

# Linearne jednadžbe i sustavi linearnih jednadžbi

Sanja Stilinović, prof. – učitelj savjetnik  
OŠ Augusta Šenoae, Zagreb

- Riješite jednađbe:

$$x + 2.9 = -4.6$$

$$-\frac{2}{3} - x = \frac{13}{3}$$

$$x - (-7) = -2$$

$$x : (-6) = 8$$

$$\frac{12}{25} : x = \frac{4}{5}$$

$$x + 2.9 = -4.6$$

$$x = -4.6 - 2.9$$

$$x = -7.5$$

$$-\frac{2}{3} - x = \frac{13}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3} - \frac{13}{3}$$

$$x = -\frac{15}{3} = -5$$

$$x - (-7) = -2$$

$$x = -2 + (-7)$$

$$x = -9$$

$$x : (-6) = 8$$

$$x = 8 \cdot (-6)$$

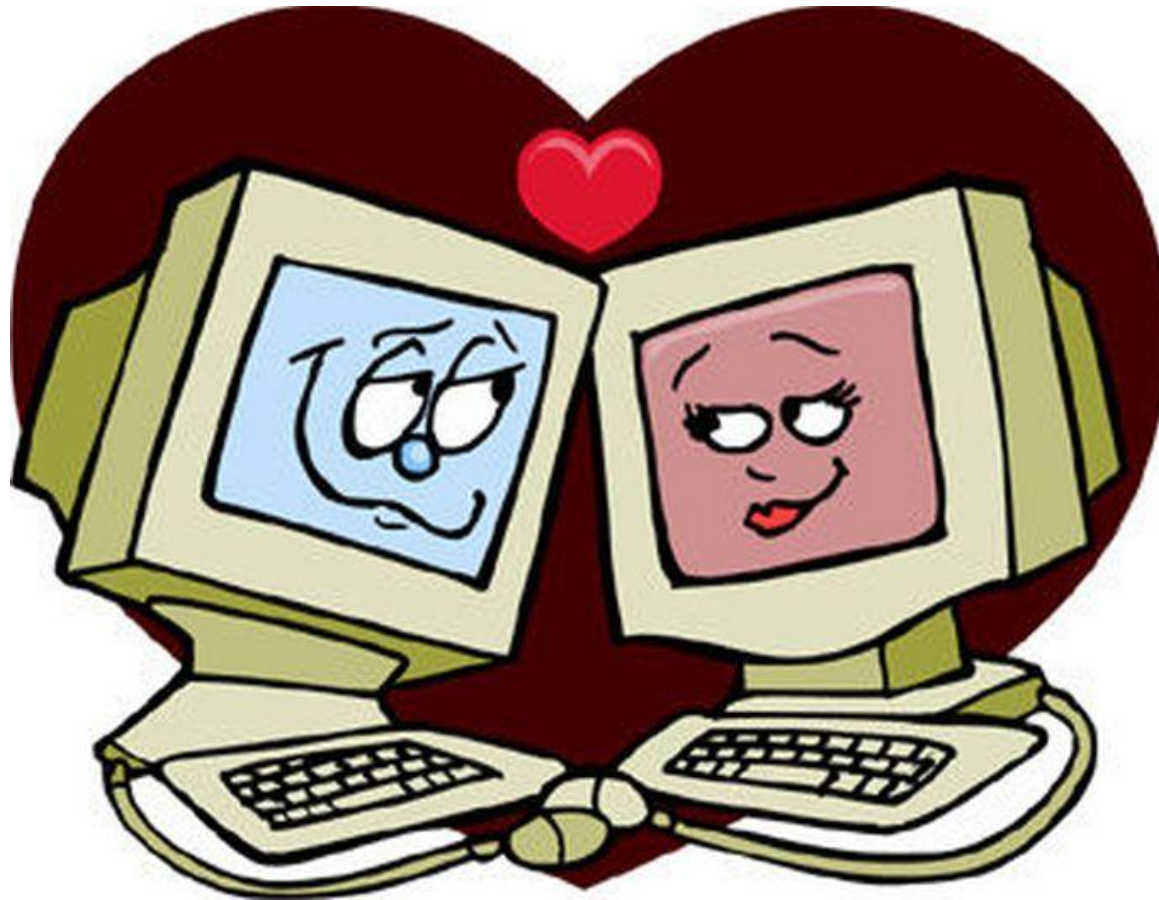
$$x = -48$$

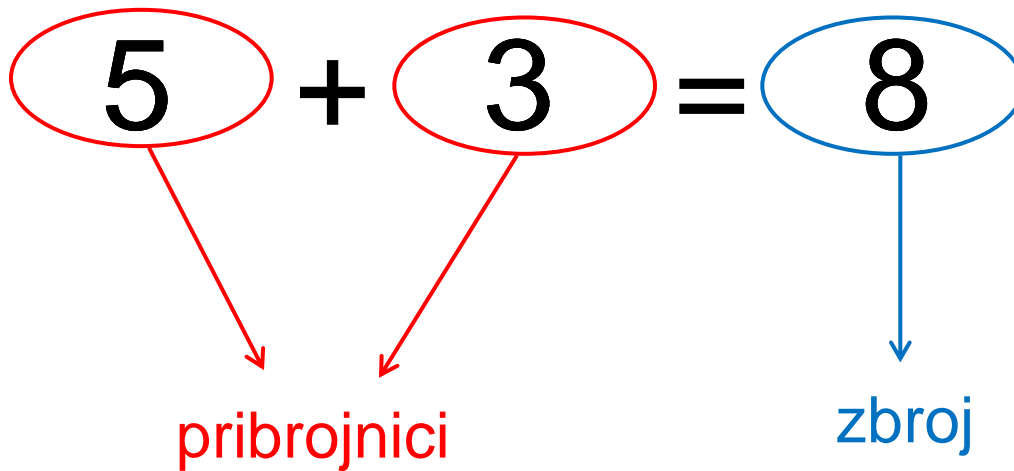
$$\frac{12}{25} : x = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{12}{25} : \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{3}{5}$$

# Veza računskih operacija





**pribrojnik + pribrojnik = zbroj**

**=** **-**

**=** **-**

**pribrojnik = zbroj - pribrojnik**

$$4 + 9 = 13$$

$$17.5 + 3.92 = 21.42$$

$$\frac{7}{5} + \frac{9}{4} = \frac{73}{20}$$

$$(-7) + 11 = 4$$

