

Planiranje u nastavi matematike - Podatci

Prof.dr.sc. Sanja Varošaneć

PMF, Zagreb

rujan 2014.

Ciklusi NOK-a

4.	standardna devijacija linearna veza dviju varij.	Interval pouzdanosti	vjerojatnost složenih događaja normalna razdioba
3.	relat. frekvencije linijski dijagram brkata kutija, graf	kvartili, mod, IQR vjerojatnost kao rel. frekv. događaja	
2.	aritm. sredina, medijan, raspon tablice, piktogram stupčasti dijagram	frekvencija, kružni dijagram, sustavna lista	
1.	prikazati – tumačiti jednostavno prebrojavanje osnovni jezik vjerojatnosti	vjerojatnost događaja u jedn. situacijama	

- Struktura ciklusa: **koncentrična** - u višem se ciklusu pojmovi i procesi iz prethodnog ciklusa proširuju i primjenjuju u složenijim situacijama uz usvajanje novih koncepata

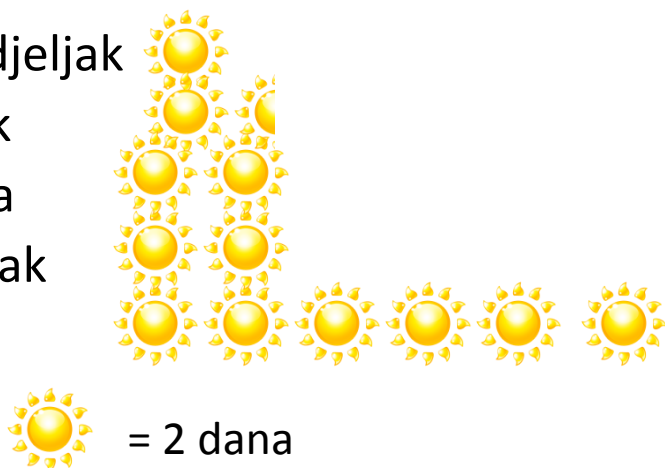
Osnovna škola (plavo označeni se pojmovi već obrađuju u OŠ)

Tablica

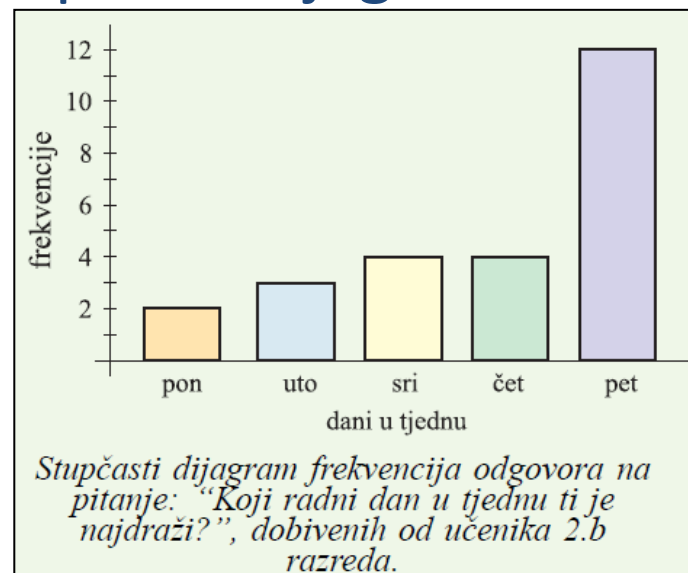
najdraži radni dan u tjednu		frekvencija
ponedjeljak		2
utorak		3
srijeda		4
četvrtak		4
petak		12

- Piktogram

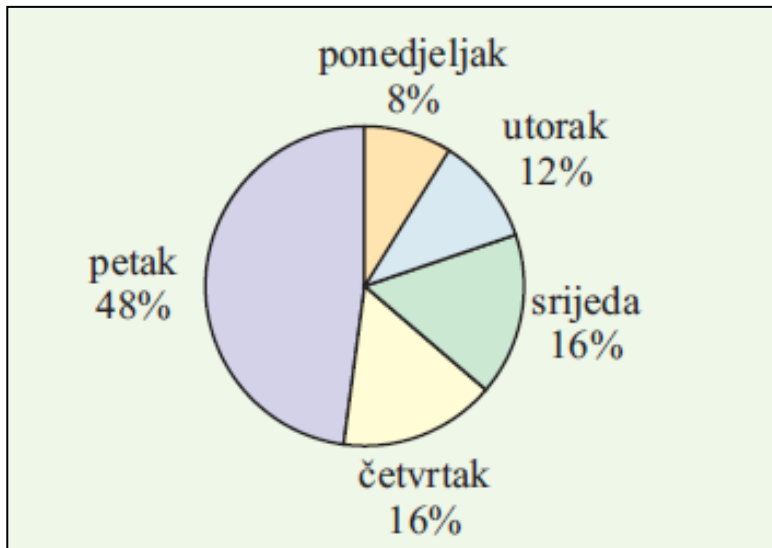
ponedjeljak
utorak
srijeda
četvrtak
petak



- Stupčasti dijagram



- Kružni dijagram



- Sustavna lista

Primjer. Napiši sve načine na koje mogu Dado, Mira i Klara stati u red pred blagajnom kina?

