

# **Metode aktivne nastave matematike u osnovnoj školi: UČENJE OTKRIVANJEM POMOĆU MATEMATIČKIH EKSPERIMENATA**

## **Primjer: KRUG, KUGLA I NJIHOVE MJERE**

prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija  
Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek  
Sveučilište u Zagrebu  
[cizmesij@math.hr](mailto:cizmesij@math.hr)

25. travnja 2014.

# **1. KAKO ORGANIZIRATI NASTAVU MATEMATIKE?**

- metode aktivne nastave  
matematike -**

# **1.1. Učeničke aktivnosti kao atomi nastave matematike**

# SUVREMENA NASTAVA MATEMATIKE

Obično je opisana sintagmom:

## NASTAVA ORIJENTIRANA UČENICIMA

To podrazumijeva **metode aktivne nastave**, tj:

- dominantnu učeničku (a ne učiteljevu) aktivnost pri:
  - izgradnji (konstrukciji) matematičkih koncepata i otkrivanju matematičkih zakonitosti (pravilnosti, pravila)
  - uvježbavanju matematičkih postupaka i usustavljivanju obrađenih matematičkih sadržaja (kreativno vježbanje i ponavljanje)
- razvijanje odgovornosti učenika za vlastiti uspjeh i napredovanje u matematici

# UČENIČKE AKTIVNOSTI U NASTAVI MATEMATIKE

Nastava matematike treba biti strukturirana od niza planiranih, organiziranih i svrsishodnih **učeničkih aktivnosti** u kojima učenici **rade matematiku**:

- uočavaju i istražuju pravilnosti i zakonitosti
- uspostavljaju i istražuju veze i odnose (relacije) među promatranim objektima i situacijama
- povezuju matematičke koncepte s njima bliskim smislenim situacijama i problemima iz realnog svijeta i svakodnevnog života
- odabiru i primjenjuju različite matematičke strategije i metode
- uvježbavaju različite matematičke postupke (algoritme) i tehnike

# AKTIVNI GLAGOLI KOJIMA OPISUJEMO UČENIČKE AKTIVNOSTI

**Dok** rade matematiku, učenici:

- istražuju
- ispituju
- naslućuju
- rješavaju
- potvrđuju
- opravdavaju
- uvjeravaju se
- predstavljaju / prikazuju
- primjenjuju
- iskazuju / formuliraju
- otkrivaju
- konstruiraju
- objašnjavaju / argumentiraju
- predviđaju
- razvijaju
- opisuju
- rabe / koriste
- dokazuju
- ...

# METODE UČENJA I POUČAVANJA MATEMATIKE

Navedeni opći glagoli jasno određuju metode učenja i poučavanja matematike.

Učeničke aktivnosti moraju biti takve da od učenika zahtijevaju:

- višu razinu mišljenja, tzv. **refleksivno mišljenje**
- razumijevanje problema, odnosno situacije
- misaono predstavljanje (vizualizaciju) problema, odnosno situacije
- **aktivno razmišljanje i zaključivanje** o matematičkim idejama uključenima u aktivnost

**Važno!!**

Učenje i poučavanje matematike **ne smije** se svesti na učeničko:

- slušanje nastavnika
- prepisivanje tuđih (nastavnikovih ili drugih učenika) ideja i rješenja s ploče
- memoriranje definicija, pravila i gotovih algoritama
- drilanje pojedinih (tipova) zadataka

# METODE UČENJA I POUČAVANJA MATEMATIKE (2)

Zadaća je nastavnika stvoriti pozitivno ozračje u kojem se učenike potiče na:

- **istraživanje i primjenu matematičkih ideja i koncepata**
- **suradnju i učenje jednih od drugih**

Produktivna kultura nastave matematike uključuje i ova načela:

- **učničke matematičke ideje su “razredna valuta”**
  - ideja svakog učenika ima potencijal pridonijeti nečijem učenju matematike i kao takva zaslužuje uvažavanje i povratnu informaciju od nastavnika
- **učenici imaju autonomiju u izboru metoda za rješavanje problemskih zadataka**
  - više različitih metoda omogućuje njihovu usporedbu i raspravu o njihovoj efikasnosti i racionalnosti u drugim (matematičkim) situacijama
- **učničke pogreške vrijedna su prilika za učenje**
  - učničke pogreške otvaraju mogućnost za ispitivanje pogrešnih koncepcija (miskoncepcija) i pogrešaka u zaključivanju i podižu razinu analitičkih sposobnosti svih učenika
  - pogreške ne smijemo “gurati pod tepih” već ih treba konstruktivno upotrijebiti u učenju i poučavanju matematike



# METODE UČENJA I POUČAVANJA MATEMATIKE (2)

Ovakva paradigma podrazumijeva:

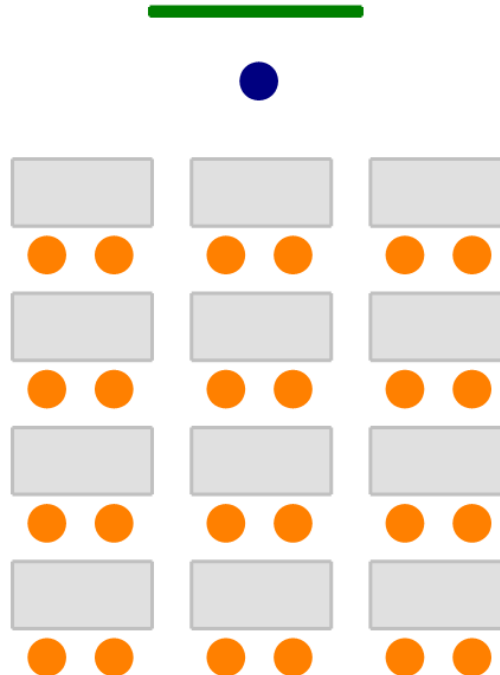
- izmijenjenu ulogu učitelja
  - **učitelj kao organizator (menadžer) procesa učenja i poučavanja, a ne kao (jedini) autoritet znanja**
- upotrebu raznolikih i raznovrsnih nastavnih sredstava i izvora znanja, a ne više samo udžbenika i zbirki zadataka

## **1.2. Socijalni oblici nastave matematike**

# SOCIJALNI OBLICI NASTAVE

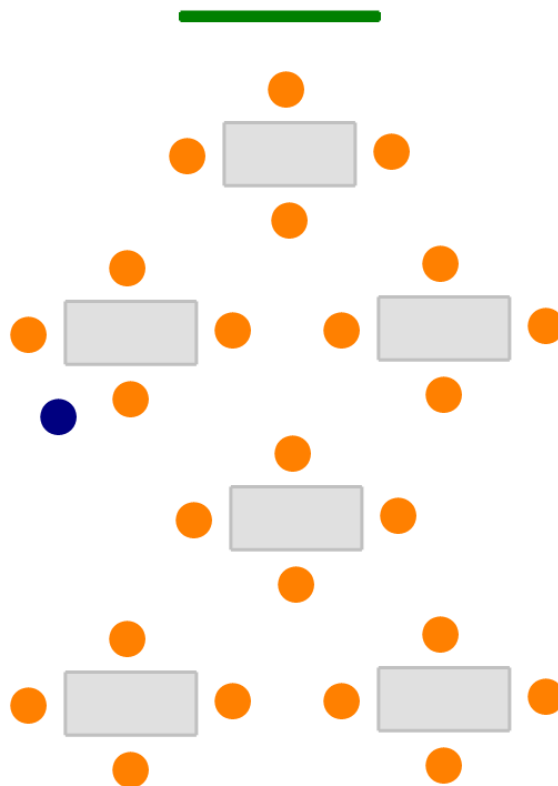
Aktivnosti razlikujemo i prema **socijalnom obliku nastave** u kojem se odvijaju:

- **aktivnosti za cijeli razred** (frontalna nastava)
  - cijeli razredni odjel je jedna cjelina



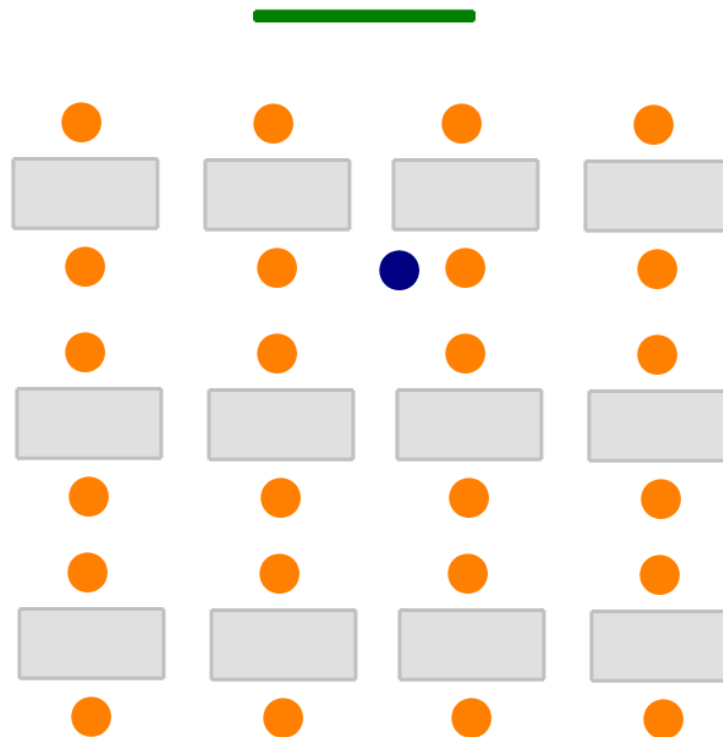
## SOCIJALNI OBLICI NASTAVE (2)

- **aktivnosti za rad u skupinama s tri ili više učenika** (diferencirana nastava)
  - razredni odjel je fizički podijeljen u nekoliko skupina učenika koji aktivnost izvode zajednički



## SOCIJALNI OBLICI NASTAVE (3)

- **aktivnosti za rad u učeničkom paru** (diferencirana nastava)



- **individualne učeničke aktivnosti** (individualni rad učenika)

## **1.3. Matematički eksperiment kao metoda otkrivanja matematičkih zakonitosti**

# OTKRIVANJE MATEMATIČKIH ZAKONITOSTI EKSPERIMENTOM

## MATEMATIČKI EKSPERIMENT

= otkrivanje matematičkih zakonitosti na konačno mnogo konkretnih primjera, obično uz zaključivanje nepotpunom indukcijom

Možemo ga provesti na razne načine:

- analizom zadane matematičke situacije na primjerima njenih pojedinačnih elemenata ili klasa elemenata
  - uvrštavanjem konkretnih vrijednosti u formulu
  - razmatranjem pojedinačnih matematičkih objekata ili klasa objekata (specijalizacija, konkretizacija, posebni slučajevi i dr.)
  - i dr.
- uz pomoć konkretnih fizičkih didaktičkih materijala (objekata)
  - mjerenjem i aproksimacijom
  - izrezivanjem škarama i spajanjem / lijepljenjem
  - i dr.

# OTKRIVANJE MATEMATIČKIH ZAKONITOSTI EKSPERIMENTOM (2)

## MATEMATIČKI EKSPERIMENT (nastavak)

- uz pomoć tehnologije
  - džepnog računala
  - alata za izradu proračunskih tablica
  - softvera dinamične geometrije
  - CAS alata
  - i dr.



# OTKRIVANJE MATEMATIČKIH ZAKONITOSTI EKSPERIMENTOM (3)

## MATEMATIČKI EKSPERIMENT PRIDONOSI:

- aktivnosti učenika i zanimljivosti nastave
- razvoju učničkih organizacijskih vještina
- razvoju vještina suradničko-timskog rada
- razvoju komunikacijskih vještina (usmena, pisana i vizualna komunikacija)
- razvoju sposobnosti analitičkog mišljenja (analiza i sinteza situacije)
- razvoju sposobnosti apstrakcije i generalizacije (zaključivanje nepotpunom indukcijom, analogijom i generalizacijom)

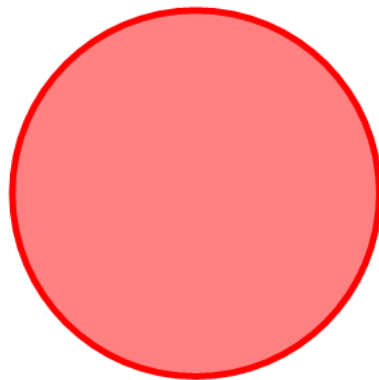
## MATEMATIČKI EKSPERIMENT PODRAZUMIJEVA:

- dobru nastavnikovu pripremu i organizaciju
- pripremu didaktičkih materijala

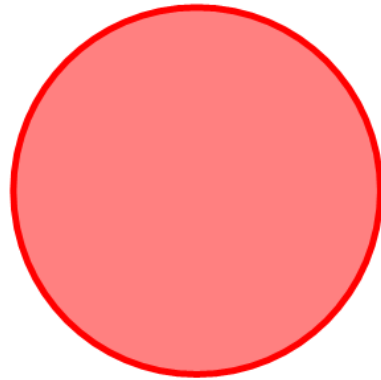
## **2. PRIMJERI UČENIČKIH AKTIVNOSTI OTKRIVANJA MATEMATIČKIH ZAKONITOSTI EKSPERIMENTOM**

**- Krug, kugla i njihove mjere -**

## **2.1. KRUG I KRUŽNICA**



## 2.1.1. Opseg kruga



# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE

## AKTIVNOST 1. Eksperiment mjerenjem fizičkih objekata

### Cilj aktivnosti:

- učenici će, radeći u timu, mjerenjem i računanjem “otkriti” vezu opsega kruga i njegovog polumjera

### Oblik rada:

- suradničko-timski rad učenika u četveročlanim timovima, u obliku “gostionice”

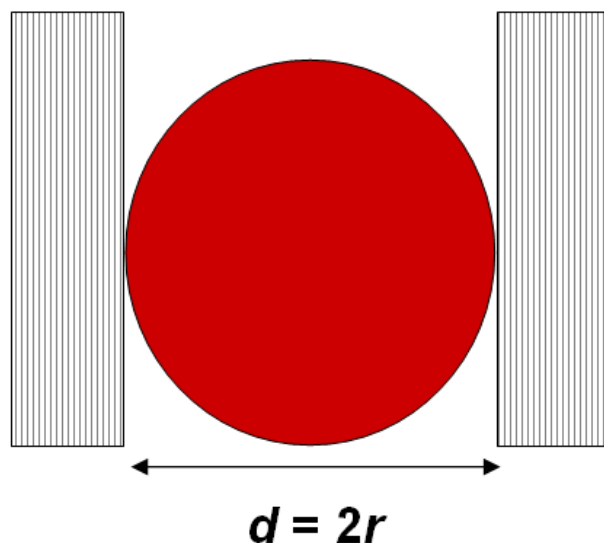
### Potrebni materijal:

- fizički objekti oblika valjka i/ili (krnjeg) stošca (poklopci, vaze, čaše, konzerve i sl. različitih promjera)
- konac / špaga
- metar (označeno ravnalo)
- dvije veće debele knjige tvrdih korica
- nastavni listići za svakog učenika s tablicama za zapisivanje rezultata mjerenja i zaključaka

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (2)

## Tijek aktivnosti:

- učenike podijelimo u timove
- **s učenicima kritički raspravljamo na koji način što preciznije izmjeriti promjer i opseg kruga, pri čemu oni daju svoje različite prijedloge, te dogovaramo primjerene mjerne jedinice (milimetri)**
- učenici mjere promjer  $d$  predmeta kružnog oblika, postavljajući ih između dviju uspravnih debljih knjiga uz rub stola
- izmjerene promjere učenici bilježe u pripremljenu tablicu



# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (3)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

- učenici mjere “opseg” predmeta tako da oko njihove “osnovke” omotaju konac ili špagu i na koncu / špagi označe puni krug
- učenici uz pomoć ravnala mjere duljinu  $o$  konca / špage do oznake (opseg kruga)
- izmjerene veličine učenici upisuju na odgovarajuća mjesta u tablici
- učenici za svaki krug računaju zbroj  $d + o$ , razliku  $o - d$ , umnožak  $d \cdot o$  i količnik  $o : d$  (uz pomoć džepnog računala ili alata za izradu proračunskih tablica) te formiraju tablicu s izračunatim vrijednostima
- **bitan korak je rasprava o broju decimala pri zaokruživanju i smislenosti tog broja s obzirom na nepreciznost pri mjerenju (količnike treba zaokružiti na jednu ili najviše dvije decimale)**
- učenici uočavaju da su svi omjeri približno jednaki
- nastavnik dobiveni konstantni omjer označava slovom  $\pi$  (čitaj: pi) i ispriča prikladnu (povijesnu) priču o tom važnom broju

**VAŽNO!**

**Mjerenja treba izvršiti za različite valjkaste predmete, što je moguće više njih.**

**Bilo bi dobro izvršiti i više mjerenja za isti predmet (pogreška pri mjerenju).**

## OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (4)

## TABLICA ZA REZULTATE MJERENJA

[illegible]



# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (5)

## Diskusija koju treba provesti s učenicima:

- potrebno je voditi računa o mjernim jedinicama (opseg i promjer kruga moraju biti izmjereni istom mjernom jedinicom)
- izračunate vrijednosti omjera  $o : d$  bit će između 3.13 i 3.16 – potrebno je s učenicima prodiskutirati utjecaj (ne)preciznosti mjerenja na rezultat
- obavezno prodiskutirati broj decimala na koje uopće ima smisla računati količnik  $o : d$ , budući da su i  $o$  i  $d$  izmjereni približno (s preciznošću od milimetra)

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (6)

## AKTIVNOST 2. Eksperiment uz pomoć računala

### Cilj aktivnosti:

- učenici će, u paru ili individualno mjereći u alatu dinamične geometrije, “otkriti” vezu opsega kruga i njegovog promjera

### Oblik rada:

- individualni rad ili rad u paru učenika na računalu

### Potrebni materijal:

- “radna bilježnica” u softveru dinamične geometrije za svakog učenika ili par učenika
- nastavni listić za svakog učenika s uputama za rad, tablicom za zapisivanje mjerenja i zaključaka

## OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (7)

## Tijek aktivnosti:

Učenci će:

- Konstruirati kružnicu u alatu dinamične geometrije te izmjeriti njezin promjer ( $d$ ) i opseg ( $o$ )
- izračunati zbroj  $d + o$ , razliku  $o - d$ , umnožak  $d \cdot o$  i količnik  $o : d$  te formirati tablicu s tim mjerenjima
- mijenjati promjer kružnice “povlačenjem točke” i tabelirati pripadajuća mjerenja

[illegible]

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (8)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

Učenici će:

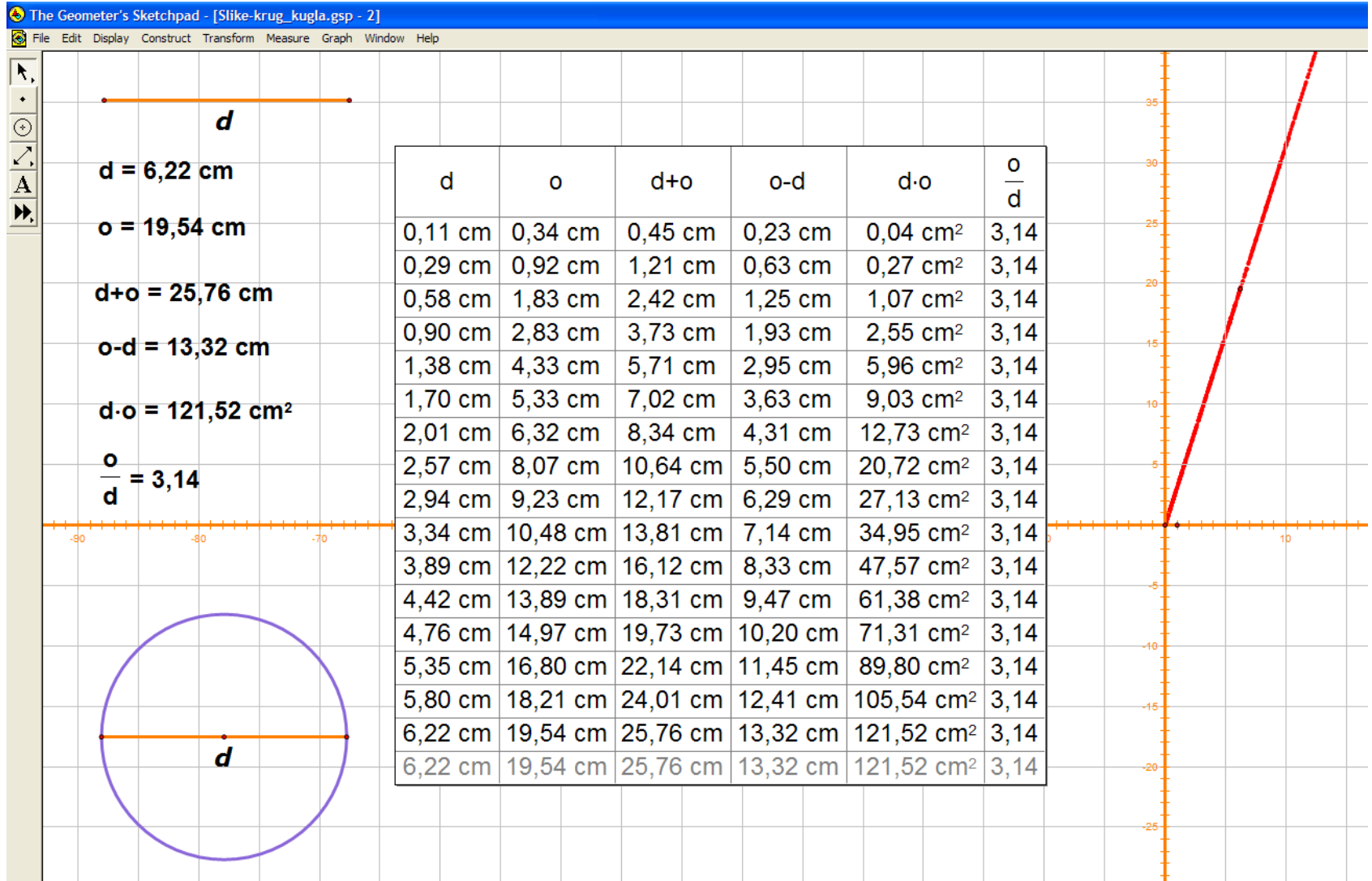
- uočavati pravilnosti u stupcima tablice
- uređene parove  $(d, o)$  prikazati grafički u pravokutnom koordinatnom sustavu