JEDNAKOSTI

$$(-7.5) + 2.9 = -4.6$$

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{19}{3}\right) = -\frac{17}{3}$$

$$(-9) + (-7) = -16$$

Koje jednakosti možemo napisati ako je dana jednakost:

$$17.5 + 3.92 = 21.42$$

$$21.42 - 17.5 = 3.92$$

$$21.42 - 3.92 = 17.5$$

$$(-7) + 11 = 4$$

$$4 - (-7) = 11$$

$$4 - 11 = -7$$

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{19}{3}\right) = -\frac{17}{3}$$

$$\left(-\frac{17}{3}\right) - \frac{2}{3} = -\frac{19}{3}$$

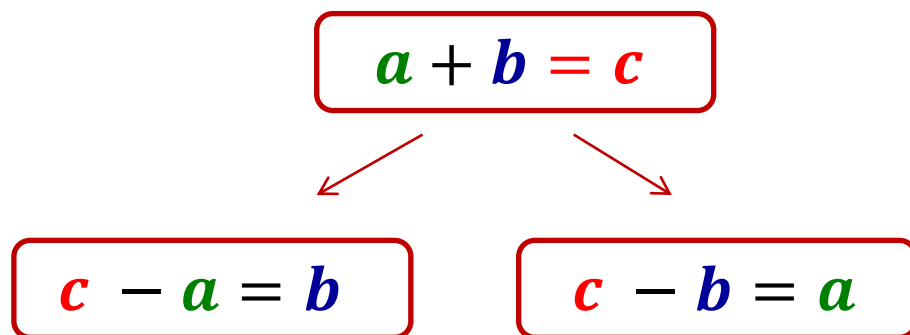
$$\left(-\frac{17}{3}\right) - \left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$(-9) + (-7) = -16$$

$$(-16) - (-9) = -7$$

$$(-16) - (-7) = -9$$

$$a, b, c \in \mathbb{Q}$$





A diagram illustrating the components of a subtraction equation. The number 5 is enclosed in a red oval, the number 3 in a green oval, and the number 2 in a blue oval. Arrows point from each number to its corresponding label below: 'umanjenik' (minuend) for 5, 'umanjitelj' (subtrahend) for 3, and 'razlika' (difference) for 2.