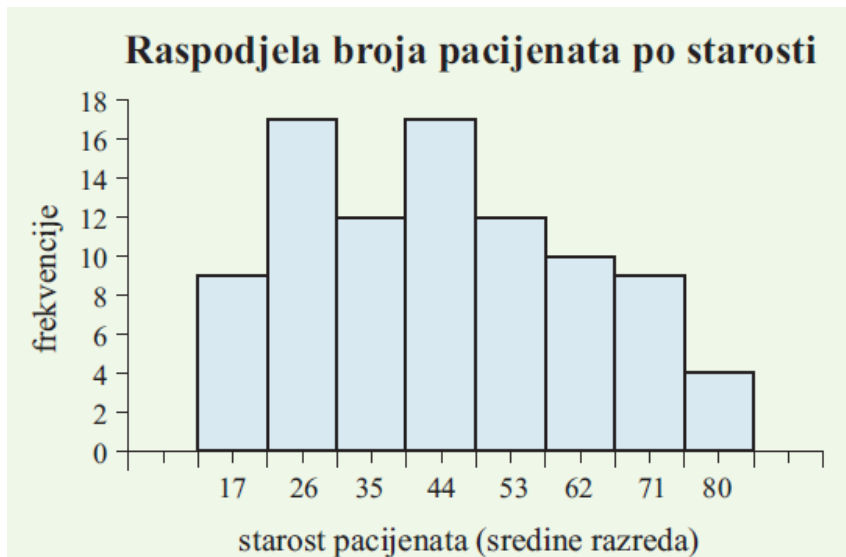
Odg: DMK, DKM, MDK, MKD, KDM, KMD (uočiti pravilnost i princip nabiranja)

- **Tablica relativnih frekvencija**

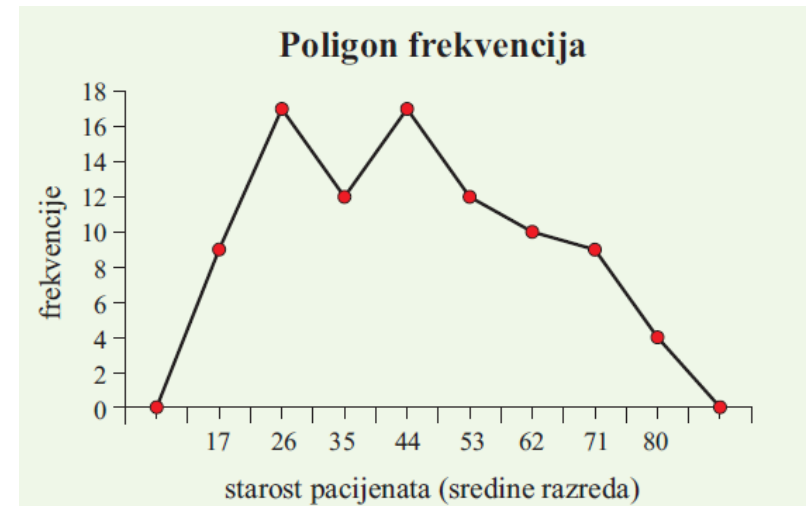
-primjer grupiranja podataka u razrede jednake širine (neprekidni numerički podatci)

starost pacijenta	precizne granice razreda	frekvencija	relativna frekvencija
13-21	12.5-21.5	9	$\frac{9}{90} = \frac{1}{10}$
22-30	21.5-30.5	17	$\frac{17}{90}$
31-39	30.5-39.5	12	$\frac{12}{90}$
40-48	39.5-48.5	17	$\frac{17}{90}$
49-57	48.5-57.5	12	$\frac{12}{90}$
58-66	57.5-66.5	10	$\frac{10}{90}$
67-75	66.5-75.5	9	$\frac{9}{90}$
76-84	75.5-84.5	4	$\frac{4}{90}$