## Diskusija:

Učenici će:

- uočiti da kružnice većeg promjera imaju veći opseg (opseg raste s promjerom kružnice)
- uočiti da je opseg kružnice uvijek veći od njenog promjera (razlike  $o - d$  su uvijek pozitivne)
- uočiti da je količnik  $o : d$  stalan (ne ovisi o promjeru kružnice)
- diskutirati vrijednost količnika  $o : d$  s obzirom na podešeni broj decimala u alatu dinamične geometrije
- uočiti da sve točke  $(d, o)$  pripadaju istom (polu)pravcu ishodištem koordinatnog sustava

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (9)



# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (10)

## AKTIVNOST 3. Arhimedova metoda, eksperimentalno

### Cilj aktivnosti:

- učenici će, radeći u paru ili individualno, aproksimiranjem kruga njemu upisanim i opisanim pravilnim mnogokutima “otkriti” vezu opsega kruga i njegovog promjera

### Oblik rada:

- individualni rad ili rad u paru učenika na računalu ili uz pripremljen radni materijal

### Potrebni materijal:

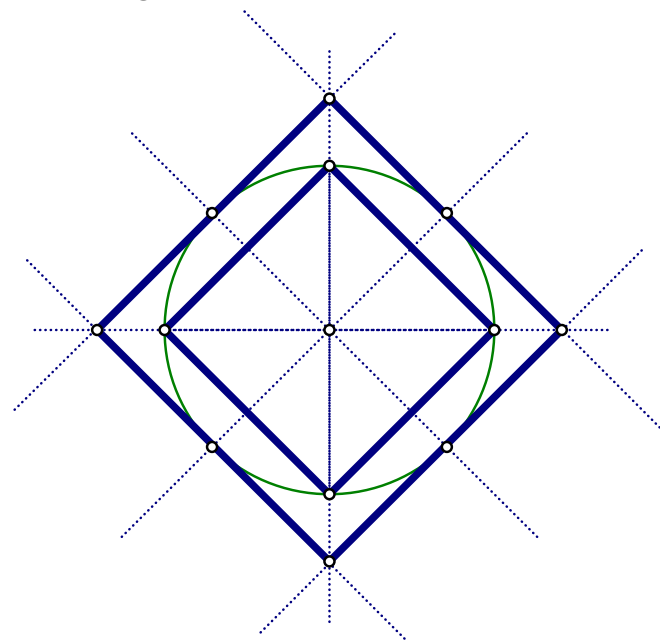
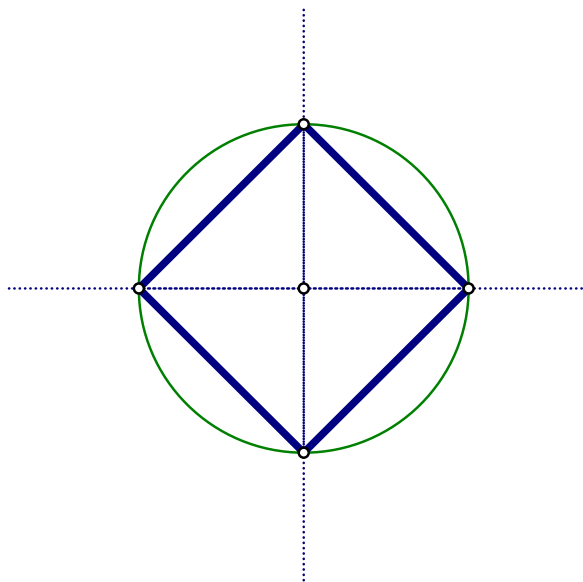
- “radna bilježnica” u softveru dinamične geometrije za svakog učenika ili par učenika
- nastavni listić za svakog učenika s uputama za rad, tablicom za zapisivanje rezultata mjerenja i zapisivanje zaključaka

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (11)

## Tijek aktivnosti:

Učenici će:

- konstruirati kružnicu, u nju upisati kvadrat te konstruirati kvadrat opisan nacrtanoj kružnici, sa stranicama paralelnima stranicama upisanog kvadrata

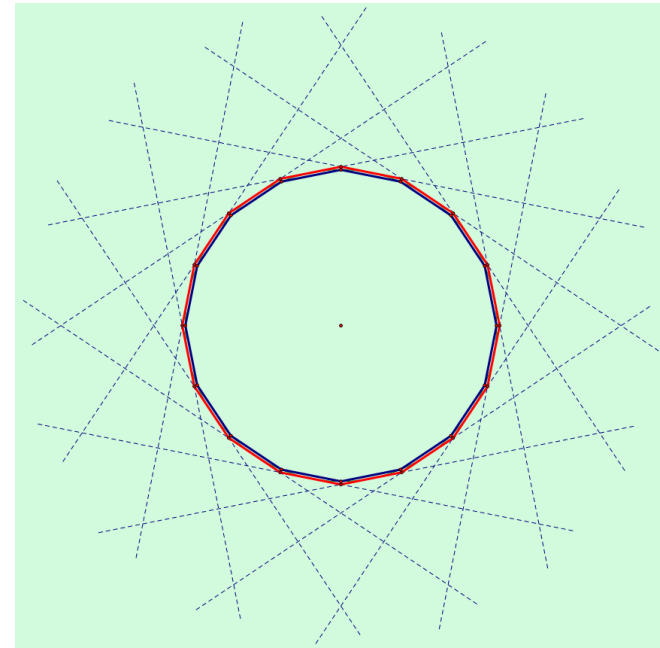
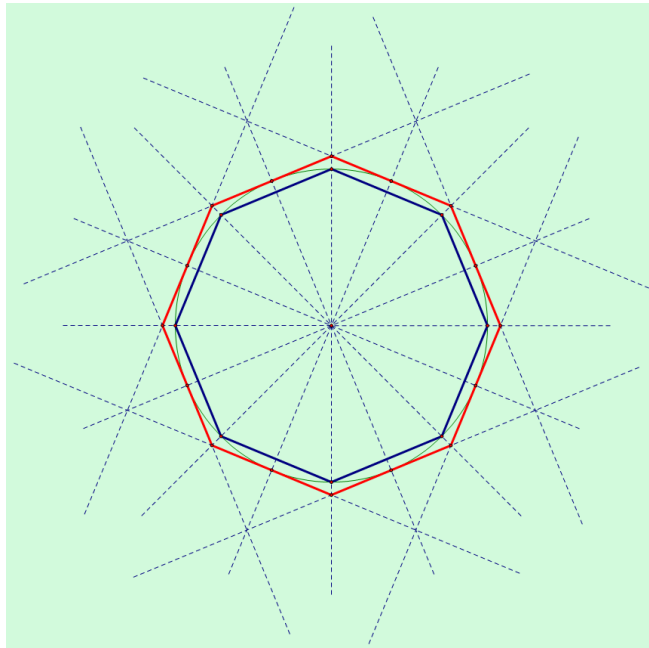


# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (12)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

Učenici će:

- konstruirati kružnicu, u nju upisati pravilni osmerokut te konstruirati pravilni osmerokut opisan nacrtanoj kružnici, sa stranicama paralelnima stranicama upisanog osmerokuta
- konstruirati kružnicu, u nju upisati pravilni šesnaesterokut te konstruirati pravilni šesnaesterokut opisan nacrtanoj kružnici, sa stranicama paralelnima stranicama upisanog šesnaesterokuta
- izmjeriti promjer kružnice te duljinu stranice svakog upisanog i opisanog mnogokuta





# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (13)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

Učenici će:

- izračunati opseg svakog upisanog i opisanog mnogokuta
- zaključiti da je opseg upisanog mnogokuta manji od opsega odgovarajućeg opisanog mnogokuta
- zaključiti da se povećanjem broja stranica opsezi upisanih mnogokuta povećavaju, a opsezi opisanih mnogokuta smanjuju
- podijeliti opseg svakog upisanog i odgovarajućeg opisanog mnogokuta promjerom kružnice
- izračunati razliku dobivenih količnika
- zaključiti da se dobiveni količnici približavaju broju  $\pi$ , a njihova razlika nuli

$$\frac{O_{4,u}}{d} < \frac{O_{8,u}}{d} < \frac{O_{16,u}}{d} < \pi < \frac{O_{16,o}}{d} < \frac{O_{8,o}}{d} < \frac{O_{4,o}}{d}$$

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (14)

TABLICA ZA REZULTATE MJERENJA I RAČUNANJE

$n$	DULJINA STRANICE UPISANOG MNOGOKUTA	OPSEG UPISANOG MNOGOKUTA $o_u$	DULJINA STRANICE OPISANOG MNOGOKUTA	OPSEG OPISANOG MNOGOKUTA $o_o$	PROMJER KRUŽNICE	$o_u : d$	$o_o : d$	$o_o : d$ – $o_u : d$
4								
8								
16								

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (15)

## Diskusija:

### S učenicima trebamo prodiskutirati sljedeće:

- usporediti približnu vrijednost broja  $\pi$ , zaokruženog na pet decimala ( $\pi \approx 3.14159$ ), s dobivenim aproksimacijama  $o_u : d$  i  $o_o : d$
- za svaki od analiziranih mnogokuta, po veličini usporediti  $o_u : d$  i  $o_o : d$
- broj  $\pi$  nalazi se između dobivenih aproksimacija
- koji od zadanih mnogokuta daje približnu vrijednost najbližu stvarnoj vrijednosti broja  $\pi$
- usporediti aproksimacije dobivene za svaki od mnogokuta i analizirati što se događa s razlikom  $o_o : d - o_u : d$  povećanjem broja stranica mnogokuta
- skrenuti pažnju da je Arhimed broj  $\pi$  odredio pomoću pravilnih 96-terokuta upisanih i opisanih kružnici
- skrenuti pažnju da je Arhimed kao donju i gornju ogradu za broj  $\pi$  dobio:

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$$

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (16)

## AKTIVNOST 4. Arhimedova metoda, računski (primjereno samo osmom razredu)

### Cilj aktivnosti:

- učenici će, radeći individualno, aproksimacijom jediničnog kruga njemu upisanim pravilnim mnogokutima i primjenom Pitagorinog poučka odrediti približnu vrijednost broja  $\pi$

### Oblik rada:

- individualni rad učenika

### Potrebni materijal:

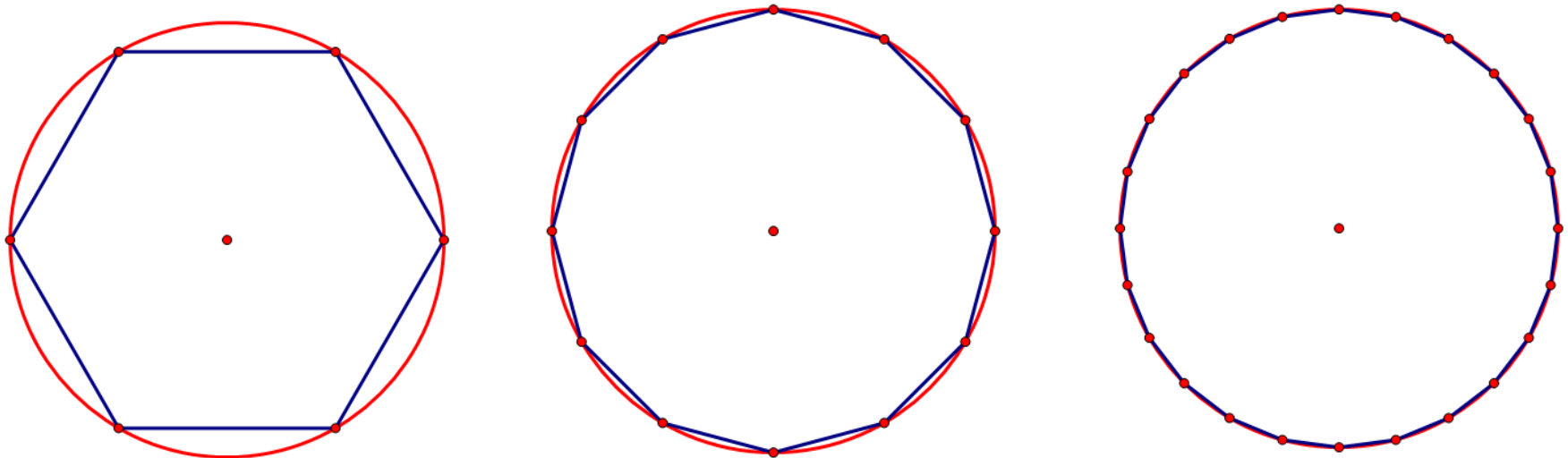
- džepno računalo ili računalni alat za izradu proračunskih tablica
- nastavni listić za svakog učenika s uputama za rad i tablicom za zapisivanje rezultata i zaključaka

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (17)

## Tijek aktivnosti:

Učenici će:

- u jedinični krug upisati pravilni šesterokut, dvanaesterokut, 24-terokut, 48-terokut i 96-terokut, odrediti duljine njihovih stranica i poluopsege te ih usporediti s brojem  $\pi$
- saznati da je upravo ovom metodom broj  $\pi$  računao Arhimed



# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (18)

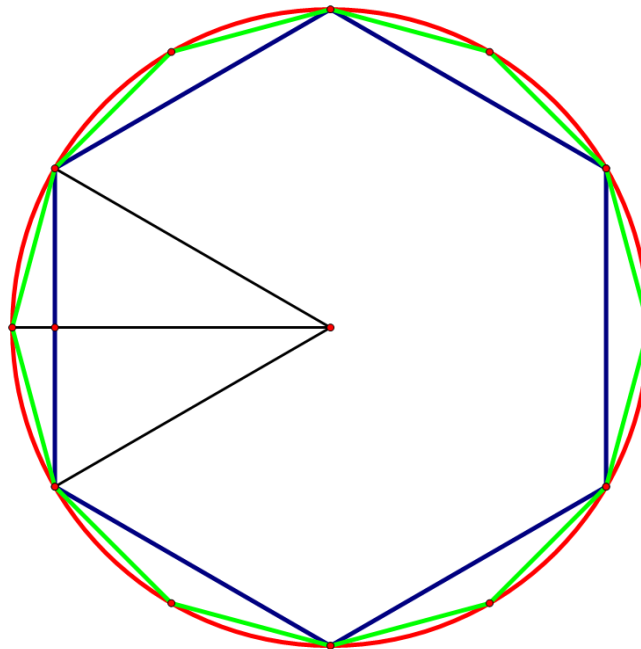
TABLICA ZA PODATKE I REZULTATE

BROJ STRANICA MNOGOKUTA $n$	DULJINA STRANICE MNOGOKUTA $a_n$	OPSEG MNOGOKUTA $o_n$	PROMJER KRUGA $d$	$o_n : d$
6			2	
12			2	
24			2	
48			2	
96			2	

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (19)

## Analiza:

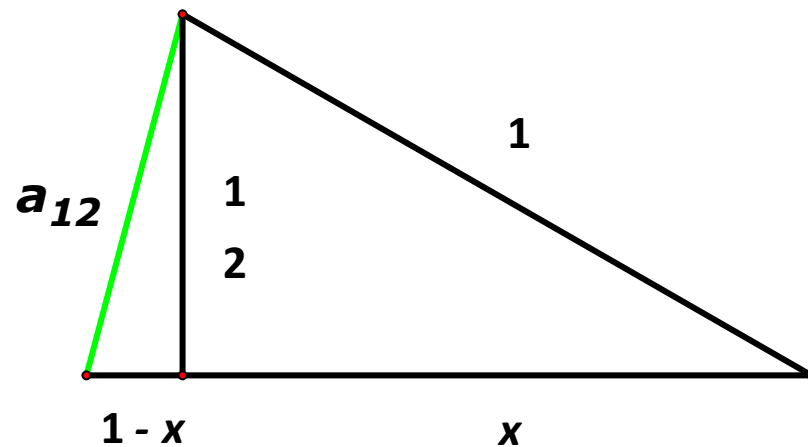
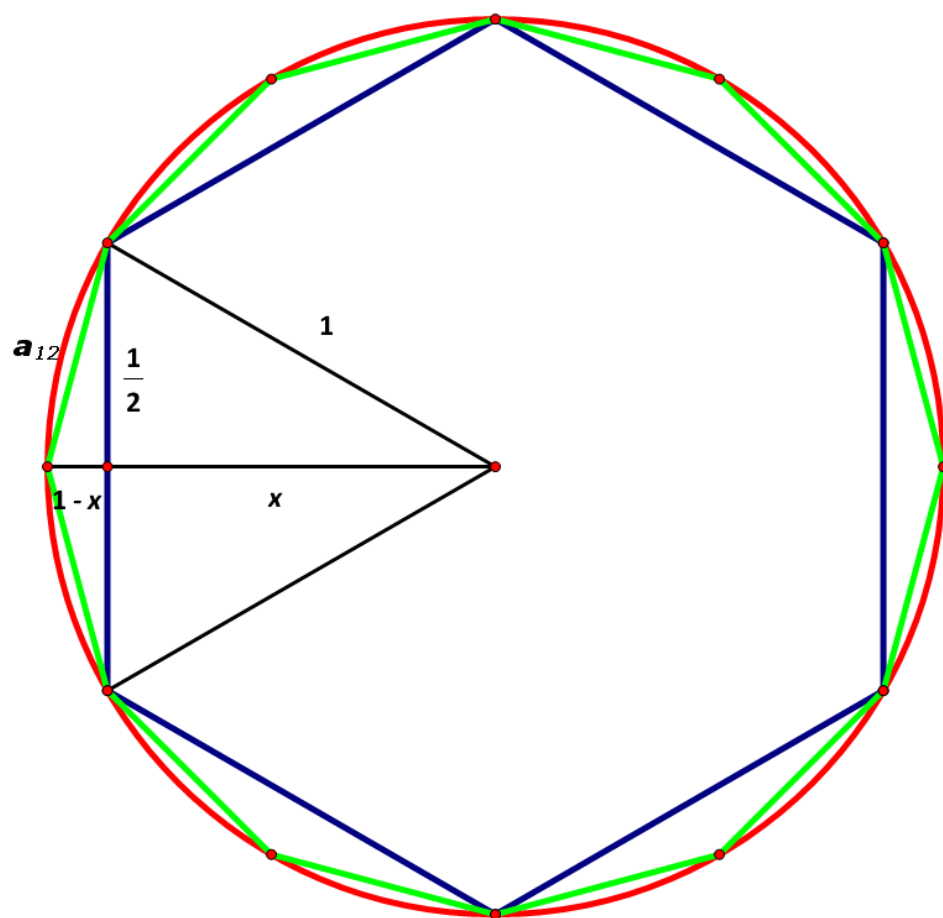
- duljina stranice pravilnog šesterokuta upisanog u jedinični krug je 1 (karakteristični trokuti pravilnog šesterokuta jednakostranični)
- vrhove pravilnog dvanaesterokuta upisanog u jedinični krug dobivamo kao vrhove upisanog pravilnog šesterokuta ("stari" vrhovi) i kao sjecišta jedinične kružnice i simetrala stranica upisanog pravilnog šesterokuta ("novi" vrhovi)
- duljinu stranice upisanog pravilnog dvanaesterokuta određujemo primjenom Pitagorinog poučka



# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (20)

## Analiza (nastavak):

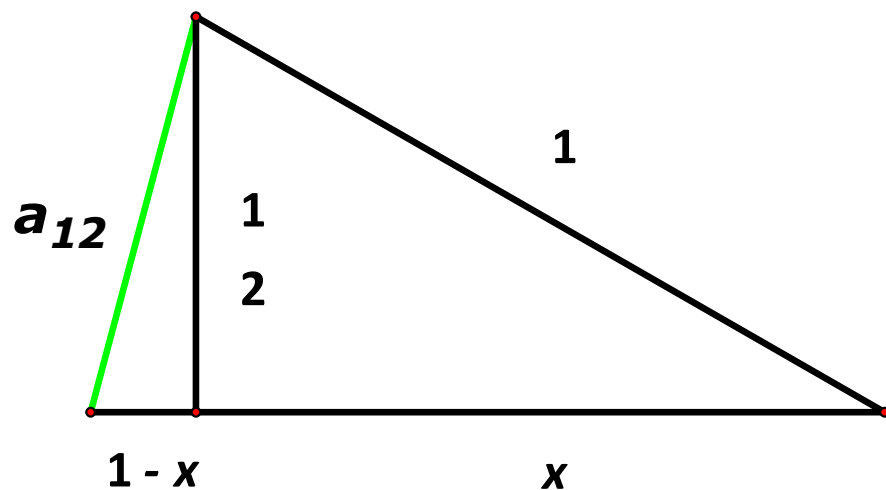
- detaljnija slika – dva puta primijenimo Pitagorin poučak





# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (21)

Analiza (nastavak):



$$x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86602$$

$$1 - x \approx 0.13398$$

$$a_{12} = \sqrt{(1 - x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \approx 0.51764$$