$$\text{umanjenik} - \text{umanjitelj} = \text{razlika}$$

$$\text{umanjenik} - \text{umanjitelj} = \text{razlika}$$

$$= +$$

$$\text{umanjenik} = \text{razlika} + \text{umanjitelj}$$

$$= -$$

$$\text{umanjitelj} = \text{umanjenik} - \text{razlika}$$

$$9 - 4 = 5$$

$$17.5 - 3.92 = 13.58$$

$$\frac{7}{5} - \frac{9}{4} = -\frac{17}{20}$$

$$(-7) - 11 = -18$$

JEDNAKOSTI

$$(-7.5) - 2.9 = -10.4$$

$$\frac{2}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{13}{3}$$

$$(-9) - (-7) = -2$$

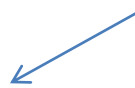
Koje jednakosti možemo napisati ako je dana jednakost:

$$17.5 - 3.92 = 13.58$$


$$13.58 + 3.92 = 17.5$$



$$17.5 - 13.58 = 3.92$$


$$(-7) - 11 = -18$$


$$(-18) + 11 = -7$$



$$(-7) - (-18) = 11$$


$$\frac{2}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{13}{3}$$


$$\frac{13}{3} + \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{2}{3}$$


$$\frac{2}{3} - \frac{13}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$(-9) - (-7) = -2$$


$$(-2) + (-7) = -9$$


$$(-9) - (-2) = -7$$

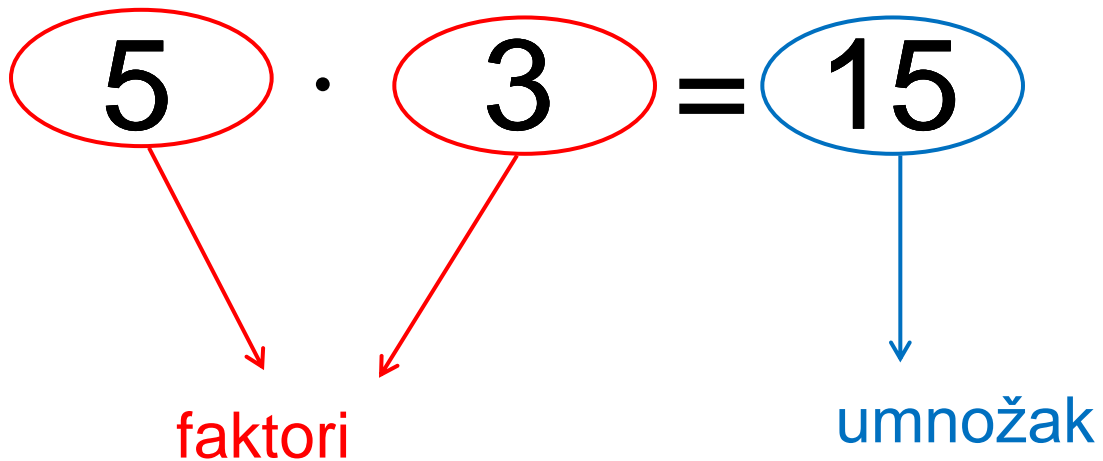
$$a, b, c \in \mathbb{Q}$$

$$a - b = c$$



$$c + b = a$$

$$a - c = b$$



$$\text{faktor} \cdot \text{faktor} = \text{umnožak}$$

$$= :$$

$$= :$$

$$\text{faktor} = \text{umnožak} : \text{faktor}$$

$$8 \cdot 7 = 56$$

$$4.2 \cdot 1.3 = 5.46$$

$$\frac{7}{5} \cdot \frac{9}{4} = \frac{63}{20}$$

$$(-7) \cdot 11 = -77$$

JEDNAKOSTI

$$(-7.5) \cdot 2.9 = -21.75$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left( -\frac{19}{3} \right) = -\frac{38}{9}$$