- **Stupčasti dijagram**



- **Linijski dijagram (poligon frekvencija)**



Parametri niza numeričkih podataka

- Aritmetička sredina

-trenutno se obrađuje u OŠ samo za negrupirane podatke

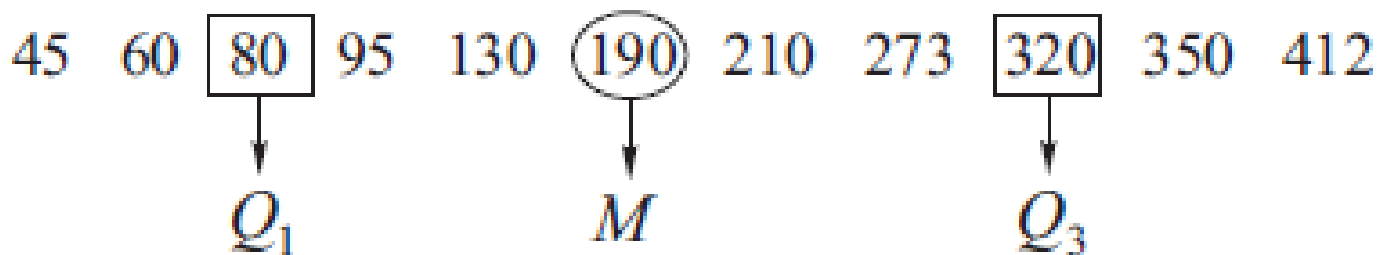
- Raspon – razlika najvećeg i najmanjeg podatka

- Mod – podatak s najvećom frekvencijom

Parametri niza numeričkih podataka

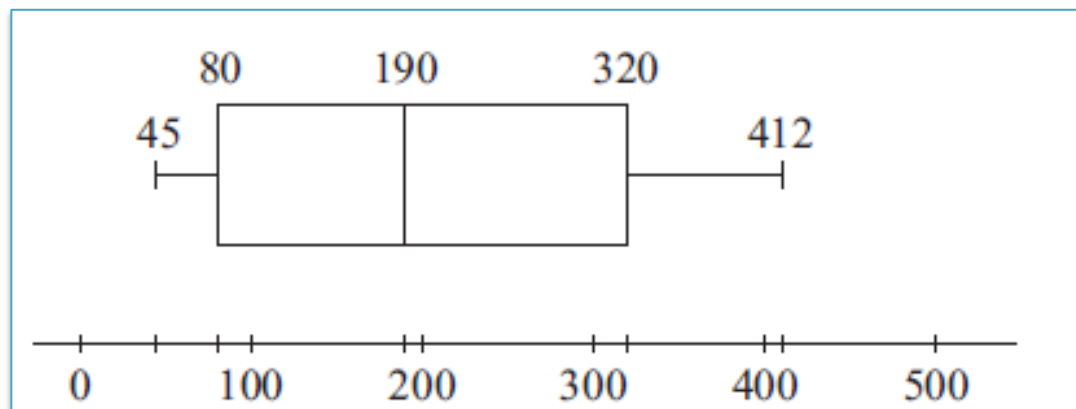
- Medijan, kvartili – donji i gornji, interkvartilni raspon

Primjer. Zadani su podatci 80, 320, 412, 130, 210, 273, 190, 95, 350, 60, 45. Odredimo medijan, donji i gornji kvartil ovog skupa podataka, te interkvartilni raspon.



“Brkata” kutija ili
dijagram pravokutnika

$IQR = \text{gornji kvartil} - \text{donji kvartil}$



- **Četvrti ciklus – strukovne škole**

- Usvojeno gradivo iz osnovne škole primjenjuje se u nešto složenijim problemima
- Uporaba računalnih programa

- **Četvrti ciklus- gimnazije**

- Naglasak je na numeričkim podacima
- Vjerojatnost u složenim situacijama
- Uporaba računalnih programa
- U nekoliko godina

Planiranje -koraci

- Proučiti gradivo koje su učenici trebali usvojiti u prethodnim razredima, a koje je vezano uz temu
- Proučiti novo gradivo sa stanovišta matematike kao struke
- Postaviti cilj nastavne teme
- Odrediti niz koraka koji će učenike dovesti do ostvarenja cilja
- Svaki od koraka metodički osmisliti za izvedbu

Mjere raspršenosti niza podataka

- U OŠ – nominalna, ordinalna obilježja
diskretna numerička obilježja
(negrupirani podatci)

Proširenje: grupirani numerički podatci,
njihove srednje vrijednosti,
mjere raspršenosti (standardna
devijacija i koeficijent varijacije)

Mjere raspršenosti niza podataka

- Cilj: Izračunati standardnu devijaciju niza podataka u negrupiranom i grupiranom obliku i odrediti poziciju podatka u nizu.
- Prethodno gradivo: tablica frekvencija, aritmetička sredina