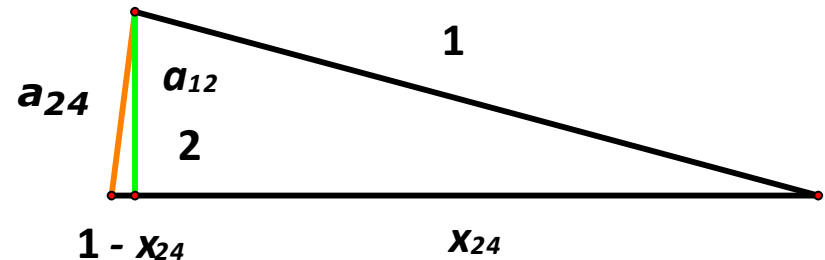
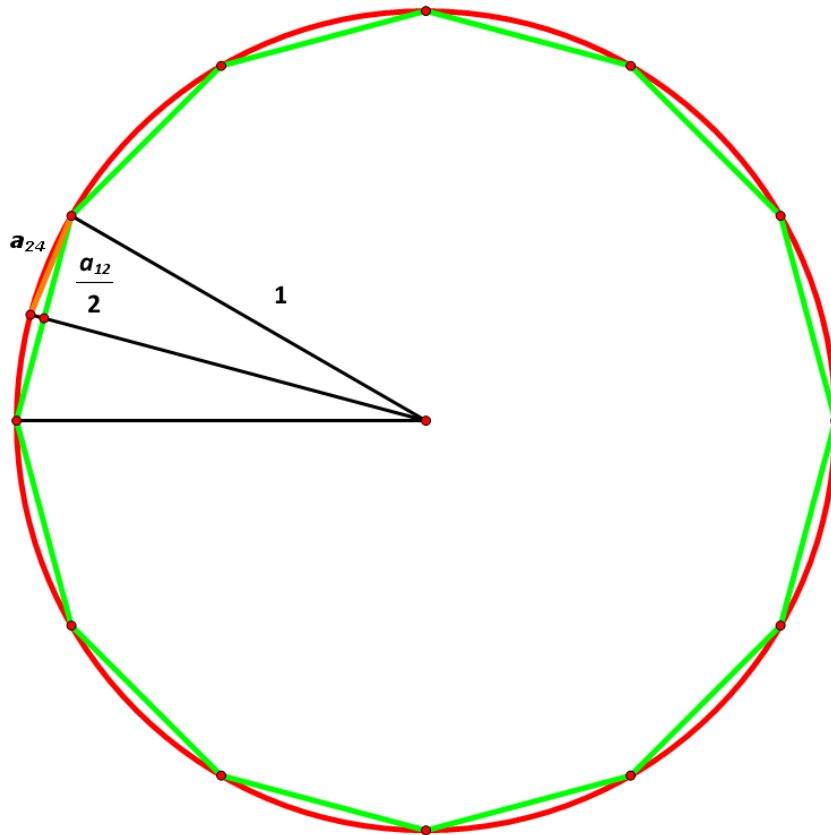
$$o_{12} = 12 \cdot a_{12} \approx 6.2117$$

$$\frac{o_{12}}{d} \approx \frac{6.2117}{2} = 3.10585$$

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (22)

## Analiza (nastavak):

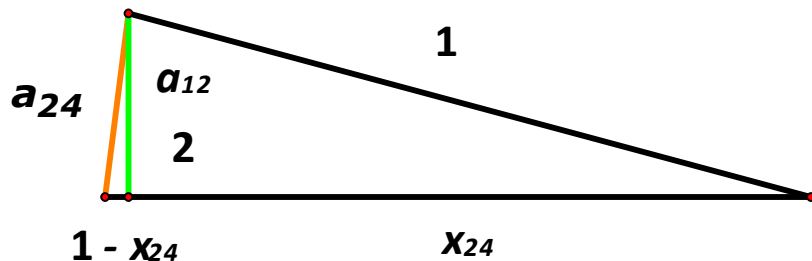
- isti postupak nastavljamo i za upisani pravilni 24-terokut
- vrhovi upisanog pravilnog 24-terokuta su vrhovi upisanog pravilnog dvanaesterokuta i sjecišta jedinične kružnice i simetrala stranica upisanog pravilnog dvanaesterokuta



# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (23)

## Analiza (nastavak):

- duljinu stranice upisanog pravilnog 24-terokuta opet odredimo primjenom Pitagorinog poučka



$$x_{24} = \sqrt{1 - \left(\frac{a_{12}}{2}\right)^2} \approx 0.96579$$

$$a_{24} = \sqrt{(1 - x_{24})^2 + \left(\frac{a_{12}}{2}\right)^2} \approx 0.26105$$

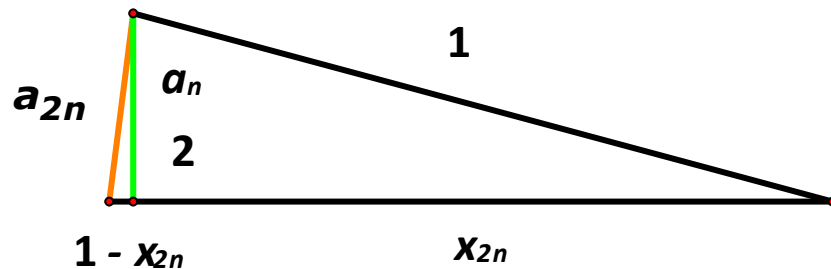
$$o_{24} = 24 \cdot a_{24} \approx 6.2653$$

$$\frac{o_{24}}{d} \approx \frac{6.2653}{2} = 3.13265$$

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (24)

## Analiza (nastavak):

- analogno nastavljamo i dalje – duljinu stranice upisanog pravilnog  $2n$ -terokuta odredimo primjenom Pitagorinog poučka pomoću duljine stranice upisanog pravilnog  $n$ -terokuta
- iteriramo istu formulu



$$x_{2n} = \sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

$$a_{2n} = \sqrt{(1 - x_{2n})^2 + \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

$$o_{2n} = 2n \cdot a_{2n}$$

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (25)

## ISPUNJENA TABLICA ZA PODATKE I REZULTATE

BROJ STRANICA MNOGOKUTA $n$	DULJINA STRANICE MNOGOKUTA $a_n$	OPSEG MNOGOKUTA $o_n$	PROMJER KRUGA $d$	KOLIČNIK $o_n : d$
6	1	6	2	3
12	0.51764	6.2117	2	3.10585
24	0.26105	6.2653	2	3.13265
48	0.13081	6.2787	2	3.13935
96	0.06544	6.2821	2	3.14105

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (26)

## Diskusija:

- učenici trebaju uočiti da povećanjem broja stranica upisanog pravilnog mnogokuta dobivamo sve bolju aproksimaciju broja  $\pi$
- aproksimacije čine rastući niz

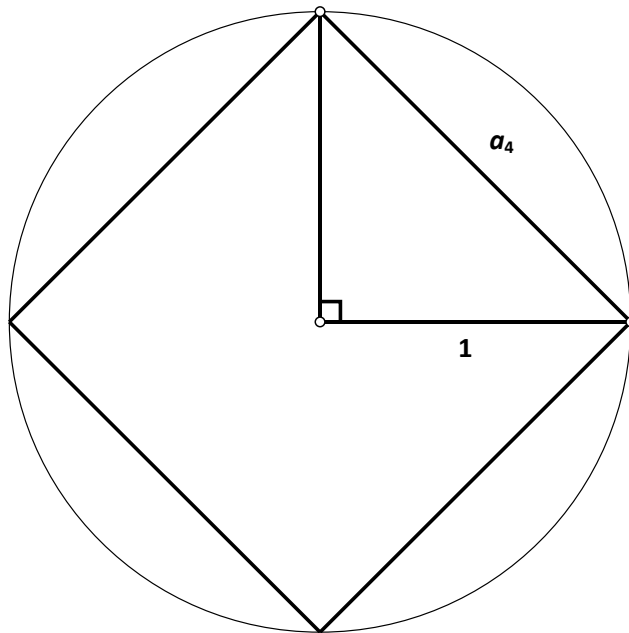
$$\frac{O_6}{d} < \frac{O_{12}}{d} < \frac{O_{24}}{d} < \frac{O_{48}}{d} < \frac{O_{96}}{d} < \pi$$

- treba prodiskutirati da povećanjem broja stranica mnogokuta (udvostručenjem u svakom koraku) raste i količina računanja (računamo iterativno), a time i pogreška aproksimacije (svaki korijen računamo približno, na određeni broj decimala, koristeći pritom prethodno izračunate približne vrijednosti)
- učenici mogu pokušati predvidjeti što bi se događalo kod bismo, umjesto upisanih pravilnih mnogokuta, gledali pravilne mnogokute opisane jediničnom krugu (padajući niz aproksimacija koje konvergiraju broju  $\pi$ )

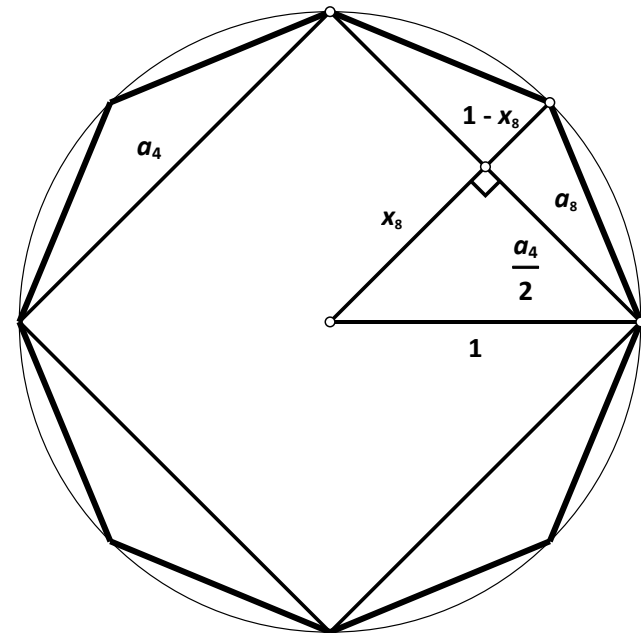
# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (27)

## Napomena:

- Isti proces zaključivanja i ista aktivnost može se ponoviti i s upisanim pravilnim mnogokutima za  $n = 4, 8, 16, 32, 64$ .

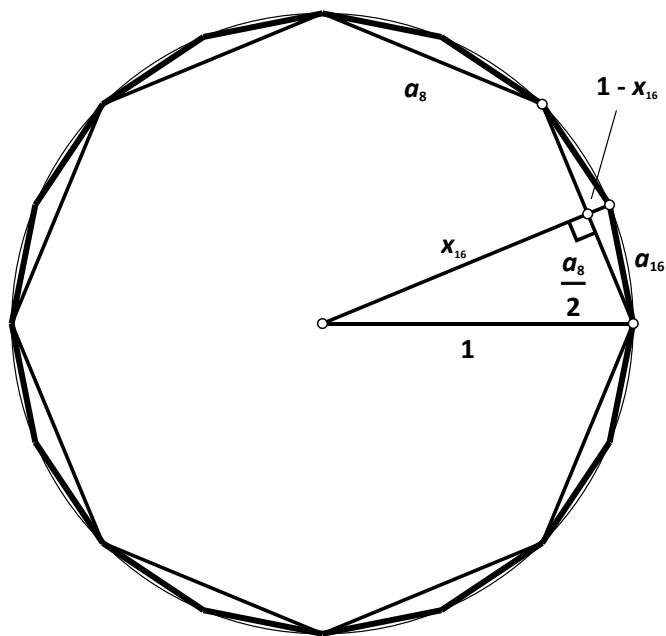


$n = 4$

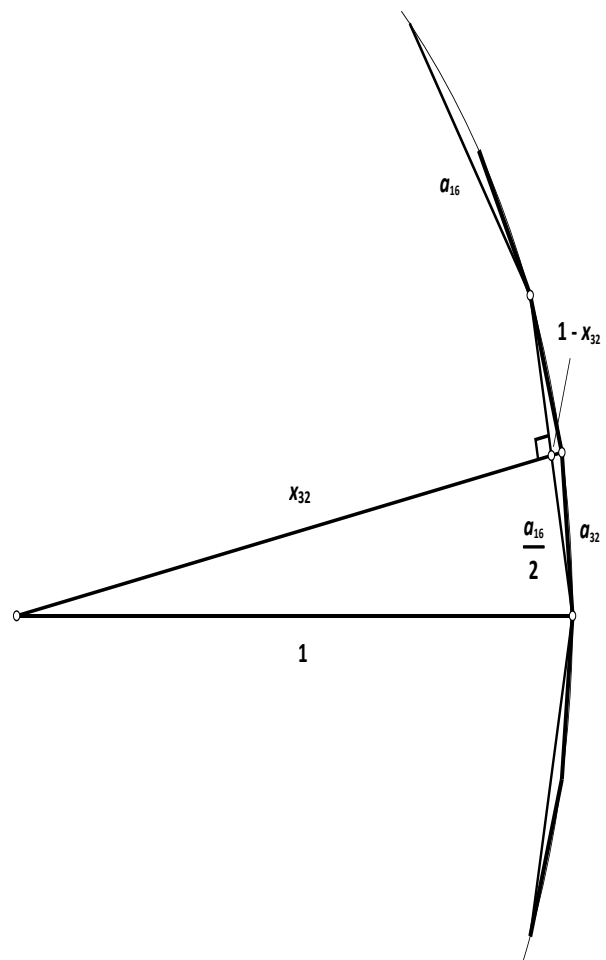


$n = 8$

# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (28)



$n = 16$



$n = 32$

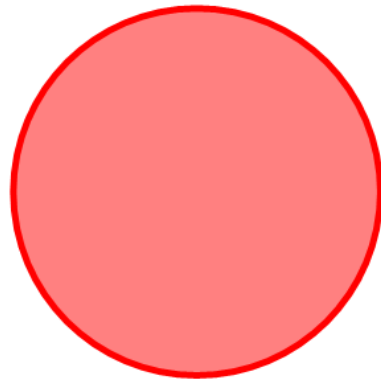


# OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (29)

## ISPUNJENA TABLICA ZA PODATKE I REZULTATE

BROJ STRANICA MNOGOKUTA $n$	POMOĆNA DULJINA MNOGOKUTA $x_n$	DULJINA STRANICE MNOGOKUTA $a_n$	OPSEG MNOGOKUTA $o_n$	PROMJER KRUGA $d$	KOLIČNIK $o_n : d$
4		1,414213562	5,656854249	2	2,828427125
8	0,707106781	0,765366865	6,122934918	2	3,061467459
16	0,923879533	0,390180644	6,242890305	2	3,121445152
32	0,98078528	0,196034281	6,273096981	2	3,136548491
64	0,995184727	0,098135349	6,280662314	2	3,140331157

## **2.1.2. Duljina kružnog luka**



# DULJINA KRUŽNOG LUKA

## CILJ AKTIVNOSTI

Učenici će, radeći u paru na pripremljenom nastavnom listiću, otkriti ovisnost duljine kružnog luka dane kružnice o veličini pripadnog središnjeg kuta.

## NASTAVNI OBLIK

- diferencirana nastava u obliku rada u paru

## NASTAVNA METODA

- heuristička nastava (otkrivanje pravilnosti)

## POTREBAN MATERIJAL

- motivacijski zadatak
- nastavni listić za svakog učenika

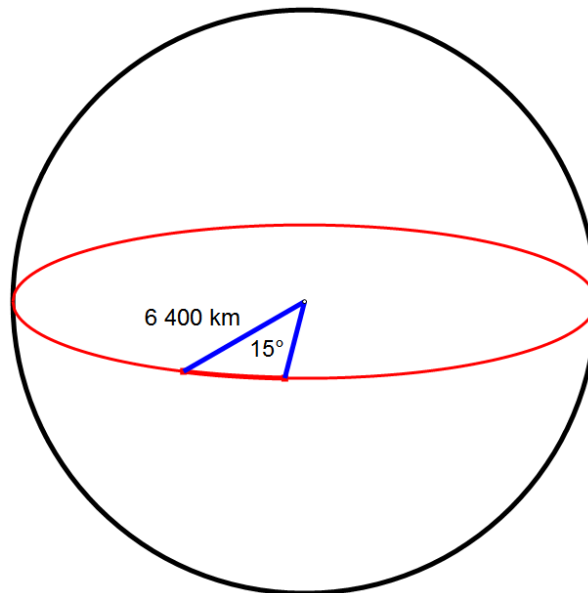
# DULJINA KRUŽNOG LUKA (2)

## TIJEK AKTIVNOSTI

- Učitelj pred učenike postavlja kontekstualizirani mativacijski zadatak.

### Zadatak.

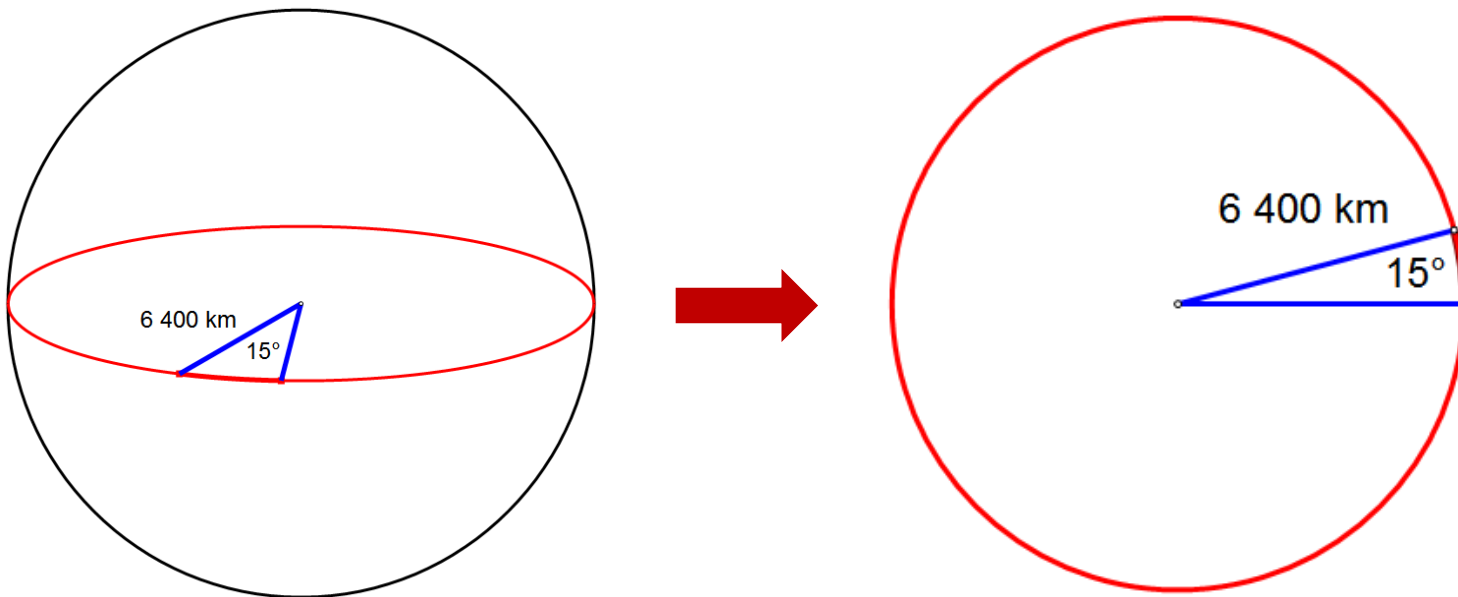
Odredite duljinu dijela Zemljinog ekvatora koji odgovara razlici geografskih dužina od  $15^\circ$ . Polumjer Zemlje duljine je približno 6 400 km.



# DULJINA KRUŽNOG LUKA (3)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Učenici interpretiraju tekst zadatka prevodeći ga na matematički jezik.
- Zaključuju da je potrebno odrediti duljinu kružnog luka kružnice (ekvatora) polumjera 6 400 km, koji odgovara središnjem kutu veličine  $15^\circ$ .

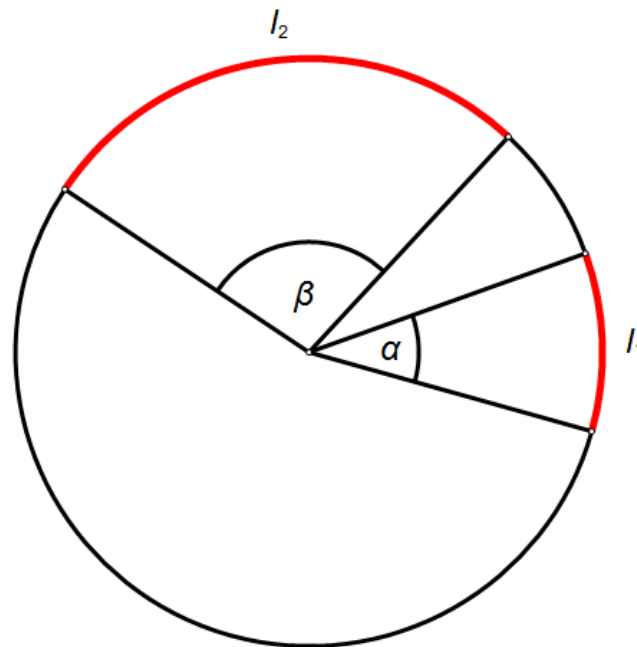


- **Prema tome, potrebno je povezati duljinu kružnog luka i veličinu pripadnog središnjeg kuta.**

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (4)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Učenici prvo intuitivno uočavaju kako se mijenja duljina kružnog luka:
  - za zadanu kružnicu (duljina polumjera je fiksna), većem središnjem kutu odgovara dulji pripadni kružni luk (što nije dovoljno za zaključak o proporcionalnosti!!)