$$(-9) \cdot (-7) = 63$$

Koje jednakosti možemo napisati ako je dana jednakost:

$$4.2 \cdot 1.3 = 5.46$$



$$5.46 : 4.2 = 1.3$$

$$5.46 : 1.3 = 4.2$$


$$(-7) \cdot 11 = -77$$


$$(-77) : (-7) = 11 \quad (-77) : 11 = -7$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{19}{3}\right) = -\frac{38}{9}$$


$$\left(-\frac{38}{9}\right) : \frac{2}{3} = -\frac{19}{3} \quad \left(-\frac{38}{9}\right) : \left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{2}{3}$$


$$(-9) \cdot (-7) = 63$$


$$63 : (-9) = -7$$

$$63 : (-7) = -9$$

$$a, b, c \in \mathbb{Q}$$

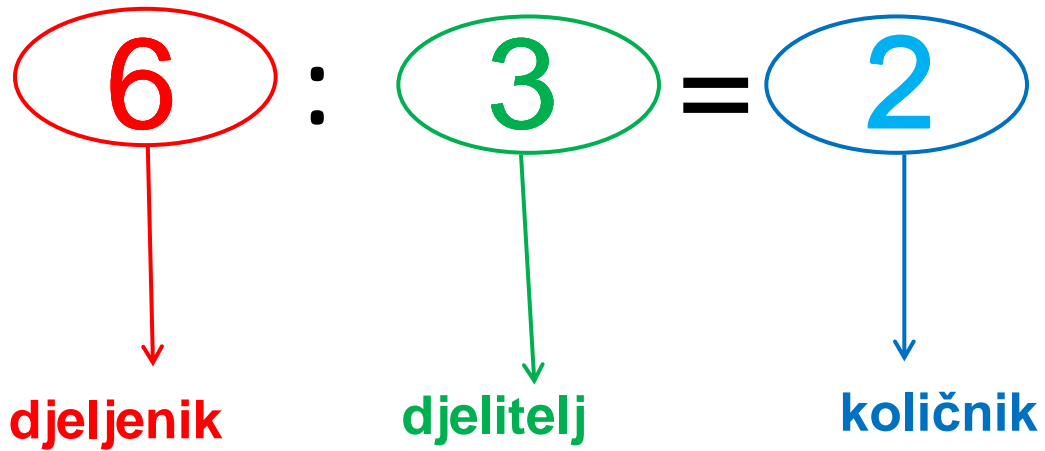
$$a, b, c \neq 0$$

$$a \cdot b = c$$


$$c : a = b$$

$$c : b = a$$





**djeljenik : djelitelj = količnik**

**= •**

**djeljenik = količnik • djelitelj**

**= :**

**djelitelj = djeljenik : količnik**

$$42 : 7 = 6$$

$$9.8 : 2.8 = 3.5$$

$$\frac{12}{25} : \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$(-26) : 13 = -2$$

JEDNAKOSTI

$$(-9) : 1.6 = -5.625$$

$$\frac{2}{3} : \left(-\frac{19}{3}\right) = -\frac{6}{57}$$

$$(-48) : (-6) = 8$$

Koje jednakosti možemo napisati ako je dana jednakost:

$$9.8 : 2.8 = 3.5$$

$$3.5 \cdot 2.8 = 9.8$$

$$9.8 : 3.5 = 2.8$$

$$(-26) : 13 = -2$$

$$(-2) \cdot 13 = -26$$

$$(-26) : (-2) = 13$$

$$\frac{2}{3} : \left(-\frac{19}{3}\right) = -\frac{6}{57}$$

$$\left(-\frac{6}{57}\right) \cdot \left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} : \left(-\frac{6}{57}\right) = -\frac{19}{3}$$

$$(-48) : (-6) = 8$$

$$8 \cdot (-6) = -48$$

$$(-48) : 8 = -6$$

$$a, b, c \in \mathbb{Q}$$

$$a, b, c \neq 0$$

$$a : b = c$$


$$c \cdot b = a$$

$$a : c = b$$

$$a \in \mathbb{Q}$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$0 : a = 0, \text{ ako je } a \neq 0$$

$$a : 0 = ?$$

nema rješenja  
ako je  $a \neq 0$

neodređeno  
ako je  $a = 0$

# Jednakost



Baka Katarina je kupila dvije čokolade za svoje unuke, Kolumbo za Anu i Toblerone za Paulu. Obje su pojele svoje čokolade. Tko je pojeo više čokolade i zašto?