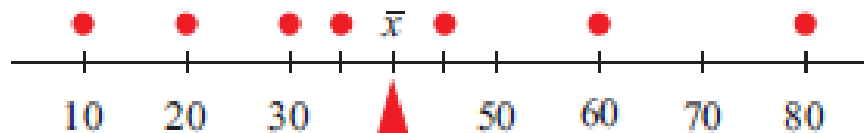
Mjere raspršenosti niza podataka

- **Karakteristični zadatci:**

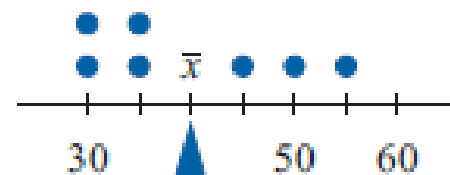
1. Dan je niz numeričkih podataka. Izračunaj mu aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju.
2. Učenici 2a razreda pisali su testove iz matematike i iz povijesti. Testovi iz matematike imaju aritmetičku sredinu 40 bodova uz standardnu devijaciju 2, dok testovi iz povijesti imaju aritmetičku sredinu 36 bodova i standardnu devijaciju 8 boda. Ana je na oba osvojila 44 boda. Možemo li tvrditi da je Ana jednako uspješna na oba testa?

Mjere raspršenosti niza podataka – matematička pozadina

- Sinonimi: mjere disperzije, mjere varijabilnosti
- Raspon, srednje odstupanje, standardna devijacija, koeficijent varijabilnosti



Podaci A



Podaci B

Mjere raspršenosti niza podataka – matematička pozadina

Standardna devijacija: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

gdje je n ukupan broj podataka, a $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$
je aritmetička sredina tog niza.

Mjere raspršenosti niza podataka – matematička pozadina

- Funkcija $f(t) = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - t)^2}{n}}$
postigne minimum u \bar{x}
- Čebiševljev teorem: (opisno) Udio podataka koji se nalaze u intervalu k standardnih devijacija oko aritmetičke sredine je najmanje $1 - 1/k^2$ gdje je k veći od 1.
 $k=2$ 75%, $k=3$89%
- Pravilo “3 sigme” (v. normalnu razdiobu)

Mjere raspršenosti niza podataka – matematička pozadina

- z-vrijednost

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$$

- Koeficijent varijabilnosti

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

- Zadatak. Za vrijeme epidemije gripe, u jednom danu ordinaciju primarne medicine posjetilo je 90 pacijenata. Njihove su godine starosti dane peteljka-list dijagramom. Grupiraj podatke u 8 razreda jednake širine i izračunaj standardnu devijaciju tako grupiranih podataka.

1	34556789
2	0555577888889999
3	0012233455778
4	12223334455667788
5	001123345577
6	011333334588
7	011223589
8	01

Legenda:

1 | 4 = 14

- Od 13 do 81 ima $81-13+1=69$ vrijednosti.
- Širina razreda je 9 zbog $69:8=8.625$.

starost pacijenta	precizne granice razreda	frekvencija	sredina razreda
13-21	12.5-21.5	9	17
22-30	21.5-30.5	17	26
31-39	30.5-39.5	12	35
40-48	39.5-48.5	17	44
49-57	48.5-57.5	12	53
58-66	57.5-66.5	10	62
67-75	66.5-75.5	9	71
76-84	75.5-84.5	4	80