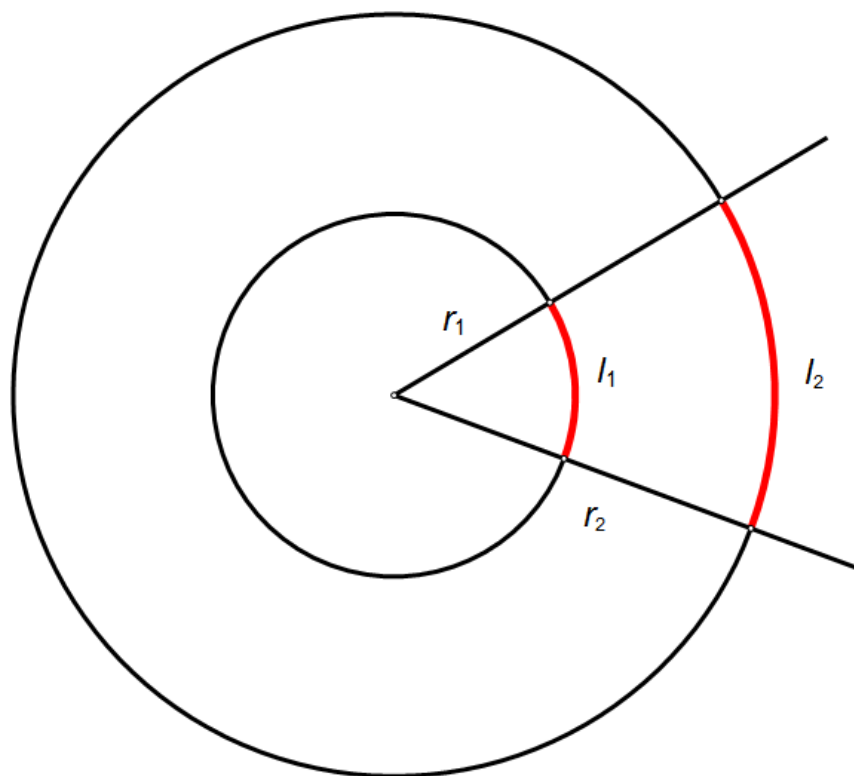
**KOVARIJACIJA!!!**

$$\alpha < \beta \Rightarrow l_1 < l_2$$

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (5)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- za zadani središnji kut (veličina kuta je fiksna), kružnici većeg polumjera odgovara dulji kružni luk



**KOVARIJACIJA!!!**

$$r_1 < r_2 \Rightarrow l_1 < l_2$$

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (6)

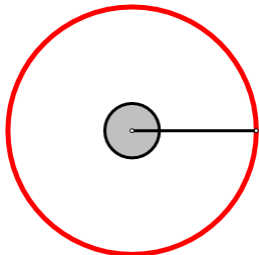
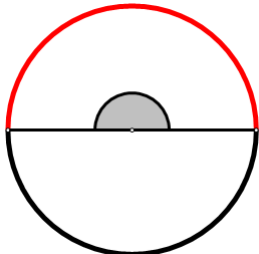
## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Sada je potrebno otkriti tip ovisnosti duljine kružnog luka zadane (fiksne) kružnice o veličini pripadnog središnjeg kuta.
- Učenici dobivaju nastavni listić kojeg trebaju popuniti radeći u paru.
- Na nastavnom listiću prvo promatraju duljine poznatih kružnih lukova, vezane uz koncept razlomka i pridružuju im središnji kut.
- Cilj prvog dijela nastavnog listića je doći do duljine kružnog luka koja odgovara središnjem kutu veličine  $1^\circ$ .
- Nakon toga, multipliciranjem uz primjenu analogije i generalizacije nepotpunom indukcijom, učenici otkrivaju opću ovisnost.
- U procesu uočavanja pravilnosti bitno je ne preskakati logičke korake!



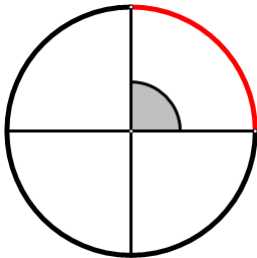
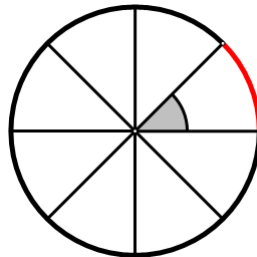
## DULJINA KRUŽNOG LUKA (7)

Dana je kružnica opsega  $o$ . Radeći u paru dopunite tablicu! Što primjećujete?

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

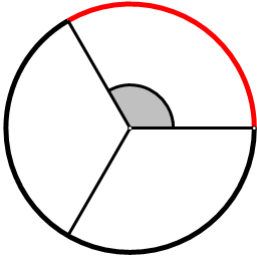
# DULJINA KRUŽNOG LUKA (8)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

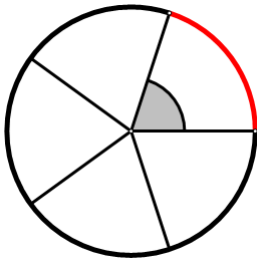
# DULJINA KRUŽNOG LUKA (9)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

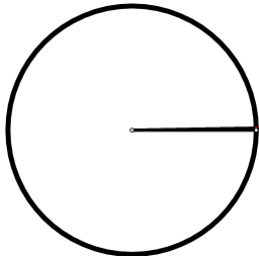
# DULJINA KRUŽNOG LUKA (10)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (11)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{360}$ kružnice		

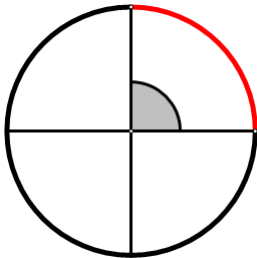
## DULJINA KRUŽNOG LUKA (12)

Dana je kružnica opsega  $o$ . Radeći u paru dopunite tablicu! Što primjećujete?

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	cijela kružnica = 1 cijelo	$o = \text{opseg kruga}$	$360^\circ$
	$\frac{1}{2}$ kružnice	$\frac{o}{2}$	$\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

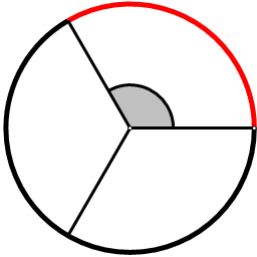
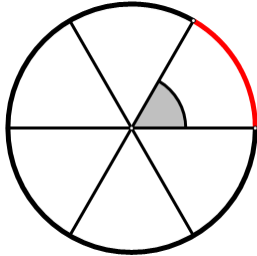
# DULJINA KRUŽNOG LUKA (13)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{4}$ kružnice	$\frac{0}{4}$	$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$
	$\frac{1}{8}$ kružnice	$\frac{0}{8}$	$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (14)

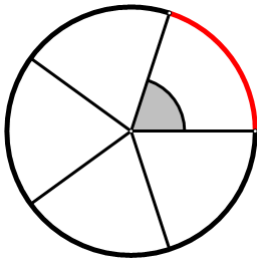
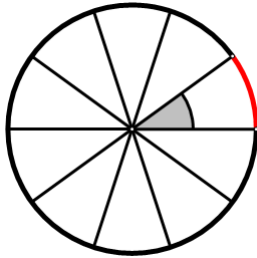
Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{3}$ kružnice	$\frac{0}{3}$	$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$
	$\frac{1}{6}$ kružnice	$\frac{0}{6}$	$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$



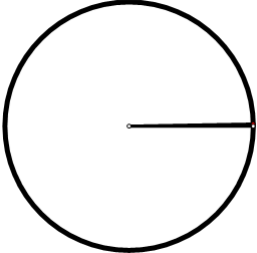
# DULJINA KRUŽNOG LUKA (15)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{5}$ kružnice	$\frac{0}{5}$	$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
	$\frac{1}{10}$ kružnice	$\frac{0}{10}$	$\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (16)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{360}$ kružnice	$\frac{0}{360}$	$\frac{360^\circ}{360} = 1^\circ$

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (17)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Učenici će uočiti da se prepolavljanjem veličine središnjeg kuta prepolavlja i duljina pripadnog kružnog luka.
- Također će uočiti i da se smanjenjem veličine središnjeg kuta 4 **puta** jednako toliko **puta** smanjila i duljina pripadnog kružnog luka.
- Zapravo, učenici će primijetiti da su duljina kružnog luka i veličina odgovarajućeg središnjeg kuta **proporcionalne veličine**.
- Preostaje osvijestiti **koeficijent proporcionalnosti**, tj. jediničnu vrijednost.
- To je upravo duljina kružnog luka koja odgovara jediničnom kutu, tj. kutu veličine  $1^\circ$ .
- Kako bi to osvijestili, učenici sada dopunjuju i drugu tablicu.

## DULJINA KRUŽNOG LUKA (18)

U paru dopunite i ovu tablicu!

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
1°	
2°	
3°	
4°	

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
5°	
10°	
15°	
47°	

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (19)

Tablica (nastavak)

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
$0.5^{\circ}$	
$213.7^{\circ}$	
$0^{\circ}$	
$\alpha$	

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (20)

U paru dopunite i ovu tablicu!

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
1°	$\frac{0}{360}$
2°	$2 \cdot \frac{0}{360}$
3°	$3 \cdot \frac{0}{360}$
4°	$4 \cdot \frac{0}{360}$

ANALOGIJA

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
5°	$5 \cdot \frac{0}{360}$
10°	$10 \cdot \frac{0}{360}$
15°	$15 \cdot \frac{0}{360}$
47°	$47 \cdot \frac{0}{360}$

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (21)

Tablica (nastavak)

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
$0.5^\circ$	$0.5 \cdot \frac{o}{360}$
$213.7^\circ$	$213.7 \cdot \frac{o}{360}$
$0^\circ$	$0 \cdot \frac{o}{360} = 0$
$\alpha$	$\alpha \cdot \frac{o}{360}$

I OVE SU ANALOGIJE VAŽNE!

**GENERALIZACIJA**  
(nepotpunom indukcijom)

# DULJINA KRUŽNOG LUKA (22)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Konačno, učenici su došli do zaključka da je duljina  $l$  kružnog luka kružnice opsega  $o$ , koji odgovara središnjem kutu veličine  $\alpha$  dana izrazom:

$$l = l(\alpha) = \frac{o}{360} \cdot \alpha$$

- Dakle, **koeficijent proporcionalnosti** jednak je  $\frac{o}{360}$ .
- Ako je kružnica bila polumjera duljine  $r$ , zbog prije naučene veze  $o = 2r\pi$  učenici zaključuju:

$$l = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha$$

- Napomena: **Vežu je ipak smislenije pamti u obliku**

$$l = \frac{o}{360} \cdot \alpha$$



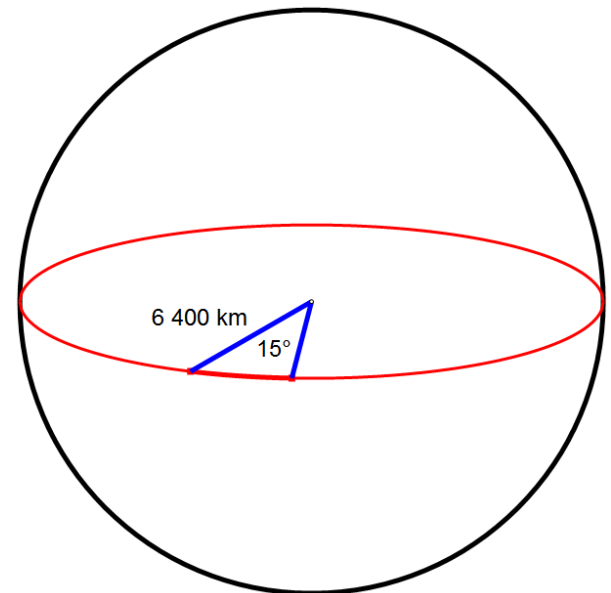
# DULJINA KRUŽNOG LUKA (23)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

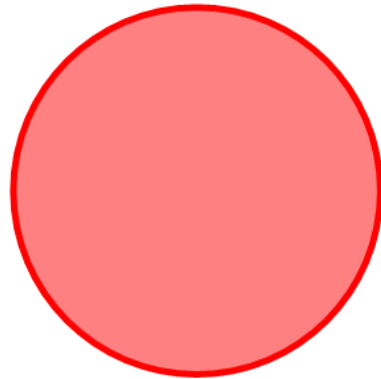
- Na kraju se treba vratiti na polazni kontekstualizirani zadatak i riješiti ga.
- Iz danih podataka zaključujemo da je duljina dijela ekvatora koji odgovara razlici od  $15^\circ$  u geografskoj dužini jednaka

$$l = \frac{2 \cdot 6\,400 \cdot \pi}{360} \cdot 15 \approx 1\,675 \text{ km}$$

- Ima li u ovom računu smisla koristiti decimale?!



## 2.1.3. Površina kruga



# POVRŠINA KRUGA

## AKTIVNOST 1. Eksperiment mjerenjem pomoću milimetarskog papira

### Cilj aktivnosti:

- učenici će, radeći u paru, mjerenjem površine kruga prebrojavanjem jediničnih kvadratića na milimetarskom papiru “otkriti” vezu površine kruga i njegovog polumjera

### Oblik rada:

- individualni rad ili rad u paru učenika

### Potrebni materijal:

- milimetarski papir za svaki par (ili tim) učenika
- šestar
- džepno računalo ili računalni alat za izradu proračunskih tablica
- tablica za zapisivanje rezultata mjerenja, računanja i zaključaka

## POVRŠINA KRUGA (2)

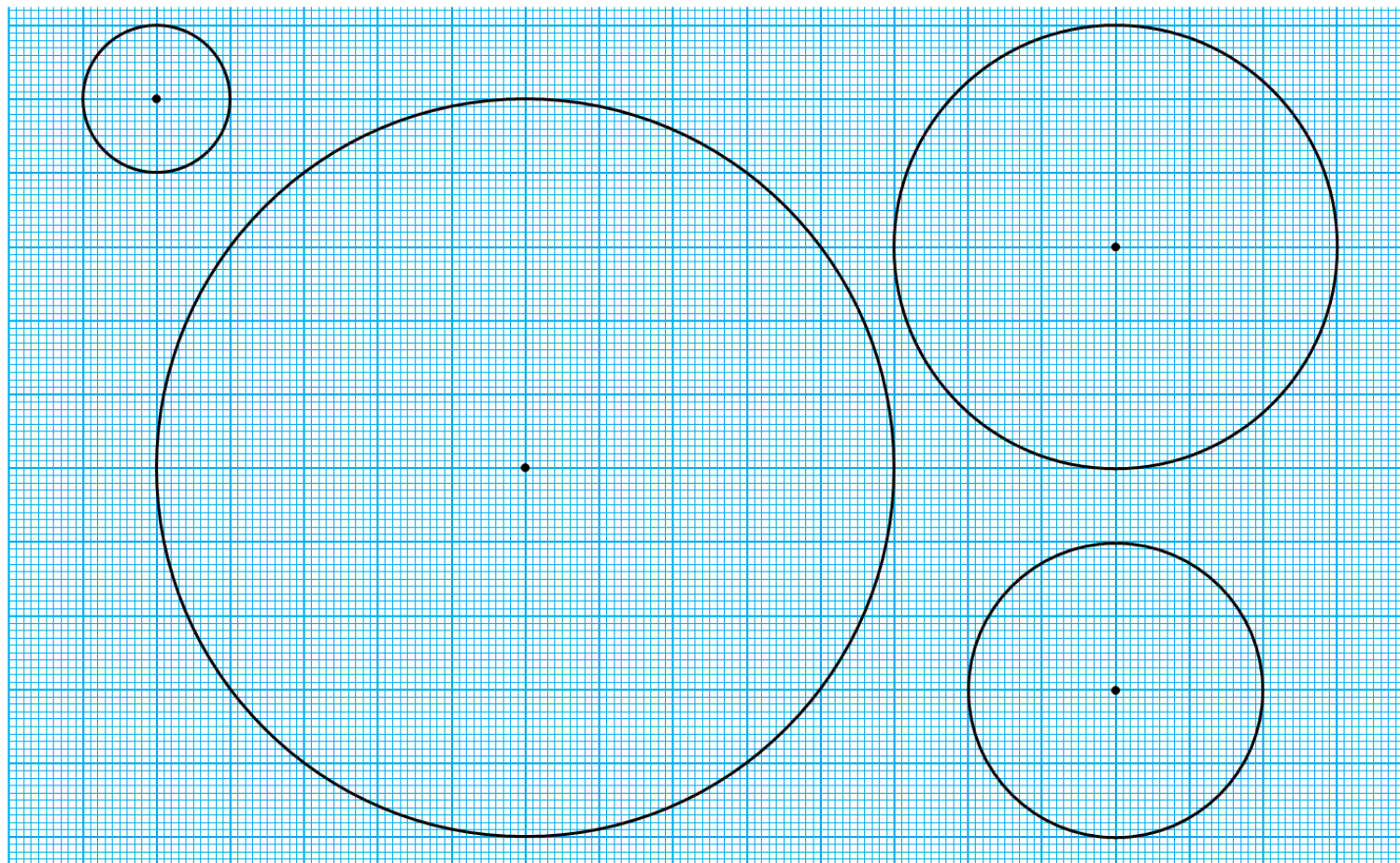
### Tijek aktivnosti:

- svaki par (ili tim) učenika na milimetarskom papiru konstruira krugove zadanih polumjera, npr. 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm i 5 cm
- prebrojavanjem kvadratnih centimetara i kvadratnih milimetara (jediničnih kvadratića označenih na milimetarskom papiru) učenici mjere površinu kruga i upisuju ju u tablicu
- za svaki krug učenici izračunaju omjer njegove površine i kvadrata njegovog polumjera,  $r \cdot r$  (džepnim računalom ili uz pomoć računalnog alata za izradu proračunskih tablica), te ga upisuju u tablicu

<b>POLUMJER KRUGA</b> <i>r</i>	<b>POVRŠINA KRUGA</b> <i>P</i>	<b>KOLIČNIK</b> <i>P : (r · r)</i>

# POVRŠINA KRUGA (3)

Tijek aktivnosti (nastavak):



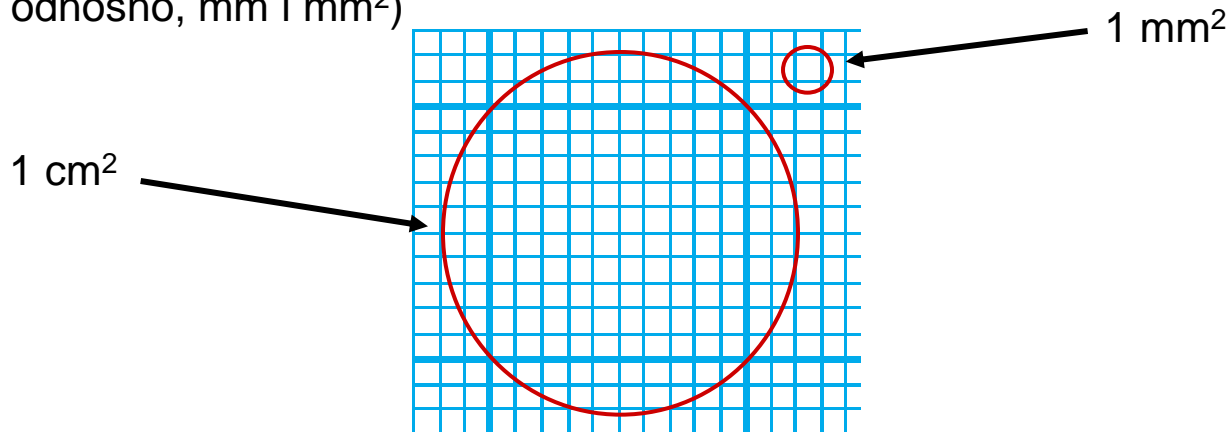
# POVRŠINA KRUGA (4)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

- analizom rezultata svih parova (ili timova), učenici će zaključiti da je količnik površine i kvadrata polumjera kruga,  $P : (r \cdot r)$ , konstantan i jednak  $\pi$
- dobiveni omjeri  $P : (r \cdot r)$  bit će većinom između 3.13 i 3.16
- konačni zaključak bit će da je površina kruga,  $P$ , određena formulom  $P = r^2 \pi$ , pri čemu je  $r$  polumjer kruga

## Diskusija koju treba provesti s učenicima:

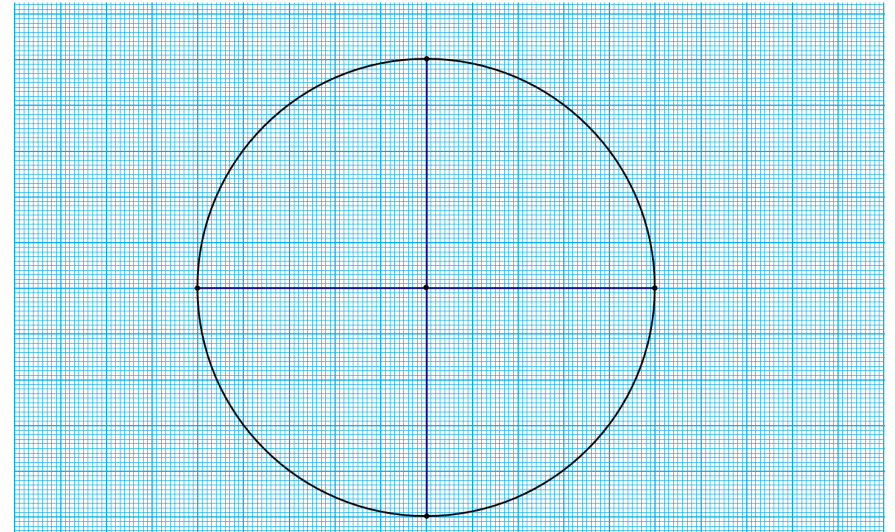
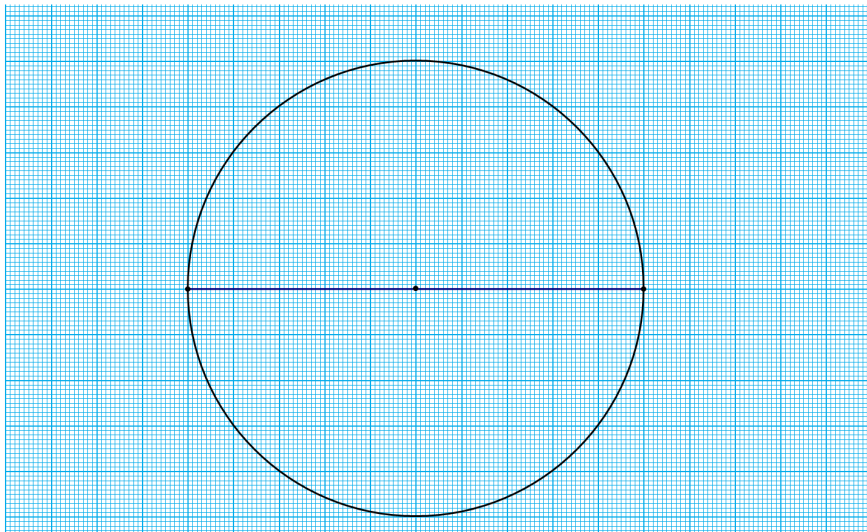
- važno je da polumjer i površina budu mjereni odgovarajućim mjernim jedinicama (cm i  $\text{cm}^2$ , odnosno, mm i  $\text{mm}^2$ )