Jednakost masa





Maja i Roč su na izletu u aquaparku. Spuštanje niz brzi tobogan košta 2 kn, a spuštanje niz zavojiti 3 kn. Odlučili su se i počastiti sladoledom, a cijena kuglice je 6 kn. Maja se spustila tri puta niz brzi i dva puta niz zavojiti tobogan i pojela je 2 kuglice sladoleda. Roč se spuštao 3 puta niz brzi tobogan i pojeo je četiri kuglice sladoleda. Tko je potrošio više i zašto?



## Jednakost količina



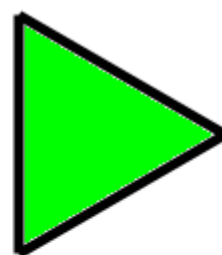
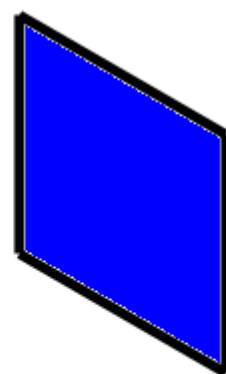
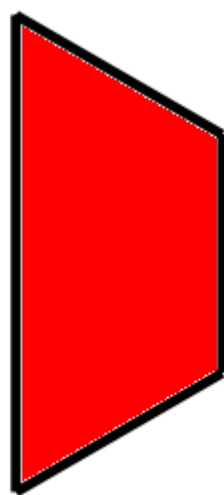
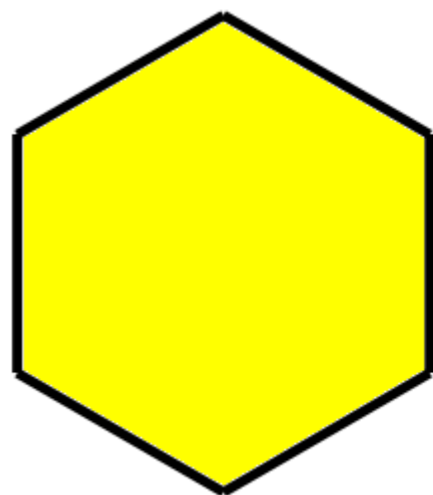
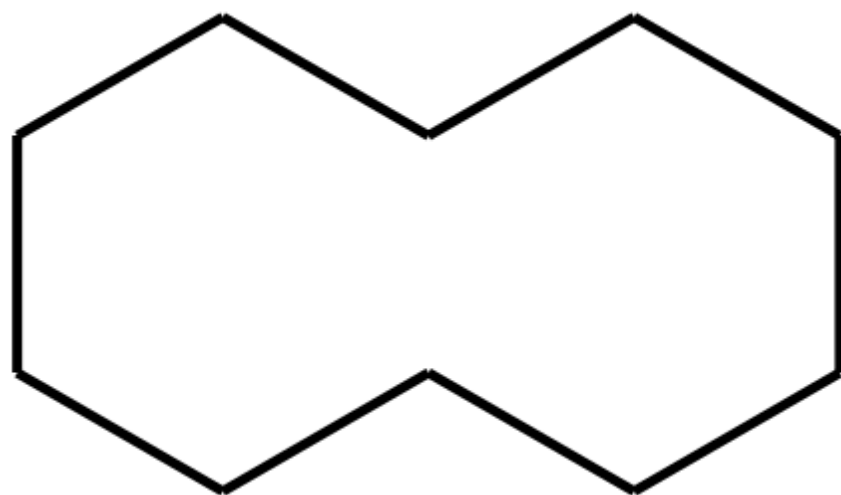
**Ravnotežu vage matematički možemo zapisati pomoću jednakosti.**

Masa Kolumbo čokolade iznosi 100 g, a masa Toblerone čokolade iznosi 100 g.