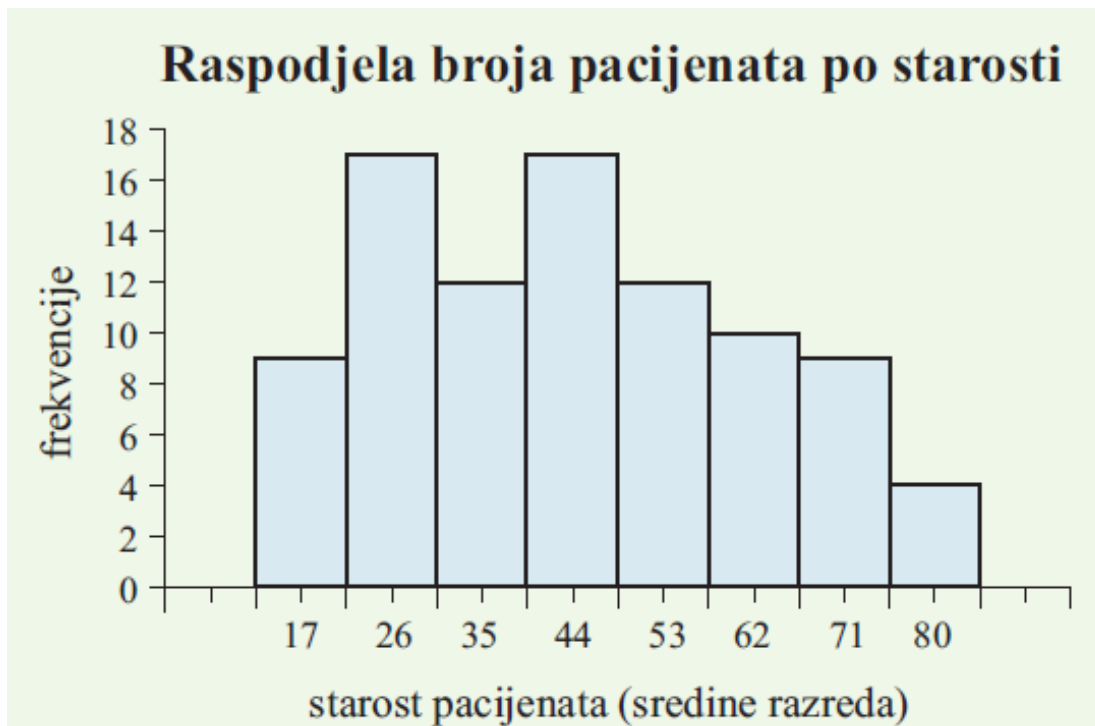
starost pacijenta	precizne granice razreda	frekvencija f_i	sredina razreda x_i	$f_i x_i$
13-21	12.5-21.5	9	17	153
22-30	21.5-30.5	17	26	442
31-39	30.5-39.5	12	35	420
40-48	39.5-48.5	17	44	748
49-57	48.5-57.5	12	53	636
58-66	57.5-66.5	10	62	620
67-75	66.5-75.5	9	71	639
76-84	75.5-84.5	4	80	320
zbroj		90		3978

Aritmetička sredina: $3978:90=44.2$

starost pacijenta	precizne granice razreda	frekvencija f_i	sredina razreda x_i	$f_i x_i$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
13-21	12.5-21.5	9	17	153	6658.56
22-30	21.5-30.5	17	26	442	5631.08
31-39	30.5-39.5	12	35	420	1015.68
40-48	39.5-48.5	17	44	748	0.68
49-57	48.5-57.5	12	53	636	929.28
58-66	57.5-66.5	10	62	620	3168.4
67-75	66.5-75.5	9	71	639	6464.16
76-84	75.5-84.5	4	80	320	5126.56
zbroj		90		3978	28994.4

- Standardna devijacija je $\sigma = \sqrt{\frac{28994.4}{90}} = 17.948 = 17.9$

- Dodatak rješenju - grafički prikaz:



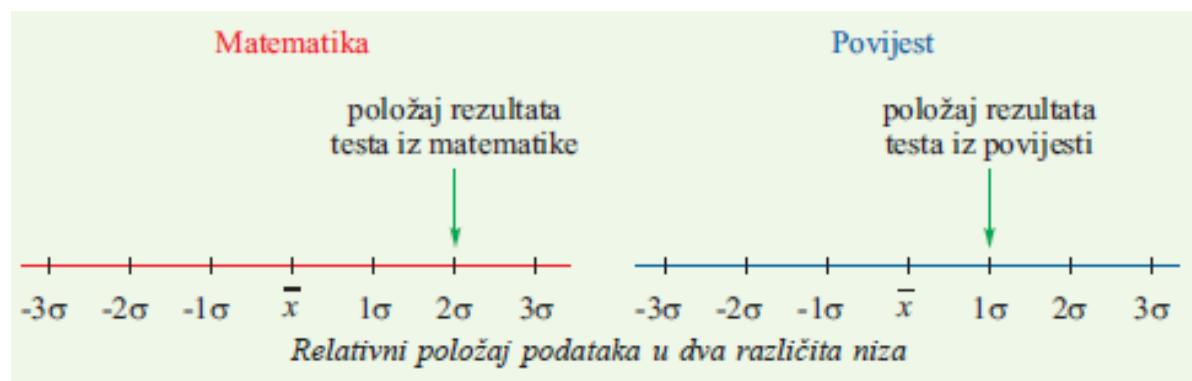
Rješenje 2. zadatka.

- relativni položaj podatka u nizu – standardizacija pomoću stan. devijacije

Test iz matematike:
$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{44 - 40}{2} = 2$$

Test iz povijesti:
$$z = \frac{44 - 36}{8} = 1$$

Ana je uspješnija u testu iz matematike.