# POVRŠINA KRUGA (5)

## Diskusija koju treba provesti s učenicima (nastavak):

- bitno je s učenicima prodiskutirati različite strategije prebrojavanja kvadratića površine  $1\text{ cm}^2$  i  $1\text{ mm}^2$  na milimetarskom papiru, npr.
  - učenici mogu najprije prebrojati “cijele” kvadratne centimetre, a onda ostatak kvadratnih milimetara
  - učenici mogu prebrojavanjem kvadratića odrediti površinu polovine kruga, a površinu cijelog kruga odrediti množenjem dobivenog rezultata s 2
  - učenici mogu prebrojavanjem kvadratića odrediti površinu četvrtine kruga, a površinu cijelog kruga odrediti množenjem dobivenog rezultata s 4



# POVRŠINA KRUGA (6)

## Diskusija koju treba provesti s učenicima (nastavak):

- poželjno je da više parova (ili timova) učenika konstruira krug istog polumjera jer time dobivamo priliku za diskusiju o pogreškama pri mjerenju
  - odabirom različitih strategija prebrojavanja učenici će dobiti različite površine krugova jednakih polumjera
  - najveće će razlike nastupiti pri prebrojavanju “rubnih” kvadratića milimetarskog papira (uz kružnicu), na što utjecaj može imati i debljina olovke šestara
  - za kvadratiće koji samo djelomično pripadaju krugu trebat će odlučiti hoće li ih ubrojiti ili zanemariti
  - pri mjerenju polovine kruga i množenju rezultata s 2 pogreška se udvostručuje, a pri mjerenju četvrtine kruga i množenju s 4 učetverostručuje - zaključak: pojednostavljivanje mjerenja može dovesti do veće pogreške u rezultatu
- s učenicima treba prodiskutirati na koliko je decimala uopće smisleno računati količnik  $P : (r \cdot r)$  (na jednu ili najviše dvije), budući da se pogreška javlja već u mjerenju površine  $P$ , i to reda veličine  $\text{mm}^2$



# POVRŠINA KRUGA (7)

## AKTIVNOST 2. Eksperiment uz pomoć računala

### Cilj aktivnosti:

- učenici će, radeći individualno ili u paru, mjereći u alatu dinamične geometrije, “otkriti” vezu površine kruga i njegovog polumjera

### Oblik rada:

- individualni rad ili rad u paru učenika na računalu

### Potrebni materijal:

- “radna bilježnica” u softveru dinamične geometrije za svakog učenika ili par učenika
- nastavni listić za svakog učenika s uputama za rad, tablicom za zapisivanje mjerenja i zaključaka

## POVRŠINA KRUGA (8)

## Tijek aktivnosti:

Učenci će:

- nacrtati kružnicu u alatu dinamične geometrije te izmjeriti njezin polumjer ( $r$ ), promjer ( $d$ ), opseg ( $o$ ) i površinu ( $P$ )
- izračunati količnike  $P : r$ ,  $P : d$ ,  $P : o$  i  $P : (r \cdot r)$  te formirati tablicu s tim mjerenjima
- mijenjati promjer kružnice “povlačenjem točke” i tabelirati pripadajuća mjerenja

[illegible]

# POVRŠINA KRUGA (9)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

Učenici će:

- uočavati pravilnosti u stupcima tablice
- uređene parove  $(r, P)$  prikazati grafički u pravokutnom koordinatnom sustavu

## Diskusija:

Učenici će:

- uočiti da krugovi većeg polumjera imaju veći opseg i površinu (rastu s polumjerom kružnice)
- uočiti da količnici  $P : r$ ,  $P : d$  i  $P : o$  rastu s povećanjem polumjera kruga
- uočiti da je količnik  $P : (r \cdot r)$  stalan (ne ovisi o polumjeru kruga)
- diskutirati vrijednost količnika  $P : (r \cdot r)$  s obzirom na podešeni broj decimala u alatu dinamične geometrije
- uočiti da sve točke  $(r, P)$  pripadaju istoj krivulji koja nije pravac ni neki njegov dio

# POVRŠINA KRUGA (10)

The Geometer's Sketchpad - [Slike-krug\_kugla.gsp - 2]

File Edit Display Construct Transform Measure Number Graph Window Help



**d**

$$d = 7,36 \text{ cm}$$

$$\frac{P}{r} = 11,56 \text{ cm}$$

$$P = 42,51 \text{ cm}^2$$

$$\frac{P}{d} = 5,78 \text{ cm}$$

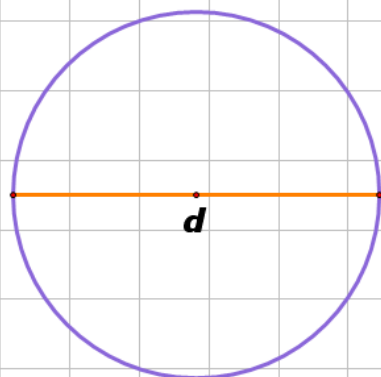
$$o = 23,11 \text{ cm}$$

$$\frac{P}{o} = 1,84 \text{ cm}$$

$$r = 3,68 \text{ cm}$$

$$\frac{P}{r \cdot r} = 3,14$$

r	o	P	$\frac{P}{r}$	$\frac{P}{o}$	$\frac{P}{r \cdot r}$
0,24 cm	1,50 cm	0,18 cm <sup>2</sup>	0,75 cm	0,12 cm	3,14
0,45 cm	2,83 cm	0,64 cm <sup>2</sup>	1,42 cm	0,23 cm	3,14
0,91 cm	5,74 cm	2,62 cm <sup>2</sup>	2,87 cm	0,46 cm	3,14
1,27 cm	7,99 cm	5,07 cm <sup>2</sup>	3,99 cm	0,64 cm	3,14
1,80 cm	11,31 cm	10,18 cm <sup>2</sup>	5,66 cm	0,90 cm	3,14
2,10 cm	13,22 cm	13,91 cm <sup>2</sup>	6,61 cm	1,05 cm	3,14
2,57 cm	16,13 cm	20,71 cm <sup>2</sup>	8,07 cm	1,28 cm	3,14
2,91 cm	18,29 cm	26,63 cm <sup>2</sup>	9,15 cm	1,46 cm	3,14
3,18 cm	19,95 cm	31,69 cm <sup>2</sup>	9,98 cm	1,59 cm	3,14
3,56 cm	22,37 cm	39,80 cm <sup>2</sup>	11,18 cm	1,78 cm	3,14
3,98 cm	25,03 cm	49,84 cm <sup>2</sup>	12,51 cm	1,99 cm	3,14
3,68 cm	23,11 cm	42,51 cm <sup>2</sup>	11,56 cm	1,84 cm	3,14



**d**

# POVRŠINA KRUGA (11)

## AKTIVNOST 3. Arhimedova metoda disekcije kruga, eksperiment uz pomoć računala

### Cilj aktivnosti:

- učenici će analizom materijala pripremljenog u alatu dinamične geometrije “otkriti” vezu površine kruga i njegovog polumjera svođenjem na trokut

### Oblik rada:

- individualni rad ili rad u paru učenika na računalu

### Potrebni materijal:

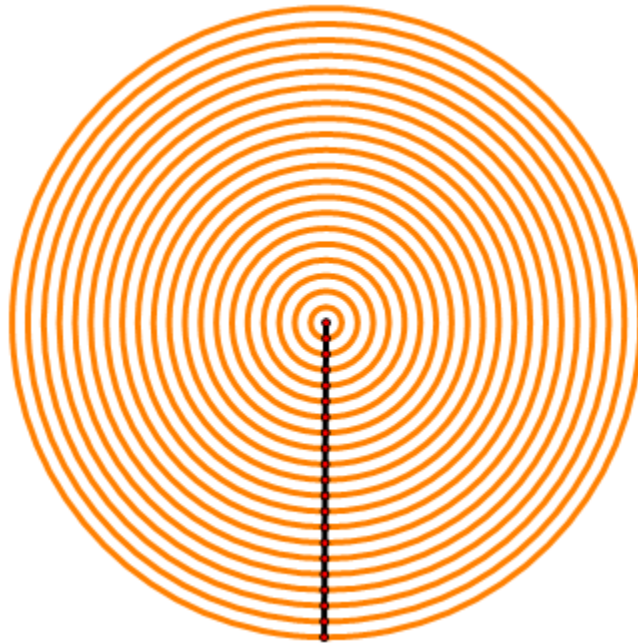
- “radna bilježnica” u softveru dinamične geometrije za svakog učenika ili par učenika
- nastavni listić za svakog učenika s uputama za rad i prostorom za zapisivanje zaključaka

# POVRŠINA KRUGA (12)

## Tijek aktivnosti:

Arhimedova ideja:

- krug možemo zamisliti kao beskonačno mnogo koncentričnih kružnica (namotanih oko središta kruga)

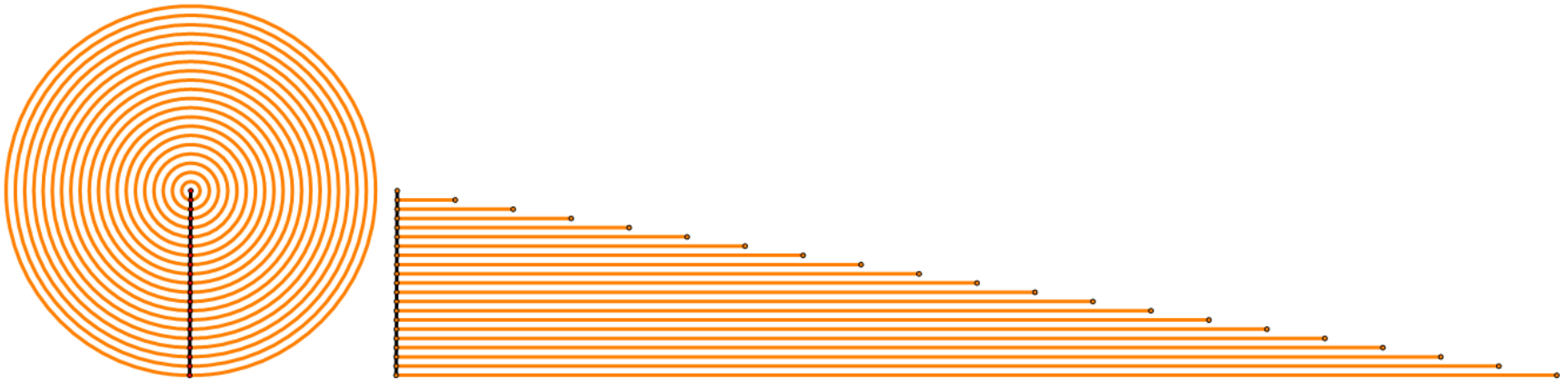


# POVRŠINA KRUGA (13)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

Arhimedova ideja (nastavak):

- razrežemo li krug duž jednog njegovog polumjera i “razmotamo ga”, sve njegove kružnice možemo razvući u dužine duljina jednakih njihovom opsegu

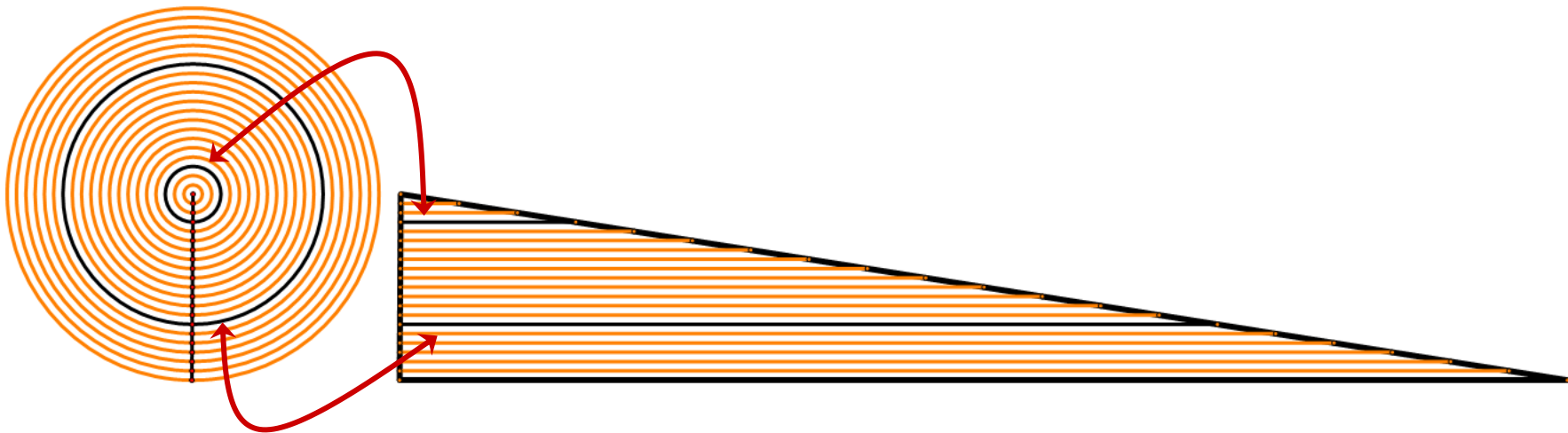


# POVRŠINA KRUGA (14)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

Arhimedova ideja (nastavak):

- nastavimo li profinjavati “mrežu” koncentričnih kružnica, u “graničnom slučaju” dobivene dužine formiraju pravokutni trokut
- površina tog pravokutnog trokuta jednaka je površini polaznog kruga (krug smo “prerezali” i “razmotali” u trokut) – učenici se u to mogu uvjeriti za različite krugove, mjerenjem u softveru dinamične geometrije





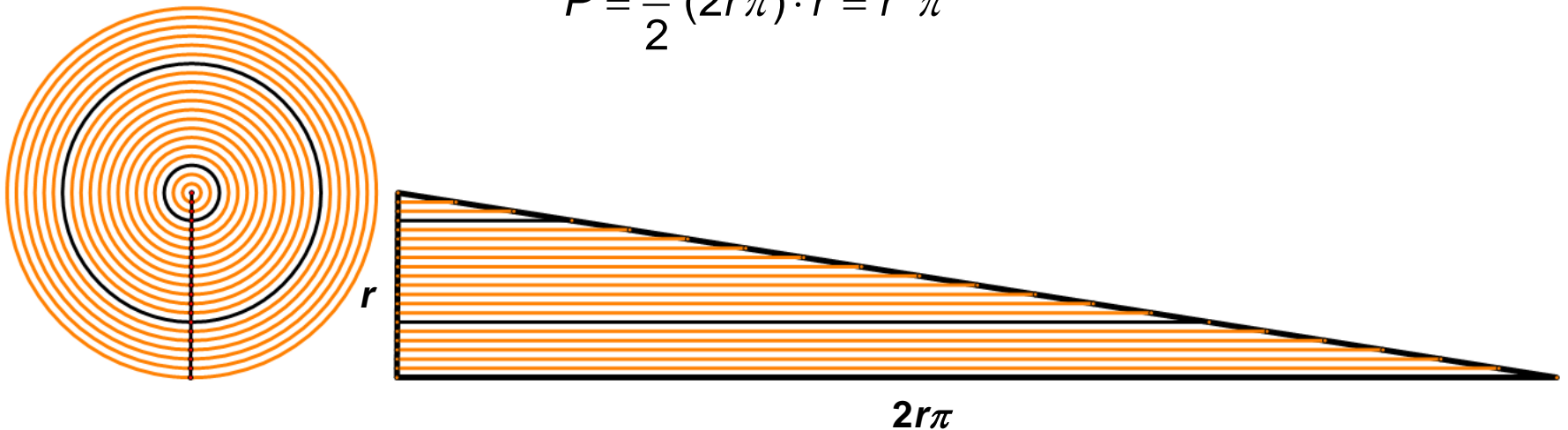
# POVRŠINA KRUGA (15)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

Arhimedova ideja (nastavak):

- osnovicu tog pravokutnog trokuta predstavlja “razmotana kružnica” koja obrubljuje polazni krug, a pripadna je visina polumjer polaznog kruga
- zaključak: površina  $P$  kruga polumjera  $r$  određena je formulom

$$P = \frac{1}{2} (2r\pi) \cdot r = r^2\pi$$



# POVRŠINA KRUGA (16)

## AKTIVNOST 4. Još jedna metoda disekcije kruga

### Cilj aktivnosti:

- učenici će, radeći u paru ili individualno, razrezivanjem kruga na sve više sukladnih kružnih isječaka te analizom materijala pripremljenog u alatu dinamične geometrije “otkriti” vezu površine kruga i njegovog polumjera svođenjem na pravokutnik

### Oblik rada:

- individualni rad ili rad u paru učenika

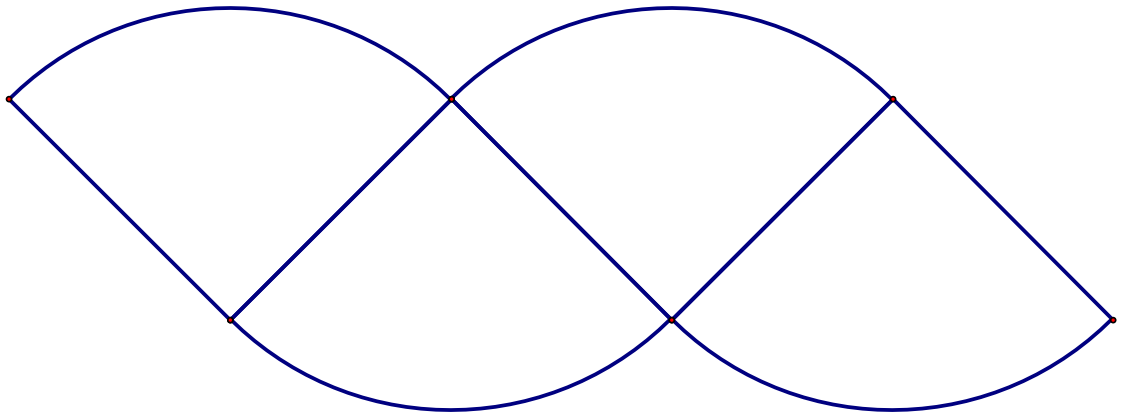
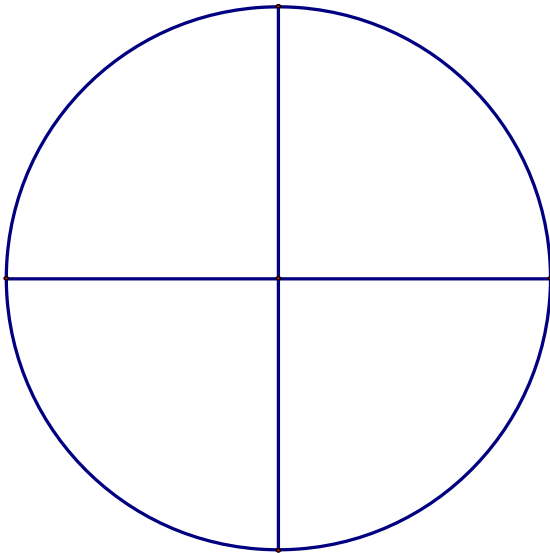
### Potrebni materijal:

- krugovi različitih polumjera, na papiru, s označenim četvrtinama, po jedan za svaki par učenika
- škare za svaki par učenika
- “radna bilježnica” u softveru dinamične geometrije za svakog učenika ili par učenika
- nastavni listić za svakog učenika s uputama za rad i prostorom za zapisivanje zaključaka

# POVRŠINA KRUGA (17)

## Tijek aktivnosti:

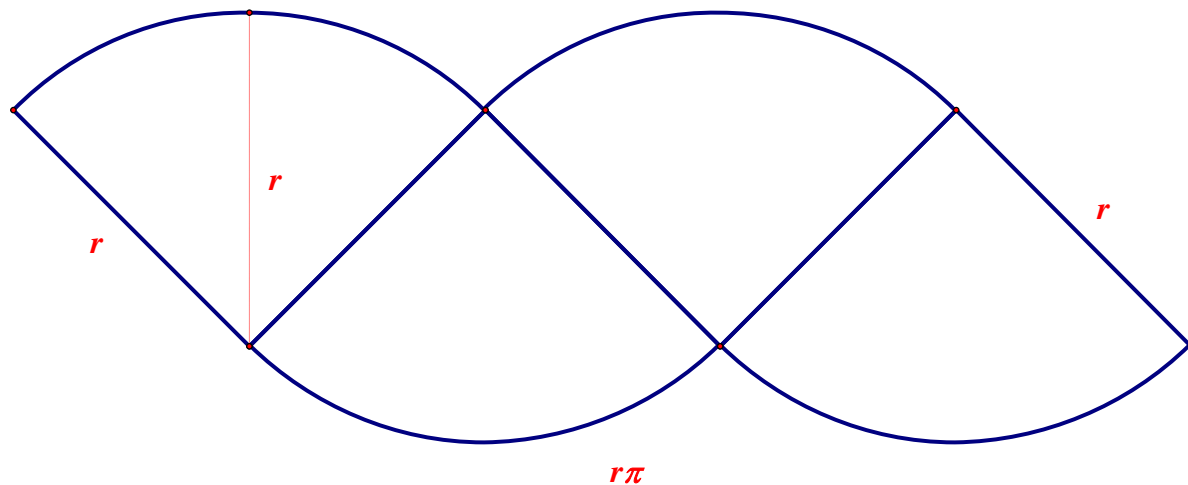
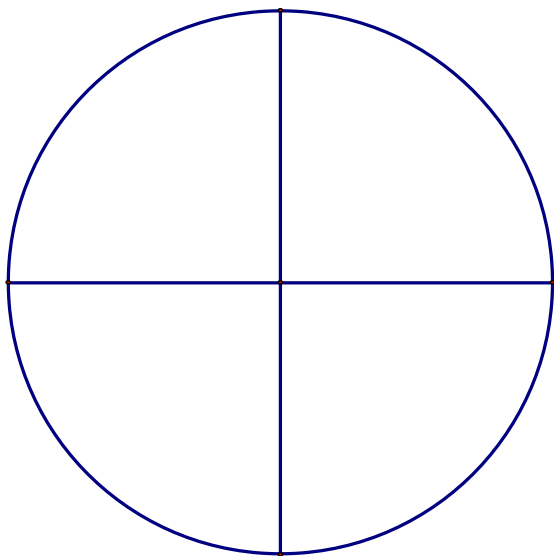
- učenicima podijelimo krugove s označenim četvrtinama, koje oni razrezuju i slažu kao na slici



