevskaya

Hvala na pozornosti