Normalna razdioba

- Cilj: primijeniti normalnu razdiobu
- Prethodno gradivo: grafički prikazi podataka pomoću stupčastog dijagrama, histograma, numerički pokazatelji (aritmetička sredina i standardna devijacija), osnovni jezik vjerojatnosti, rad s džepnim računalom, koordinatni sustav i graf funkcije

Normalna razdioba

Karakteristični zadatci (zadatci vodilje):

- Za potrebe nekog medicinskog istraživanja istraživač želi raditi s osobama čiji tlak je unutar granica tlaka za 60% populacije oko sredine. O kojim se granicama tlaka radi?

Podatci o visini dijastoličkog krvnog tlaka imaju normalnu razdiobu čija je sredina 120, a standardna devijacija je 8. (zadani je postotak (vjerojatnost), traže se granice)

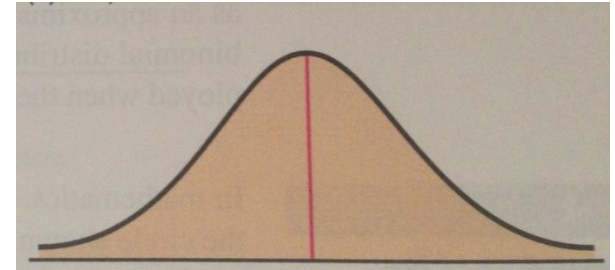
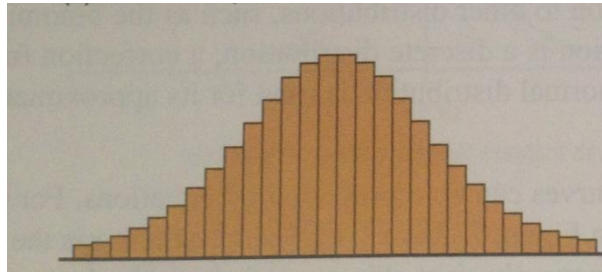
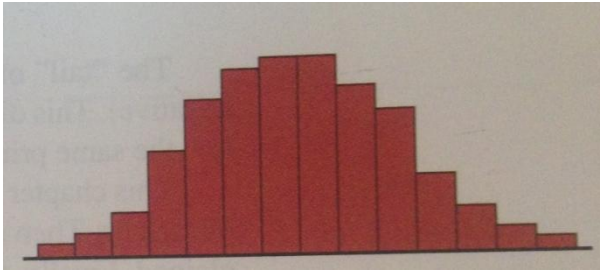
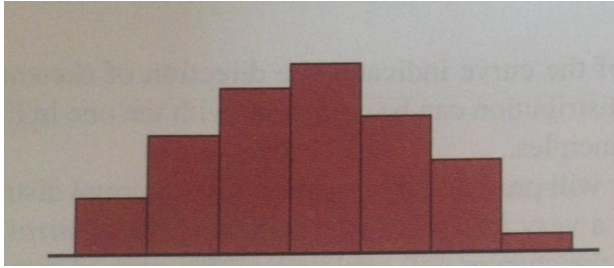
Normalna razdioba

- Prosječno vrijeme čekanja u redu u banci je 27 minuta uz standardnu devijaciju od 6 minuta. Izračunaj vjerojatnost da klijent banke provede u čekajući u redu između 18 i 30 minuta.

Pretpostavljamo da vrijeme čekanja u redu ima normalnu razdiobu.

(zadane su granice, traži se vjerojatnost da je podatak u tim granicama)

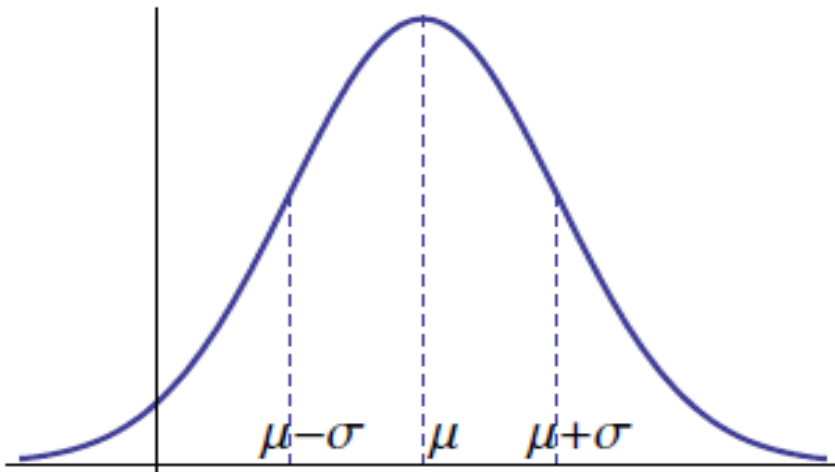
Normalna razdioba



Normalna razdioba – što znamo o njoj kao matematičari

Oznaka:

$$N(\mu, \sigma^2)$$



funkcija gustoće:

Veza s vjerojatnošću događaja

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

Normalna razdioba – što znamo o njoj kao matematičari

Vrijednosti primitivne funkcije za jediničnu normalnu razdiobu $N(0,1)$ su tabelirane.