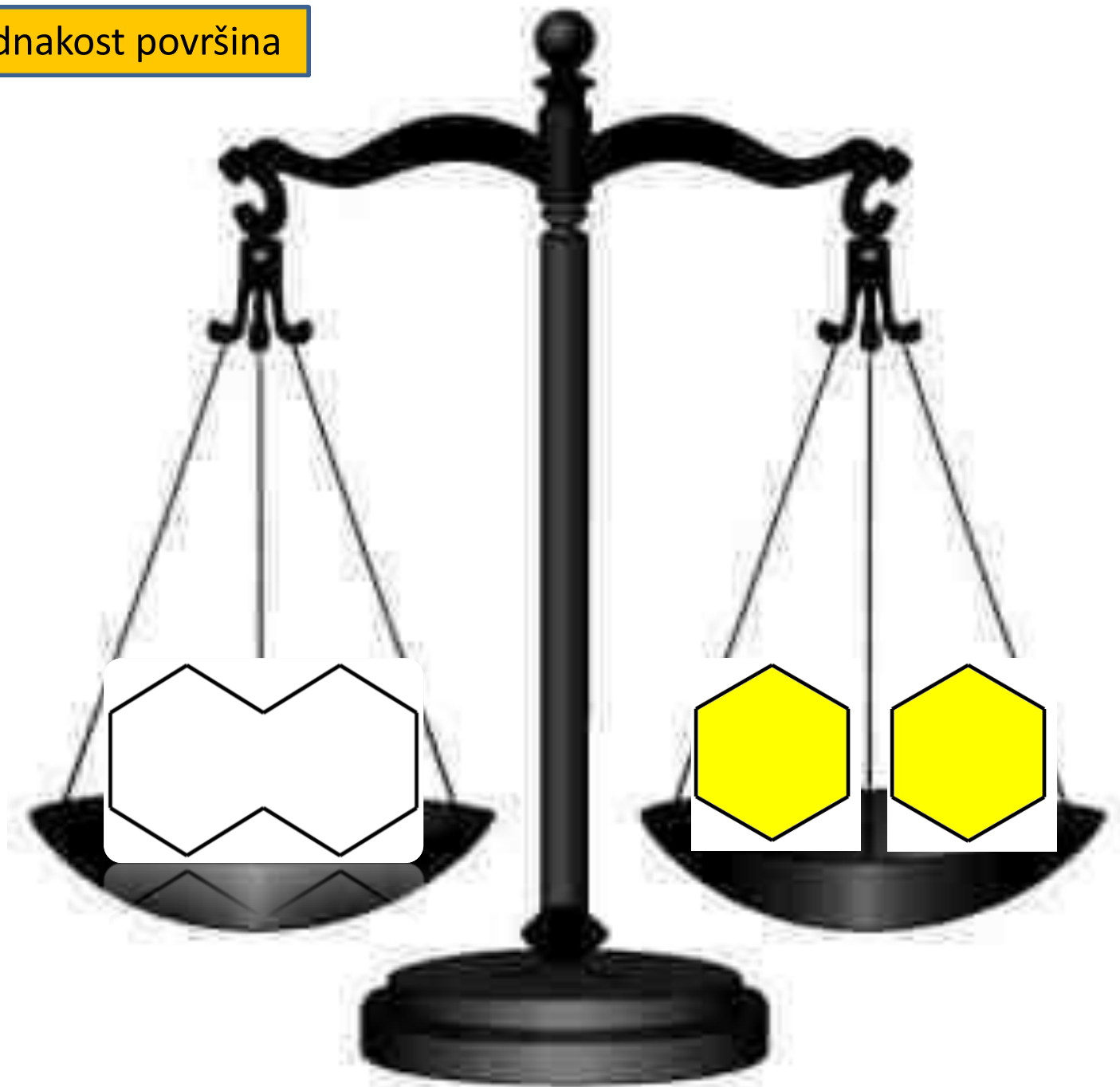
$$100 \text{ g} = 100 \text{ g}$$

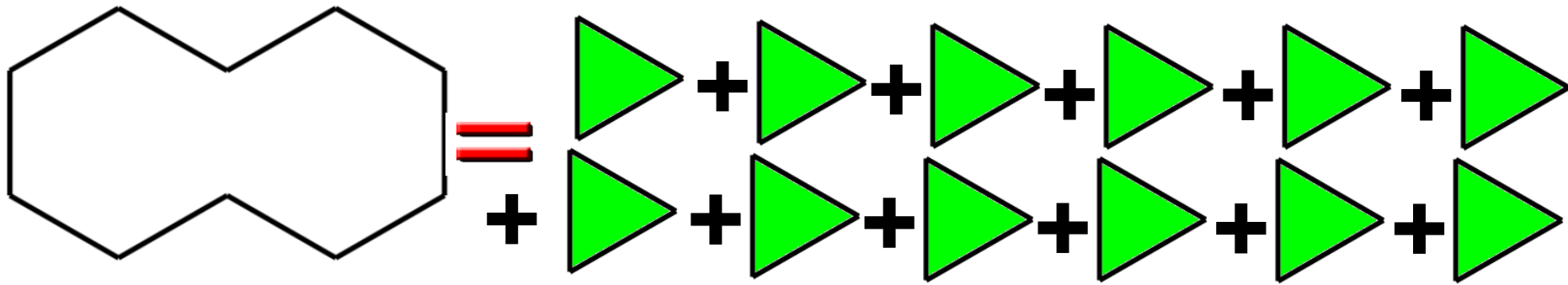
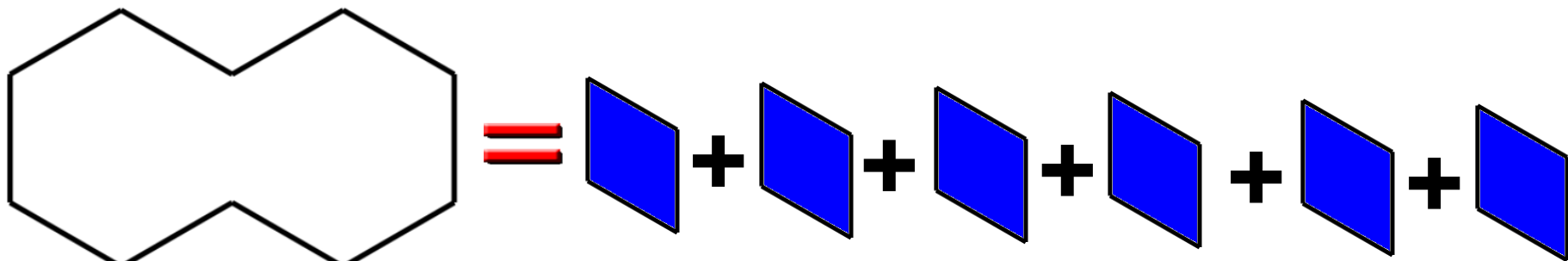
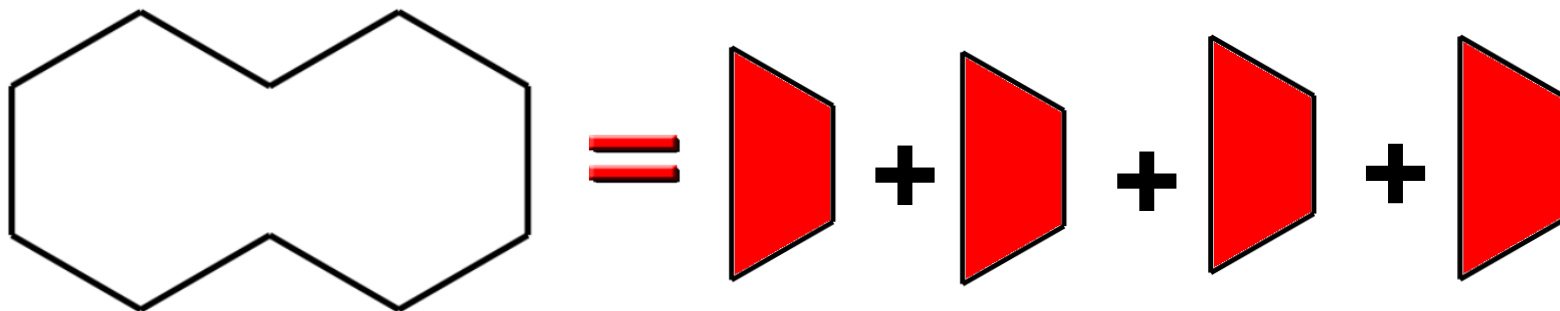