# POVRŠINA KRUGA (18)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

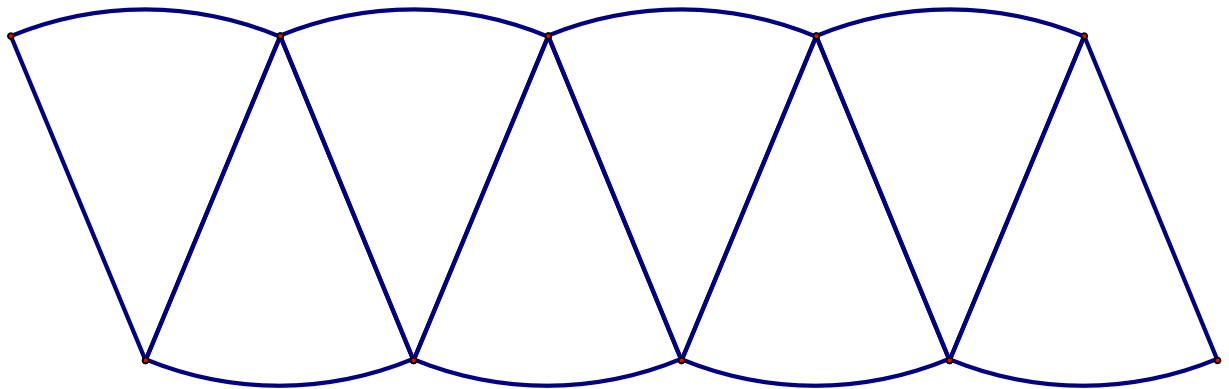
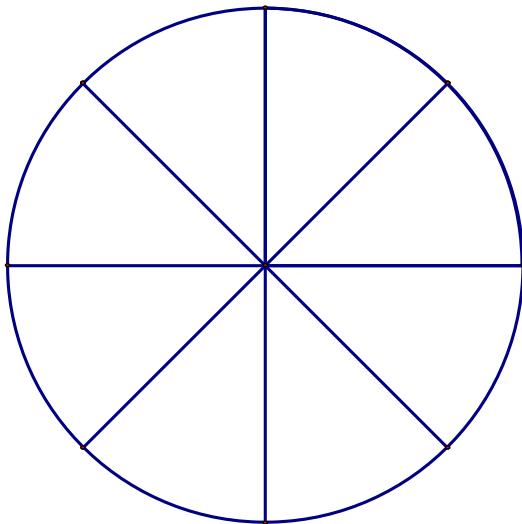
- važno je da učenici zaključe da novi lik ima jednaku površinu kao polazni krug (samo smo ga “presložili”)
- učenici uočavaju da je duljina svake od dviju “valovitih linija” jednaka polovini opsega polaznog kruga te da su “bočne stranice” novonastalog lika dvije paralelne dužine duljine jednake polumjeru tog kruga



# POVRŠINA KRUGA (19)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

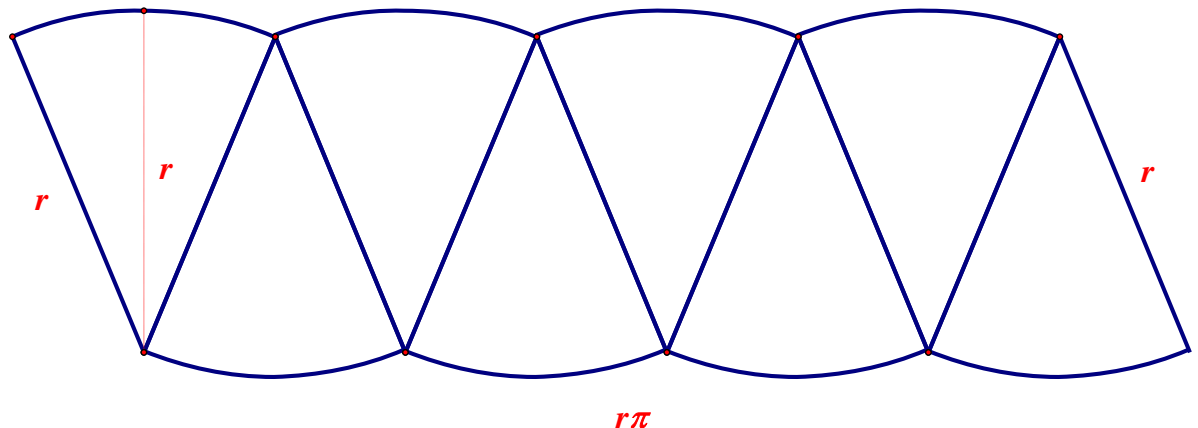
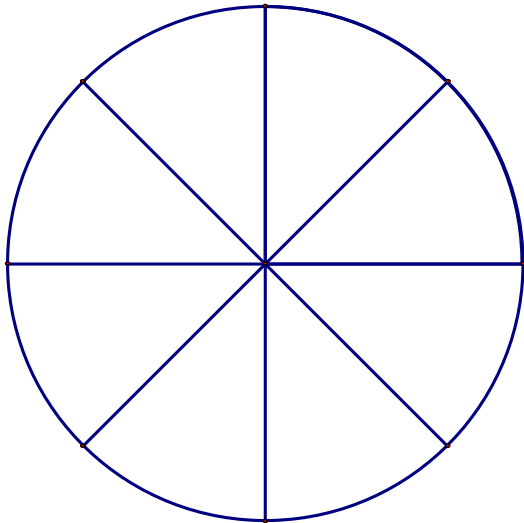
- aktivnost se nastavlja tako da učenici svaki od (četiri sukladna) kružna isječka podijele na dva sukladna kružna isječka (ukupno ih je osam) i od njih sastave novi lik, kao na slici



# POVRŠINA KRUGA (20)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

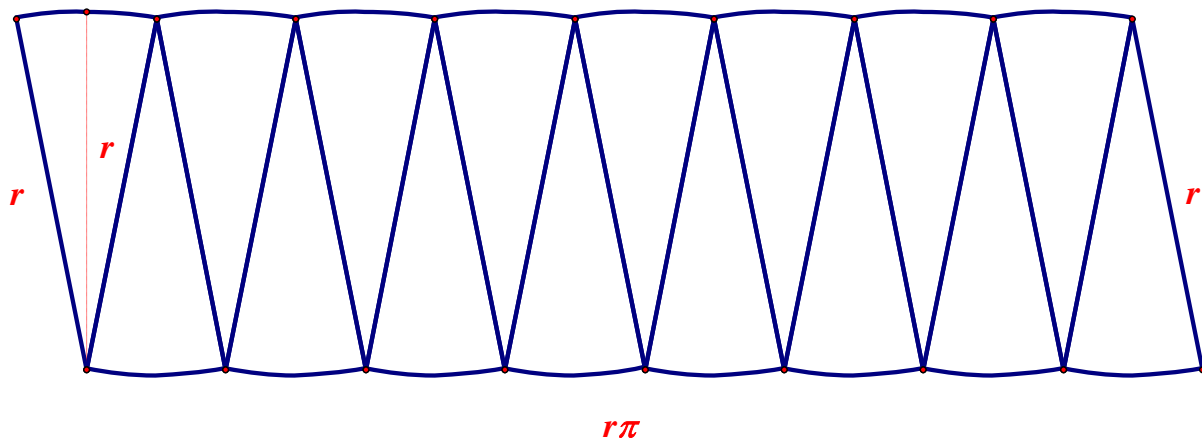
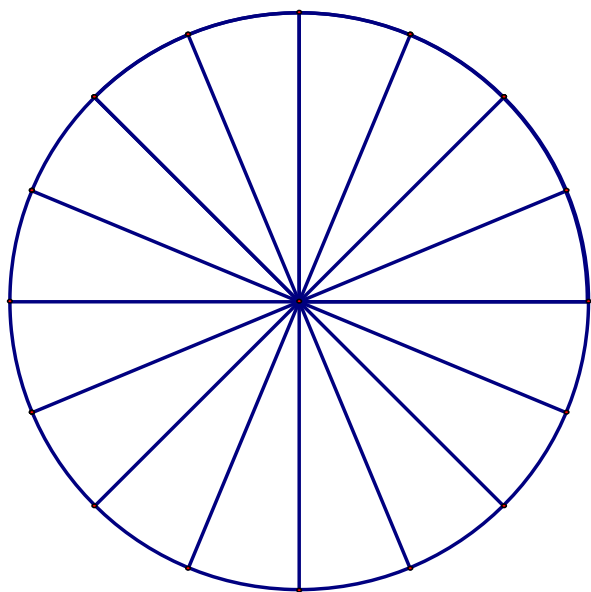
- učenici opet uočavaju da i ovaj novi lik ima jednaku površinu kao polazni krug (samo smo “presložili” polazni krug)
- učenici također uočavaju i da je duljina svake od dviju “valovitih linija” novog lika ostala nepromijenjena u odnosu na prethodni lik (jednaka je polovini opsega polaznog kruga) i da su “bočne stranice” novonastalog lika opet dvije paralelne dužine duljine jednake polumjeru tog kruga
- učenici uočavaju i da su “valovite linije” u novom liku “ispeglanije” nego u prethodnom



# POVRŠINA KRUGA (21)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

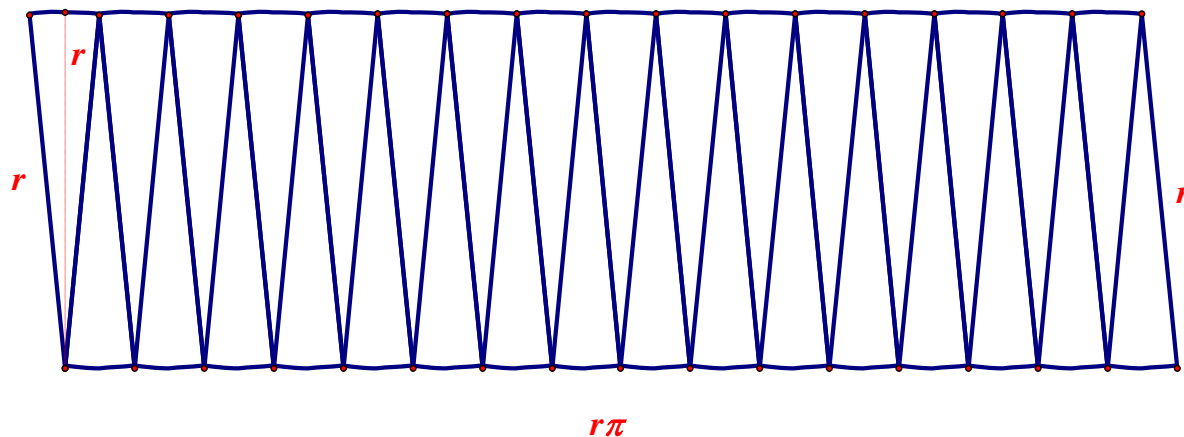
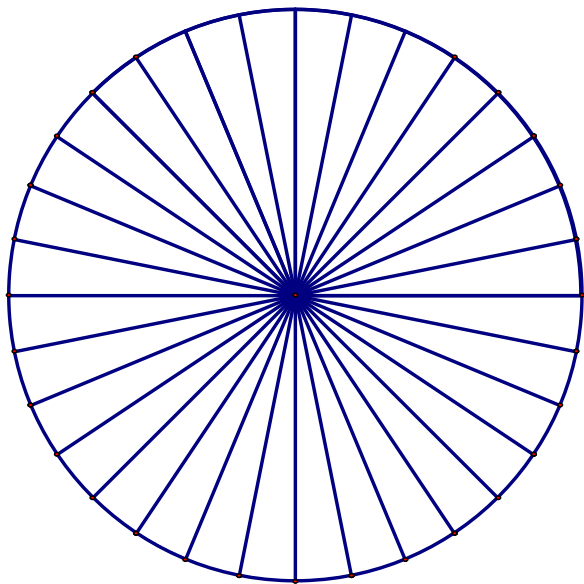
- aktivnost se dalje nastavlja na isti način - svaki od 8 sukladnih kružnih isječka učenici dijele na dva sukladna kružna isječka (ukupno ih je 16) i od njih sastavljaju novi lik, kao na slici
- opet zaključuju da se površina lika nije promijenila, kao ni duljine njegove “osnovice” i “bočnih stranica”, no “valovite linije” su sve ravnije i sve više nalik dužini



# POVRŠINA KRUGA (22)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

- učenici postupak misaono nastavljaju do u beskonačnost, dijeleći postojeće kružne isječke na dva sukladna dijela i formirajući nove likove
- površina likova ovim se postupkom ne mijenja, kao ni duljine njihovih “osnovica” i “bočnih stranica”, no “valovite linije” postaju sve ravnije i sličnije dužini



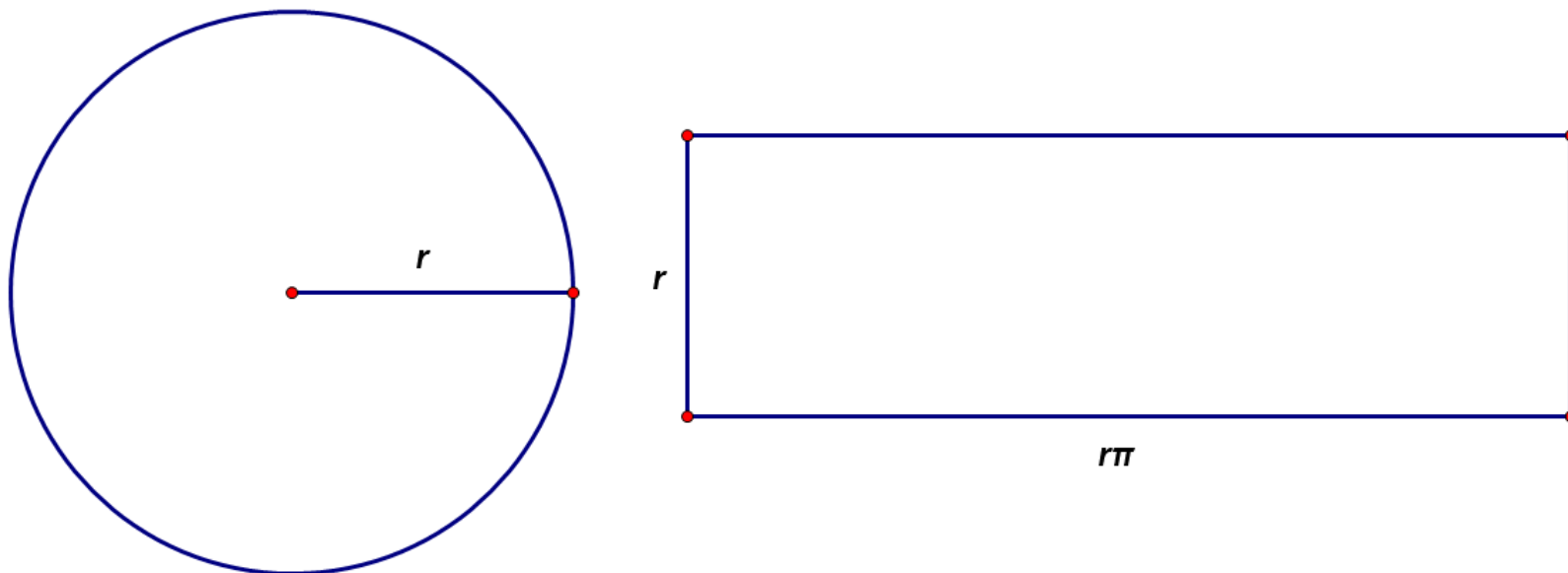


# POVRŠINA KRUGA (23)

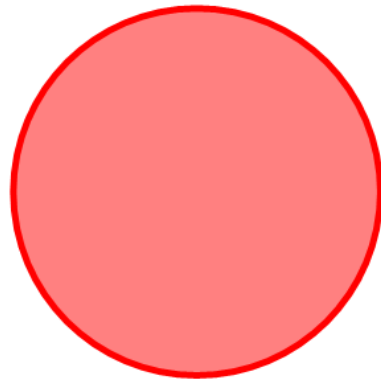
## Tijek aktivnosti (nastavak):

- učenici primjećuju da svakom novom iteracijom dobiveni lik postaje sve sličniji, najprije paralelogramu, a zatim pravokutniku sa stranicama čije su duljine jednake poluopsegu te polumjeru polaznog kruga i čija je površina jednaka površini polaznog kruga
- zaključak:

$$P = (r\pi) \cdot r = r^2\pi$$



## **2.1.4. Površina kružnog isječka**



# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA

## CILJ AKTIVNOSTI

Učenici će, radeći u paru na pripremljenom nastavnom listiću, otkriti ovisnost površine kružnog isječka danog kruga o veličini pripadnog središnjeg kuta.

## NASTAVNI OBLIK

- diferencirana nastava u obliku rada u paru

## NASTAVNA METODA

- heuristička nastava (otkrivanje pravilnosti)

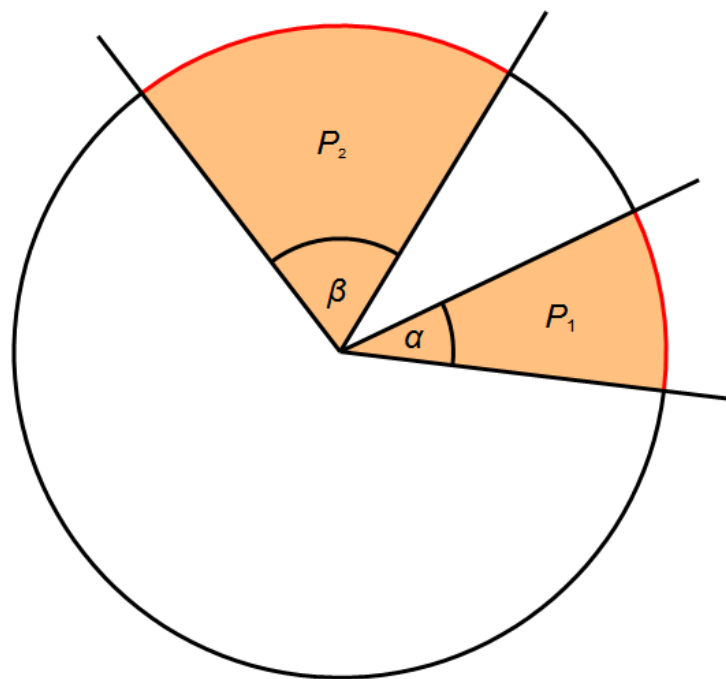
## POTREBAN MATERIJAL

- motivacijski zadatak
- nastavni listić za svakog učenika

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (2)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Učenici prvo intuitivno uočavaju kako se mijenja površina kružnog isječka:
  - za zadani krug (duljina polumjera je fiksna), većem središnjem kutu odgovara kružni isječak veće površine (što nije dovoljno za zaključak o proporcionalnosti!!)



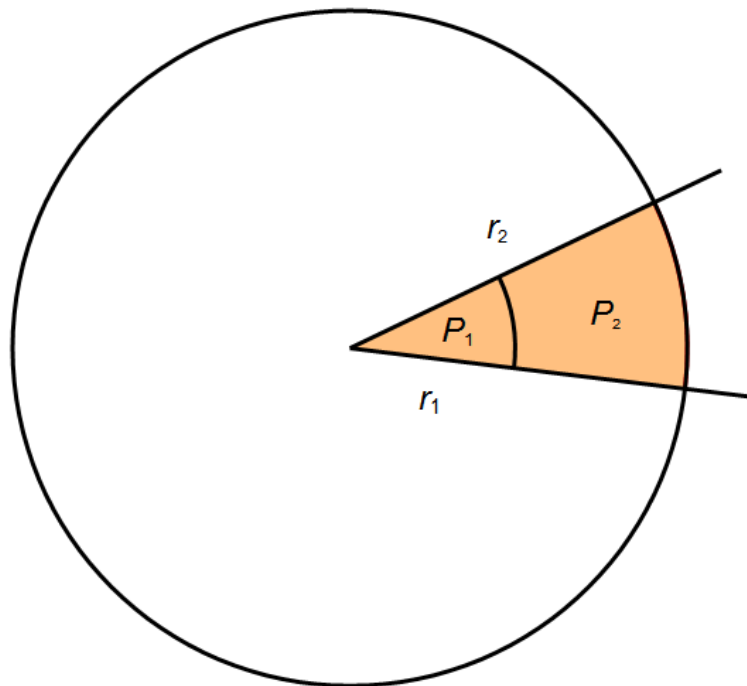
**KOVARIJACIJA!!!**

$$\alpha < \beta \Rightarrow P_1 < P_2$$

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (3)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- za zadani središnji kut (veličina kuta je fiksna), krugu većeg polumjera odgovara kružni isječak veće površine



**KOVARIJACIJA!!!**

$$r_1 < r_2 \Rightarrow P_1 < P_2$$

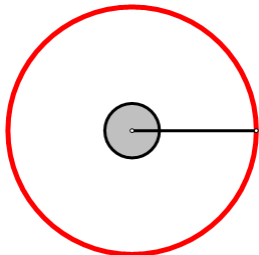
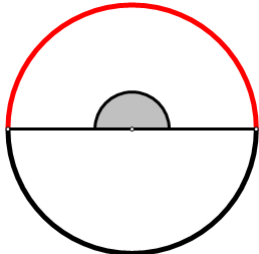
# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (4)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Sada je potrebno otkriti tip ovisnosti površine kružnog isječka zadanog (fiksno) kruga o veličini pripadnog središnjeg kuta.
- Učenici dobivaju nastavni listić kojeg trebaju popuniti radeći u paru.
- Na nastavnom listiću prvo promatraju površine poznatih kružnih isječaka, vezane uz koncept razlomka i pridružuju im središnji kut.
- Cilj prvog dijela nastavnog listića je doći do površine kružnog isječka koja odgovara središnjem kutu veličine  $1^\circ$ .
- Nakon toga, multipliciranjem uz primjenu analogije i generalizacije nepotpunom indukcijom, učenici otkrivaju opću ovisnost.
- U procesu uočavanja pravilnosti bitno je ne preskakati logičke korake!