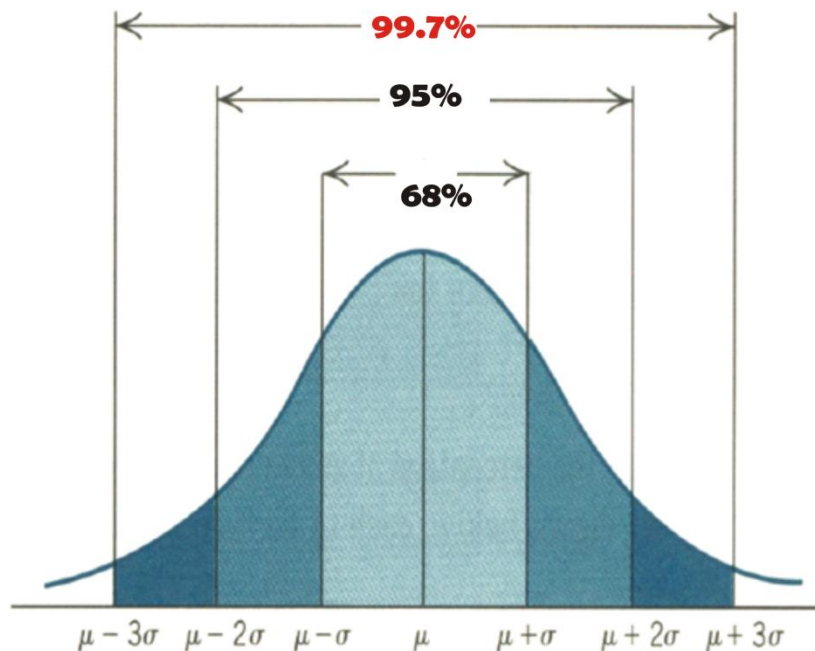
Danas – prelazak na računanje pomoću kalkulatora.

Veza normalne i jedinične normalne razdiobe:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Svojstva: zvonolika krivulja,
vodoravna asimptota je os x,
krivulja je simetrična,
površina ispod grafa je 1,
maksimum se postiže u μ
pravilo 3-sigma

Centralni granični teorem



Koraci do ostvarenja cilja (zadatci)

- **Zadatak 1:** Identificirati svojstva normalne razdiobe. Transformirati normalnu razdiobu u jediničnu (standardnu) normalnu razdiobu i obratno.
- **Zadatak 2:** Izračunati površinu ispod grafa jedinične (standardne) normalne razdiobe ako je zadana vrijednost argumenta.
- **Zadatak 3:** Odrediti vrijednost argumenta ako je zadana površina ispod grafa jedinične normalne razdiobe.
- **Zadatak 4:** Primijeniti normalnu razdiobu u rješavanju problema (matematičkih, problema iz drugih područja i iz svakodnevnog života).

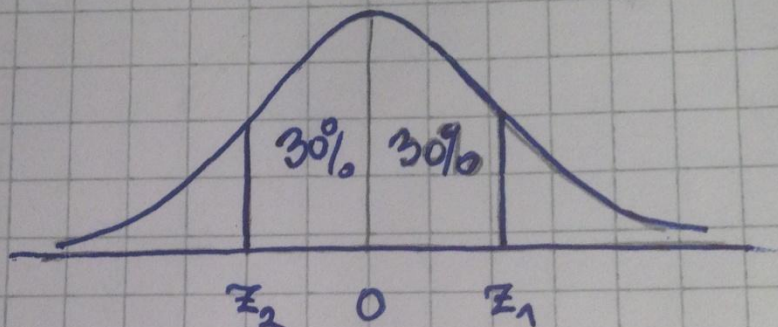
Rješenje 1. zadatka.

$$\mu = 120$$

$$\sigma = 8$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x = z \cdot \sigma + \mu$$



$$z_1 = 0.84 \text{ (iz tablica)}$$

$$z_2 = -0.84$$

$$x_1 = 0.84 \cdot 8 + 120$$

$$x_2 = 120 - 0.84 \cdot 8$$

$$x_1 = 126.72$$

$$x_2 = 113.28$$

Granice tlaka su $113.28 \leq x \leq 126.72$

Linearna veza dviju varijabli ili pravac regresije

- Cilj: prepoznati približnu linearnu vezu dviju varijabli, odrediti koeficijente te veze i upotrebljavati ju pri modeliranju
- Prethodno gradivo: crtanje točaka i pravaca u koordinatnom sustavu, očitavanje koordinata točaka na pravcu, prikazivanje i tumačenje podataka danih tablicom, vještina rada s džepnim računalom ili s proračunskim listama