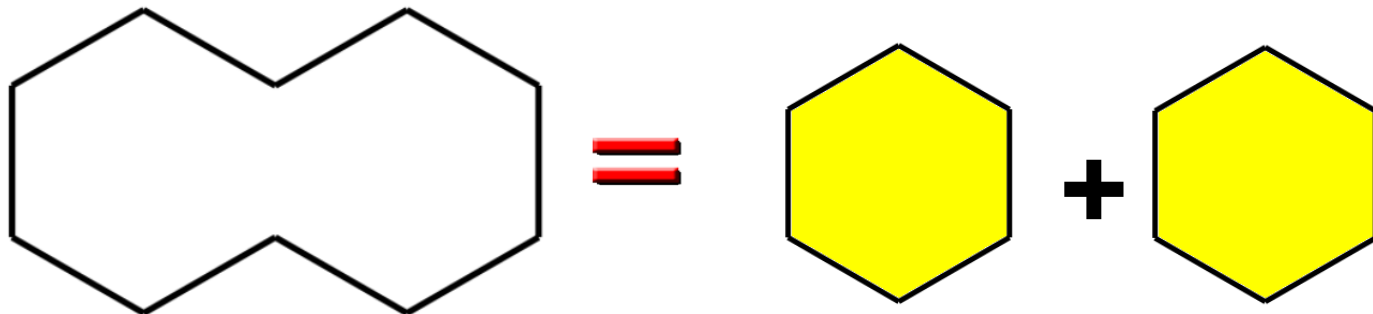
Maja je potrošila 6 kn za brzi tobogan, 6 kn za zavojiti i 12 kn za sladoled.  
Roč je potrošio 6 kn za tobogan i 24 kn za sladoled,