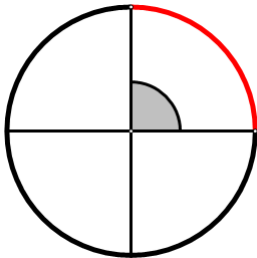
## POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (5)

Dana je kružnica površine  $P$ . Radeći u paru dopunite tablicu! Što primjećujete?

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (6)

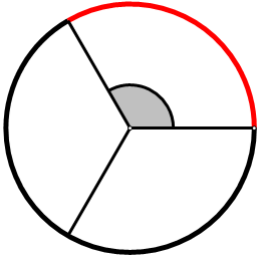
Tablica (nastavak)

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
			
			



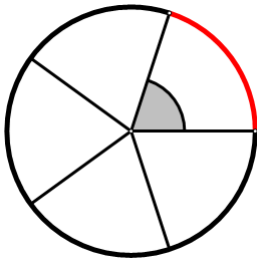
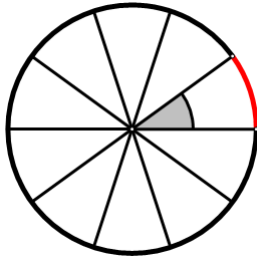
# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (7)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (8)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (9)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{360}$ kruga		

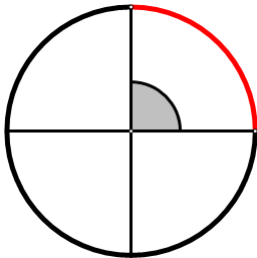
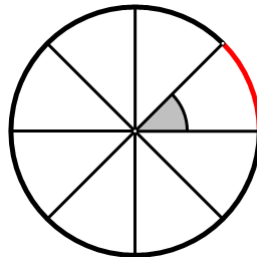
# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (10)

Dana je kružnica površine  $P$ . Radeći u paru dopunite tablicu! Što primjećujete?

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
	cijeli krug = 1 cijelo	$P$ = površina kruga	$360^\circ$
	$\frac{1}{2}$ kruga	$\frac{P}{2}$	$\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

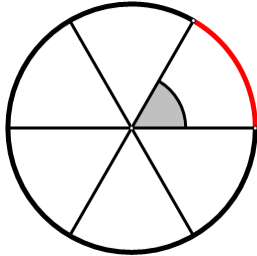
# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (11)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{4}$ kruga	$\frac{P}{4}$	$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$
	$\frac{1}{8}$ kruga	$\frac{P}{8}$	$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

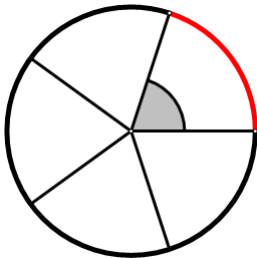
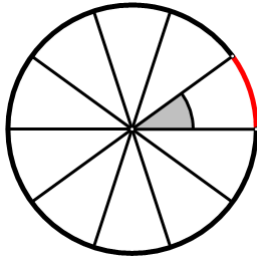
# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (12)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{3}$ kruga	$\frac{P}{3}$	$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$
	$\frac{1}{6}$ kruga	$\frac{P}{6}$	$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

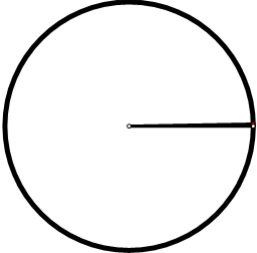
# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (13)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{5}$ kruga	$\frac{P}{5}$	$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
	$\frac{1}{10}$ kruga	$\frac{P}{10}$	$\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (14)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI ISJEČAK	DIO KRUGA	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{360}$ kruga	$\frac{P}{360}$	$\frac{360^\circ}{360} = 1^\circ$



# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (15)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Učenici će uočiti da se prepolavljanjem veličine središnjeg kuta prepolavlja i površina pripadnog kružnog isječka.
- Također će uočiti i da se smanjenjem veličine središnjeg kuta 4 **puta** jednako toliko **puta** smanjila i površina pripadnog kružnog isječka.
- Zapravo, učenici će primijetiti da su površina kružnog isječka i veličina odgovarajućeg središnjeg kuta **proporcionalne veličine**.
- Preostaje osvijestiti **koeficijent proporcionalnosti**, tj. jediničnu vrijednost.
- To je upravo površina kružnog isječka koja odgovara jediničnom kutu, tj. kutu veličine  $1^\circ$ .
- Kako bi to osvijestili, učenici sada dopunjuju i drugu tablicu.

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (16)

U paru dopunite i ovu tablicu!

SREDIŠNJI KUT	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA
1°	
2°	
3°	
4°	

SREDIŠNJI KUT	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA
5°	
10°	
15°	
47°	

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (17)

Tablica (nastavak)

SREDIŠNJI KUT	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA
$0.5^{\circ}$	
$213.7^{\circ}$	
$0^{\circ}$	
$\alpha$	

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (18)

U paru dopunite i ovu tablicu!

SREDIŠNJI KUT	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA
1°	$\frac{P}{360}$
2°	$2 \cdot \frac{P}{360}$
3°	$3 \cdot \frac{P}{360}$
4°	$4 \cdot \frac{P}{360}$

ANALOGIJA

SREDIŠNJI KUT	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA
5°	$5 \cdot \frac{P}{360}$
10°	$10 \cdot \frac{P}{360}$
15°	$15 \cdot \frac{P}{360}$
47°	$47 \cdot \frac{P}{360}$

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (19)

Tablica (nastavak)

SREDIŠNJI KUT	POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA
$0.5^\circ$	$0.5 \cdot \frac{P}{360}$
$213.7^\circ$	$213.7 \cdot \frac{P}{360}$
$0^\circ$	$0 \cdot \frac{P}{360} = 0$
$\alpha$	$\alpha \cdot \frac{P}{360}$

I OVE SU ANALOGIJE VAŽNE!

**GENERALIZACIJA**  
(nepotpunom indukcijom)

# POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA (20)

## TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Konačno, učenici su došli do zaključka da je površina  $K$  kružnog isječka kruga površine  $P$ , koji odgovara središnjem kutu veličine  $\alpha$  dana izrazom:

$$K = K(\alpha) = \frac{P}{360} \cdot \alpha$$

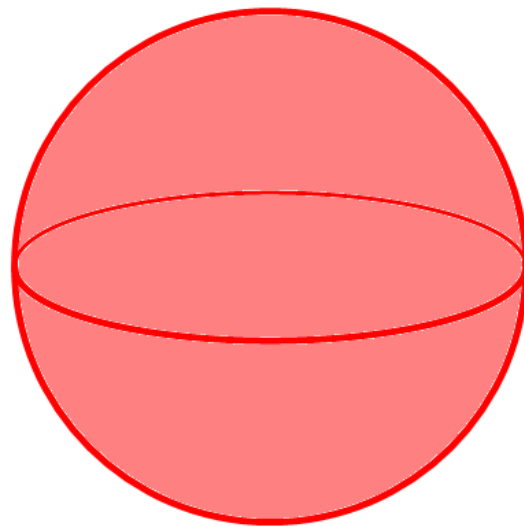
- Dakle, **koeficijent proporcionalnosti** jednak je  $\frac{P}{360}$ .
- Ako je krug bio polumjera duljine  $r$ , zbog prije naučene veze  $P = r^2\pi$  učenici zaključuju:

$$K = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha$$

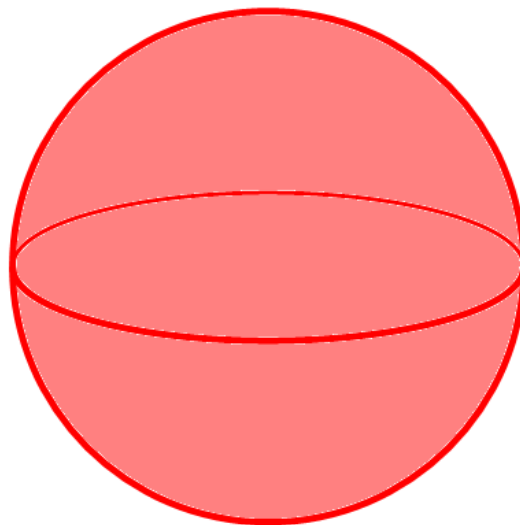
- Napomena: **Vežu je ipak smislenije pamtiti u obliku**

$$K = \frac{P}{360} \cdot \alpha$$

## **2.2. KUGLA I SFERA**



## 2.2.1. Oplošje kugle





# OPLOŠJE KUGLE (POVRŠINA SFERE)

**AKTIVNOST.** Arhimedova metoda s narančama, eksperiment s fizičkim materijalima

## Cilj aktivnosti:

- učenici će, radeći u timu, mjerenjem površine narančine kore “otkriti” vezu oplošja kugle i njenog polumjera

## Oblik rada:

- suradničko-timski rad učenika u četveročlanim timovima

## Potreban materijal:

- deblji papir (A4 formata) za svaki par učenika
- 1 veća naranča za svaki par učenika
- nož za rezanje voća

## OPLOŠJE KUGLE (POVRŠINA SFERE) (2)

### Tijek aktivnosti:

- svaki par (ili tim) učenika dobije jednu naranču i razreže ju duž glavnog presjeka (kruga čiji je polumjer jednak polumjeru kugle)



COPYRIGHT (C) BIURO RCE  
WWW.DIGITALPHOTO.PL



COPYRIGHT (C) BIURO RCE  
WWW.DIGITALPHOTO.PL

# OPLOŠJE KUGLE (POVRŠINA SFERE) (3)

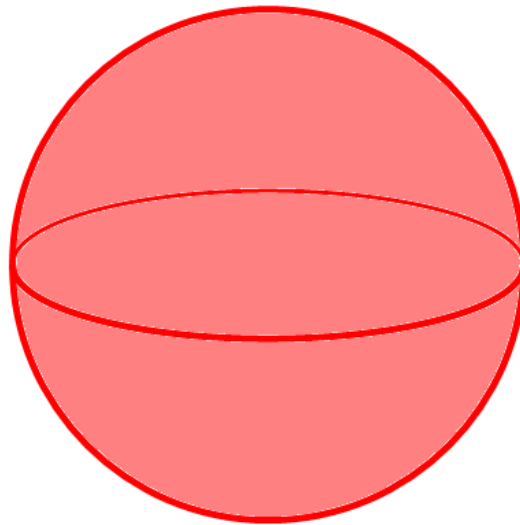
## Tijek aktivnosti (nastavak):

- na papiru učenici trebaju nekoliko puta (npr. 5) napraviti “otisak” presjeka naranče
- svaki otisak potrebno je odmah obrubiti olovkom, da se vidi i nakon sušenja papira
- učenici trebaju pažljivo oguliti naranču i korom “popuniti” kružne otiske
- zaključak: “popunjena” su približno 4 otiska
  - oplošje kugle (površina narančine kore) 4 je puta veće od površine njenog glavnog kruga, tj.  $O = 4r^2 \pi$

## OPLOŠJE KUGLE (POVRŠINA SFERE) (4)



## 2.2.2. Volumen kugle



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE

## AKTIVNOST 1. Arhimedova metoda, eksperiment mjerenjem fizičkih objekata

### Cilj aktivnosti:

- učenici će mjerenjem promjene visine i zapremine vode u cilindričnoj posudi, u koju se umeće kugla jednakog polumjera, te računanjem “otkriti” vezu volumena kugle i njenog polumjera

### Oblik rada:

- suradničko-timski rad učenika u četveročlanim timovima

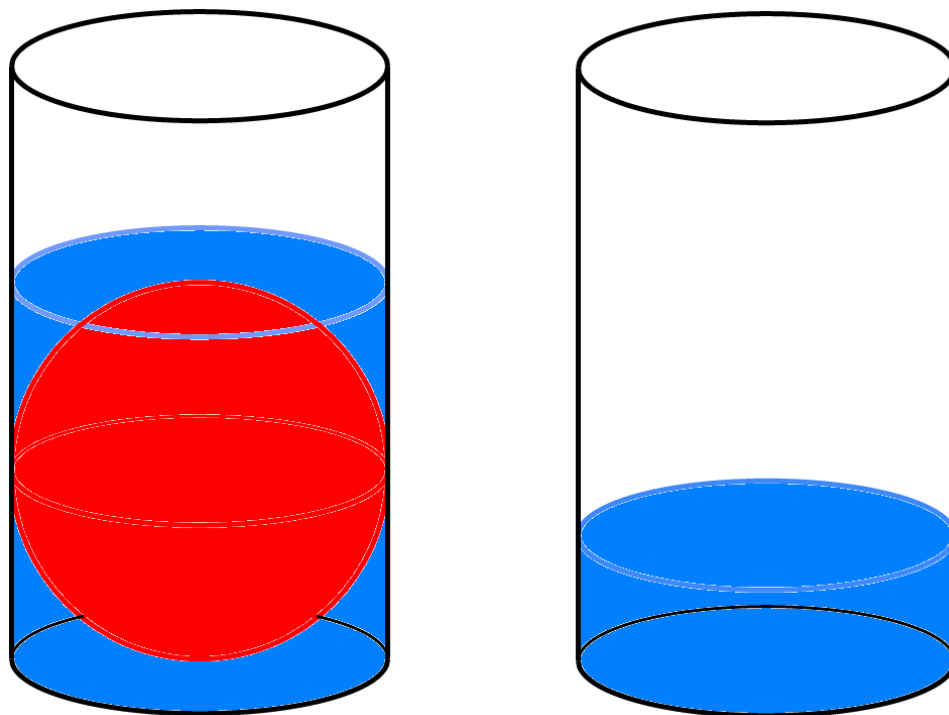
### Potrebni materijal:

- prozirna visoka cilindrična posuda, po mogućnosti s mjerilom (menzura)
- kugla čiji je polumjer jednak polumjeru cilindrične posude
- voda
- metar (označeno ravnalo)
- nastavni listić za učenike s tablicom za zapisivanje rezultata mjerenja i zapisivanje zaključaka

## VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (2)

### Tijek aktivnosti:

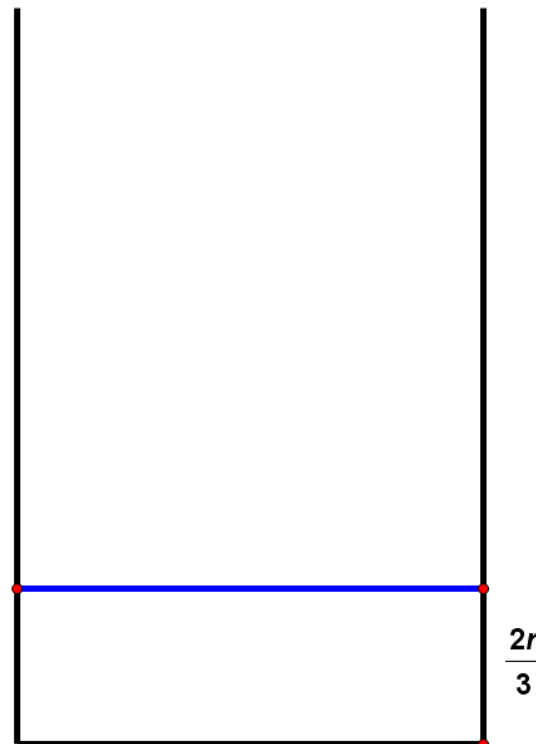
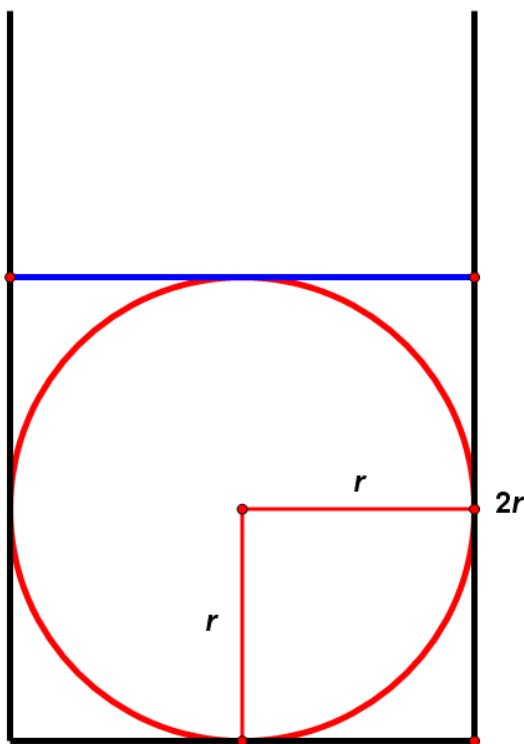
- učenici u cilindričnu posudu umeću kuglu i potom posudu pune vodom do “vrha kugle”, tj. do visine jednake promjeru kugle
- učenici mjere visinu vode u posudi i zapisuju ju u tablicu
- nakon mjerenja visine vode, učenici vade kuglu iz posude
- učenici će uočiti da se razina vode u posudi spustila i izmjeriti novu visinu vode



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (3)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

- računanjem se vidi da je **nova visina vode u posudi jednaka trećini prethodne visine**, tj. da je količnik nove i prethodne visine jednak jednoj trećini
- analizom situacije, učenici trebaju zaključiti da je volumen  $V_{vk}$  valjka, kojeg određuje površina vode s osnovkom i stijenkom posude, jednak zbroju volumena vode  $V_v$  i volumena kugle  $V_k$





# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (4)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

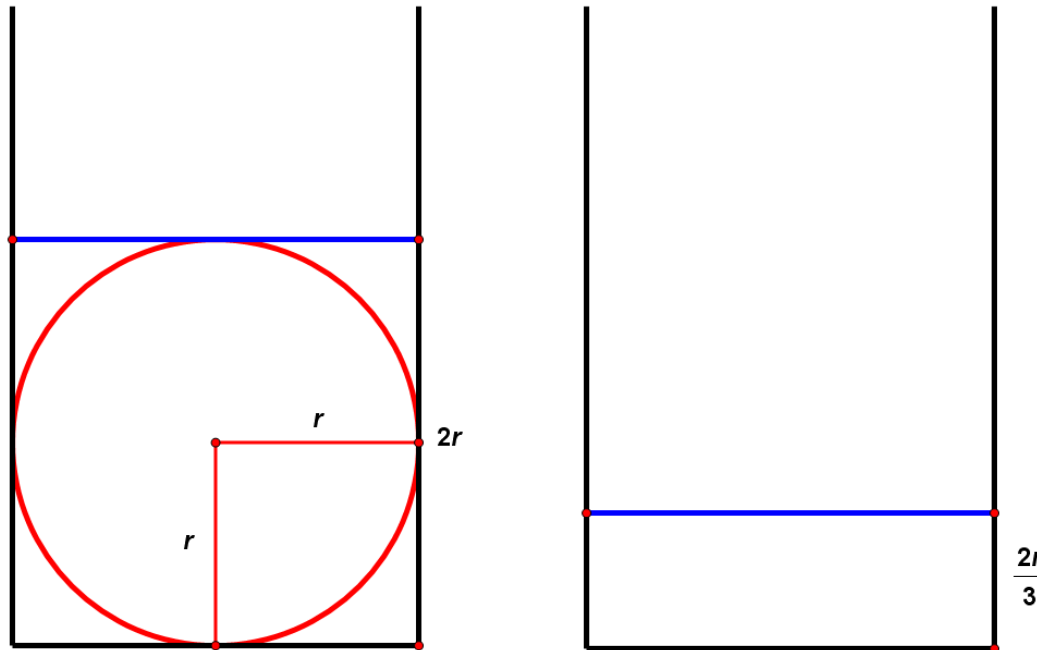
- volumene  $V_{vk}$  i  $V_v$  učenici znaju odrediti (prethodno su naučili odrediti volumen valjka)

$$V_{vk} = r^2 \pi \cdot 2r = 2r^3 \pi$$

$$V_v = r^2 \pi \cdot \frac{2r}{3} = \frac{2}{3} r^3 \pi$$

- zato je

$$V_k = V_{vk} - V_v = 2r^3 \pi - \frac{2}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$$



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (5)

## Diskusija:

- vjerojatno će biti teško pronaći cilindričnu posudu kojoj je polumjer osnovke jednak polumjeru kugle kojom raspolažemo (npr. kutija za teniske loptice i teniska loptica su odgovarajući par)
- zato ovu aktivnost treba prilagoditi raspoloživoj posudi i kuglama

# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (6)

## AKTIVNOST 2. Arhimedova metoda, eksperiment mjerenjem fizičkih objekata

### Cilj aktivnosti:

- učenici će mjerenjem promjene visine i zapremine vode u cilindričnoj posudi, u koju se umeću kugle različitih promjera, te računanjem “otkriti” vezu volumena kugle i njenog polumjera

### Oblik rada:

- suradničko-timski rad učenika u četveročlanim timovima

### Potrebni materijal:

- prozirna visoka cilindrična posuda (visine veće od promjera), po mogućnosti s mjerilom (menzura)
- više kugala različitog polumjera, manjeg od polumjera cilindrične posude
- voda
- metar (označeno ravnalo)
- nastavni listić za učenike s tablicom za zapisivanje rezultata mjerenja i zapisivanje zaključaka