Linearna veza dviju varijabli ili pravac regresije

- **Zadatak vodilja:** Istraživač želi odrediti postoji li veza između starosti i sati koje ispitanik provede baveći se nekom sportskom aktivnosti. Anketirajući 8 ispitanika, dobio je ove podatke:

dob (x_i)	18	19	25	30	33	38	49	53
sati vježbanja (y_i)	10	10	7	6	6	5	4	1

Izračunaj jednadžbu regresijskog pravca i procijeni koliko bi sati vježbanja imao 40-godišnjak.

Pravac regresije – što o njemu znamo kao matematičari

- Jednostavna linearna regresija - jednadžba pravca regresije je

$$y = ax + b$$

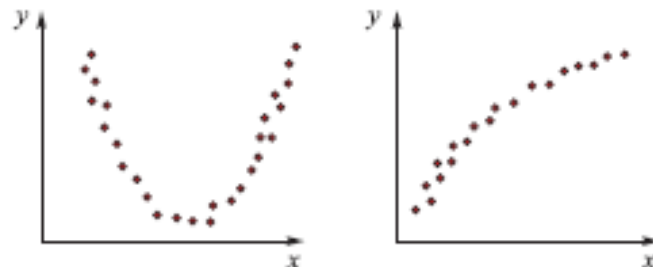
$$a = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum y_i}{n} - a \cdot \frac{\sum x_i}{n}$$

- Dobivene su metodom najmanjih kvadrata (zbroy kvadrata odstupanja je minimalan)
- Dokazi nisu primjereni za srednješkolce jer se zasnivaju na ispitivanju toka funkcije

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

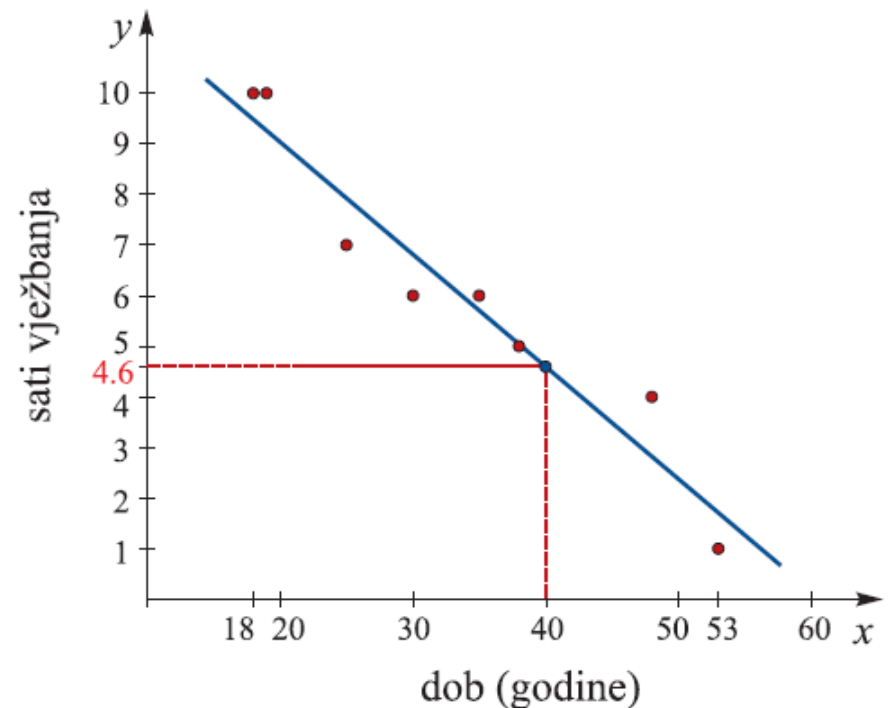
- Dodatak – korelacija dviju varijabli
- Druge vrste veza – primjeri iz ekonomije, biologije, psihologije



Linearna veza dviju varijabli ili pravac regresije

Rješenje zadatka: iz danih podataka izračunamo potrebne sume
– upotreba kalkulatora ili proračunskih tablica

$$\begin{aligned}\sum x_i &= 265, \\ \sum y_i &= 49, \\ \sum x_i^2 &= 9953, \\ \sum x_i y_i &= 1362, \\ a &= -0.222, \\ b &= 13.48, \\ \hat{y} &= -0.222x + 13.48;\end{aligned}$$



Odg. 40-godišnjak bi se bavio sportom 4.6 sata tjedno.

KRAJ

UGODAN DAN!