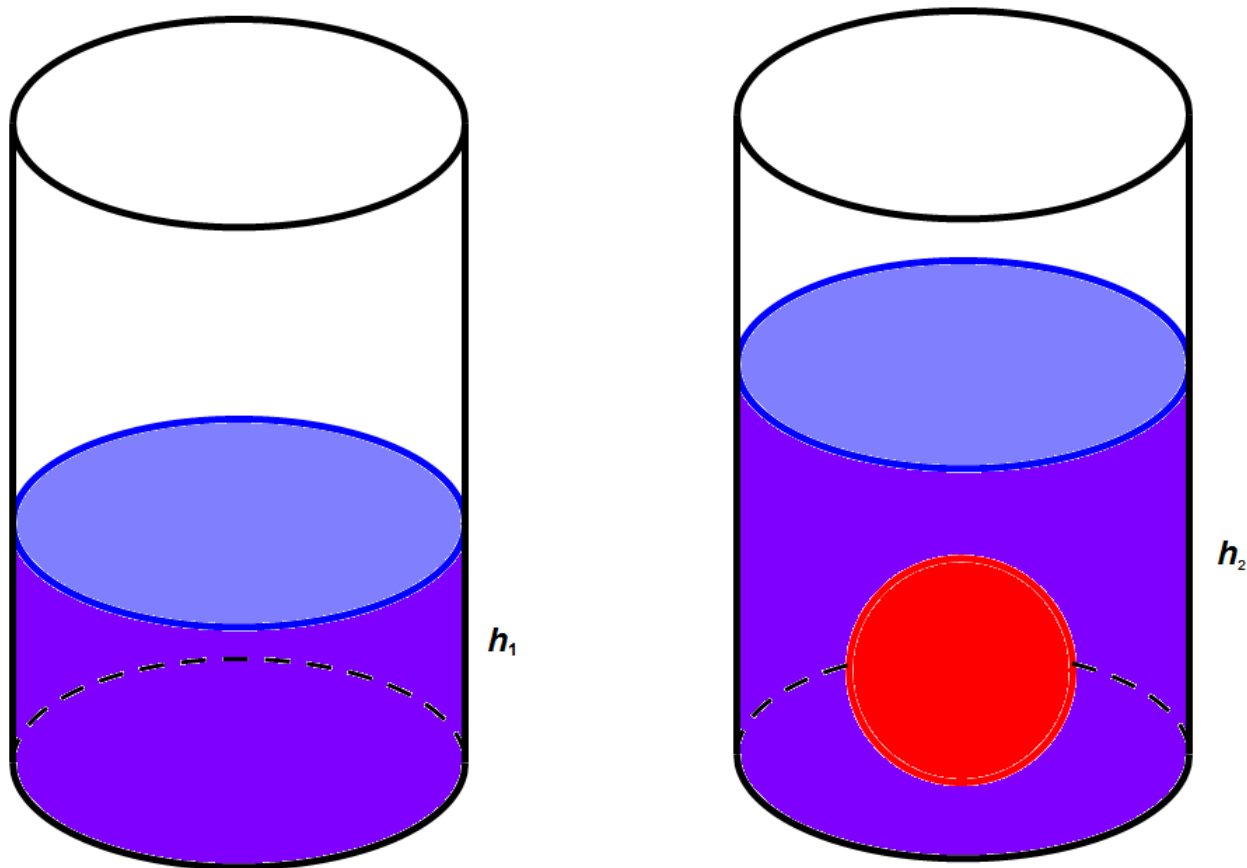
# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (7)

## Tijek aktivnosti:

- učenici najprije trebaju izmjeriti promjer cilindrične posude ( $D = 2R$ ) i neke od kugala ( $d = 2r$ ) (npr. tako da ih postave između dviju paralelno postavljenih debelih knjiga i izmjere njihovu udaljenost)
- u posudu zatim uliju vodu (ne do vrha!), izmjere visinu vode ( $h_1$ ) i izračunaju njezin volumen  $V_v = R^2 \pi \cdot h_1$
- potom u posudu umeću kuglu, izmjere novu visinu vode ( $h_2$ ,  $h_2 > h_1$ ) i izračunaju volumen vode s kuglom  $V_{vk} = R^2 \pi \cdot h_2$
- učenici zaključuju da je volumen kugle jednak  $V_k = V_{vk} - V_v$
- na kraju računaju količnik  $V_k : (r^3 \pi) = (V_{vk} - V_v) : (r^3 \pi) = R^2 \cdot (h_2 - h_1) : r^3$
- postupak je potrebno ponoviti za više različitih kugli, visina ulivene vode i, eventualno, posuda, bilježeći mjerenja i rezultate računanja u odgovarajuću tablicu

## VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (8)

Tijek aktivnosti (nastavak):



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (9)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

- svoja mjerenja i rezultate učenici upisuju u tablicu

PROMJER POSUDE $D$	PROMJER KUGLE $d$	VISINA VODE BEZ KUGLE $h_1$	VISINA VODE S KUGLOM $h_2$	VOLUMEN VODE S KUGLOM $V_{vk}$	VOLUMEN VODE BEZ KUGLE $V_v$	RAZLIKA VOLUMENA $V_{vk} - V_v$	KOLIČNIK $(V_{vk} - V_v) : (r^3 \pi)$ $= V_k : (r^3 \pi)$

- učenici će zaključiti da je izračunati količnik uvijek (približno) iste vrijednosti  $\frac{4}{3} \approx 1.3$ , tj.

$$V_k = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (10)

## AKTIVNOST 3. Metoda disekcije kugle (samo za srednju školu)

### Cilj aktivnosti:

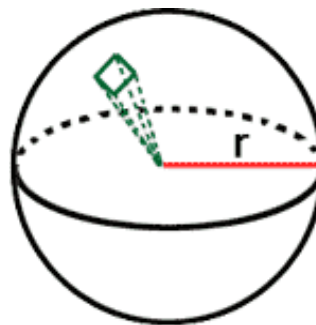
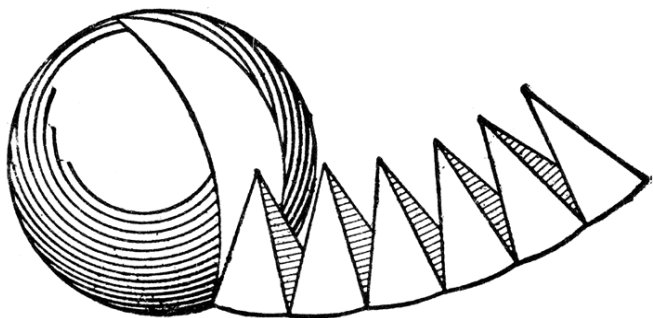
- učenici će disekcijom kugle na kugline isječke te zaključivanjem i računanjem “otkriti” vezu volumena kugle i njenog polumjera

### Oblik rada:

- rad učenika u paru

### Potrebni materijal:

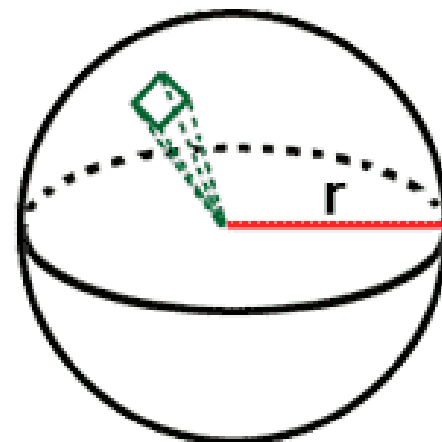
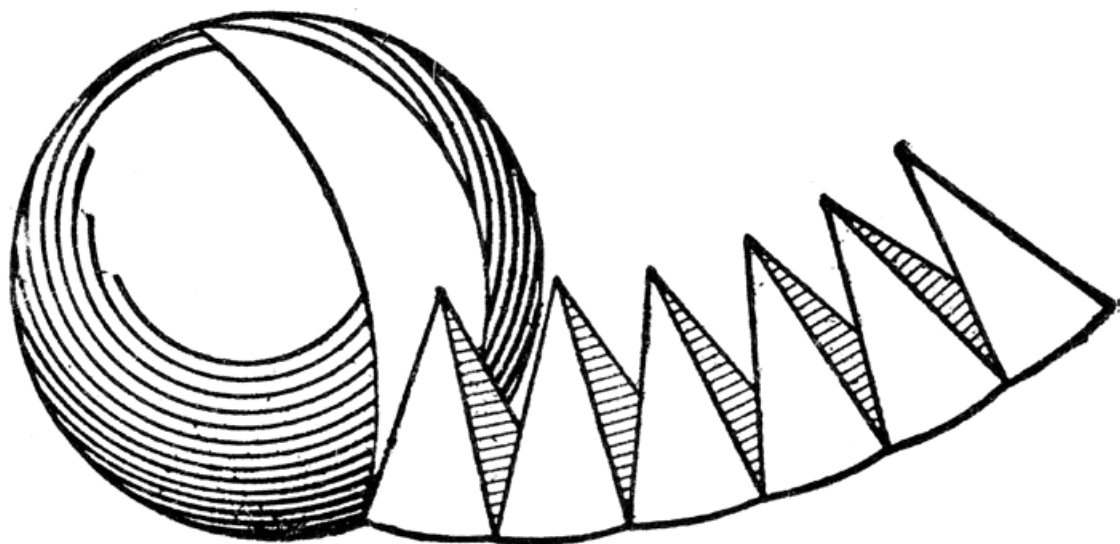
- crteži s opisom situacije



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (11)

## Tijek aktivnosti:

- učenici će uz pomoć crteža zamisliti da je kugla podijeljena na kugline “isječke”
- iskoristit će analogiju s kušanjem lubenice na tržnici





# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (12)

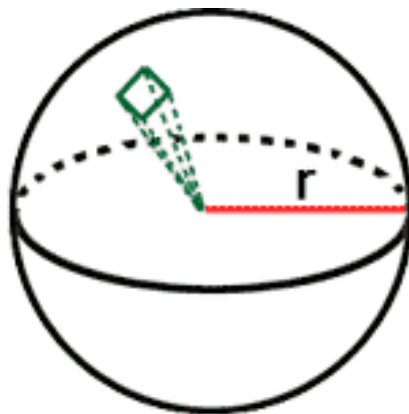
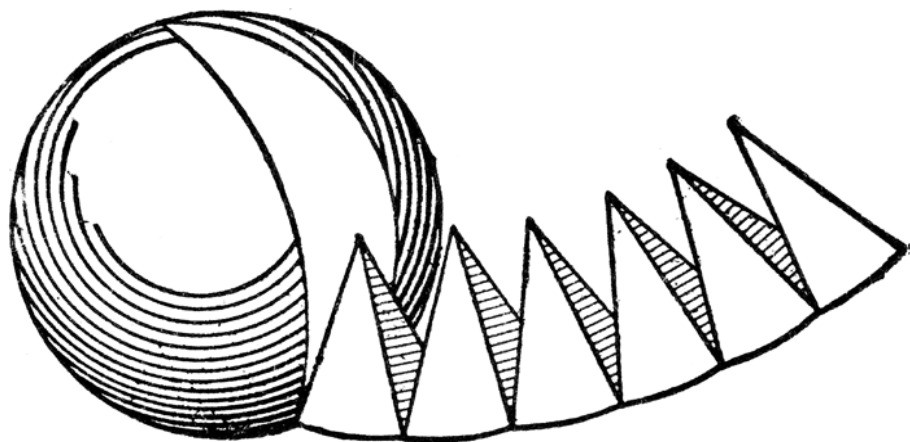
## Tijek aktivnosti (nastavak):

- učenici će zaključiti da je volumen kugle jednak zbroju volumena svih kuglinih “isječaka” na koje je podijeljena
- učit će i da je svaki kuglin “isječak” nalik piramidi čija je osnovka dio sfere
- označimo li polumjer kugle s  $r$ , a površinu osnovke kuglinog isječka s  $P_{isj}$ , učenici dolaze do zaključka da je

$$V_{isj} = \frac{1}{3} P_{isj} \cdot r$$

- zato je volumen kugle zbroj

$$V_k = \frac{1}{3} P_1 \cdot r + \frac{1}{3} P_2 \cdot r + \frac{1}{3} P_3 \cdot r + \dots = \frac{1}{3} (P_1 + P_2 + P_3 + \dots) \cdot r = \frac{1}{3} O \cdot r = \frac{1}{3} 4r^2 \pi \cdot r = \frac{4}{3} r^3 \pi$$



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (13)

## AKTIVNOST 4. Cavalierijev princip, za srednju školu

### Cilj aktivnosti:

- učenici će primjenom Cavalierijevog principa “otkriti” vezu volumena kugle i njenog polumjera

### Oblik rada:

- rad učenika u paru

### Potrebni materijal:

- nastavni listić za učenike s uputama za rad i prostorom za zapisivanje zaključaka

# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (14)

Tijek aktivnosti:

**Cavalierijev princip:**

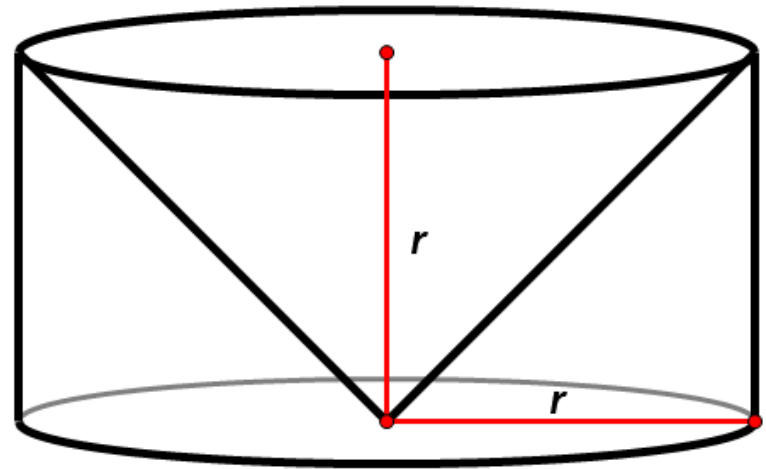
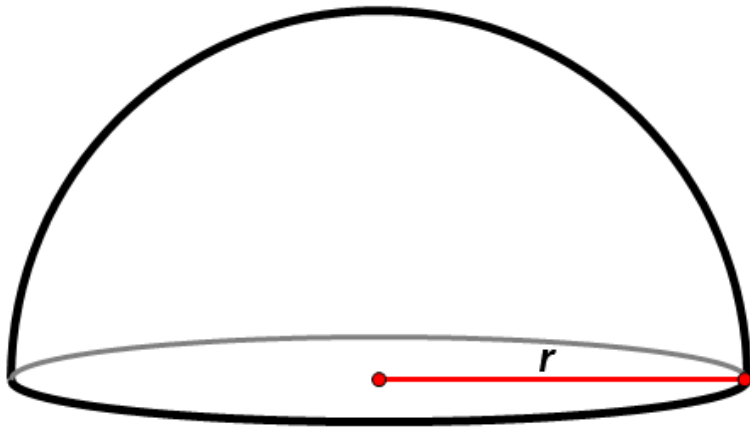
Neka su  $A$  i  $B$  dva tijela u prostoru. Ukoliko postoji ravnina sa svojstvom da presjeci tijela  $A$  i  $B$  sa svima njoj paralelnim ravninama imaju jednake površine, onda su volumeni tijela  $A$  i  $B$  jednaki.



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (15)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

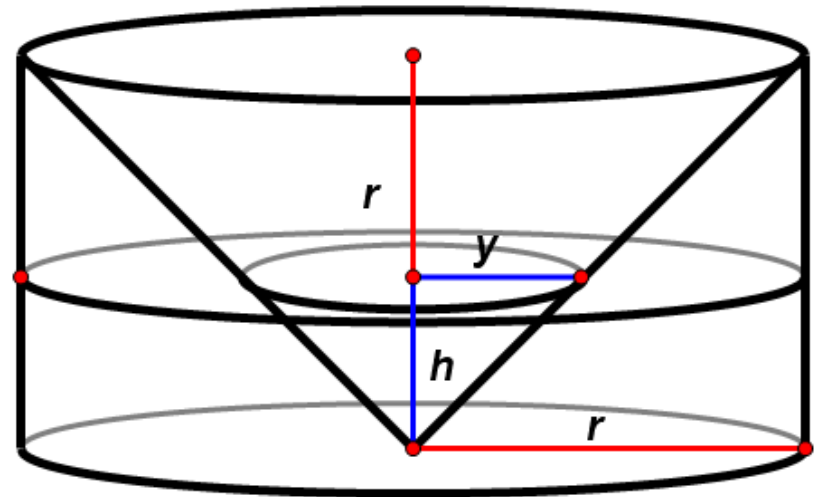
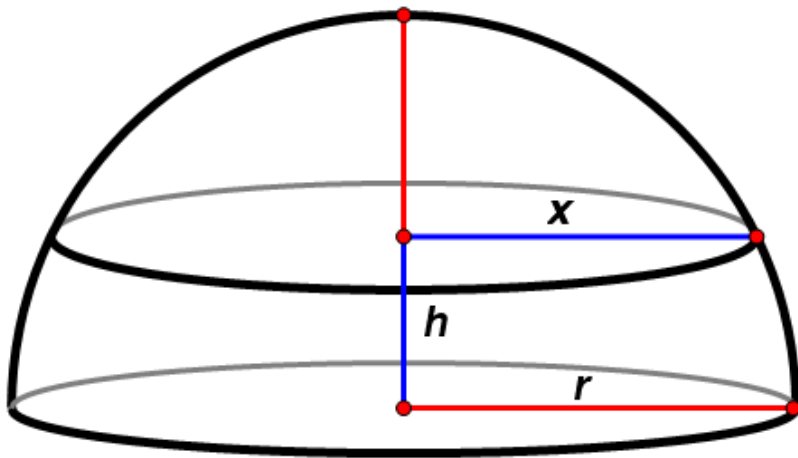
- volumen kugle određujemo primjenjujući Cavalierijev princip na polukuglu i valjak iz kojega je izvađen stožac
- u istu ravninu položimo glavni krug polukugle polumjera  $r$  te osnovku valjka, polumjera osnovke  $r$  i visine  $r$ , iz kojeg je izvađen stožac jednake osnovke, kao na slici



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (16)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

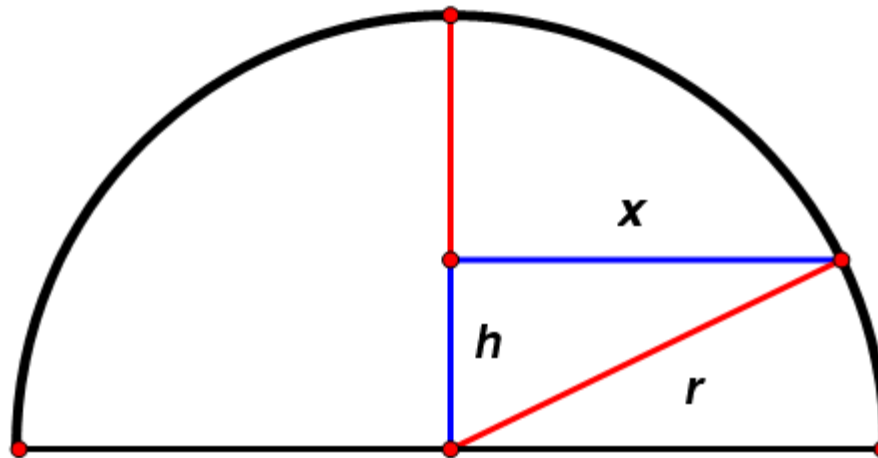
- potrebno je odrediti površinu presjeka oba tijela ravninama paralelnima ravnini u kojoj se nalaze njihove osnovke
- po volji odaberimo ravninu paralelnu s ravninom osnovki oba tijela i od nje udaljenu  $h$
- presjek polukugle tom ravninom je krug polumjera  $x$ , a presjek drugog tijela kružni vijenac vanjskog polumjera  $r$  i unutarnjeg polumjera  $y$



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (17)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

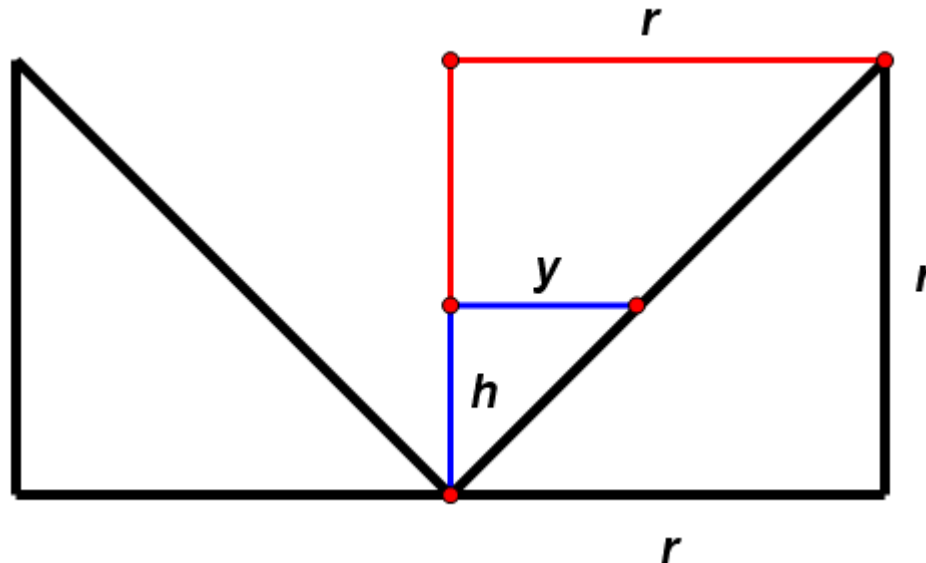
- primjenom Pitagorinog poučka, za polumjer  $x$  presjeka polukugle ravninom dobijemo  $x^2 = r^2 - h^2$
- zato je površina presjeka polukugle ravninom jednaka  $P_k = x^2 \pi = (r^2 - h^2) \pi$



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (18)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

- primjenom sličnosti trokuta (jednakokračni pravokutni trokuti!), za unutarnji polumjer  $y$  presjeka drugog tijela ravninom dobijemo  $y = h$
- zato je površina presjeka drugog tijela ravninom jednaka  $P_t = y^2 \pi = (r^2 - h^2) \pi = P_k$
- primjenom Cavalierijeva principa zaključujemo da su volumeni polukugle i drugog tijela (valjak bez stošca) jednaki



# VOLUMEN (OBUJAM) KUGLE (19)

## Tijek aktivnosti (nastavak):

- zato je

$$V_{\text{polukugle}} = V_{\text{valjak-stožac}} = r^2 \pi \cdot r - \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot r = r^3 \pi - \frac{1}{3} r^3 \pi = \frac{2}{3} r^3 \pi$$

$$V_{\text{kugle}} = 2 \cdot V_{\text{polukugle}} = 2 \cdot \frac{2}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