$$6 \text{ kn} + 6 \text{ kn} + 12 \text{ kn} = 6 \text{ kn} + 24 \text{ kn}$$



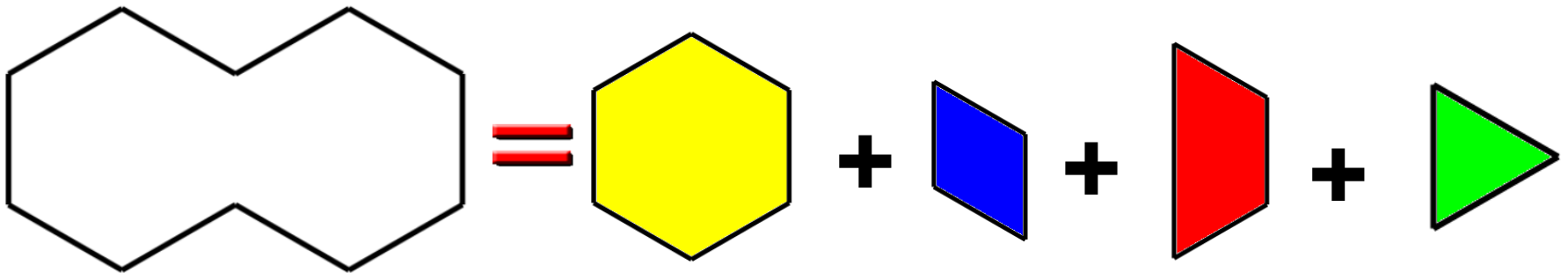
Jednakost površina





Jednakost možemo zapisati na različite načine.

Ti zapisi su ekvivalentni.



$$a = b$$



$$a + c = b + c$$



- Napišite primjer za očuvanje jednakosti.
- Tanja i Jasmina su kupile voće na Trešnjevačkom placu. Tanja je kupila 2 kg jabuka i 3 kg marelica. Jasmina je kupila 5 kg marelica. Sanja im je svakoj donijela 3 kg okićkih trešanja.

**Ukupna količina voća:**

$$2 \text{ kg} + 3 \text{ kg} = 5 \text{ kg}$$

$$5 \text{ kg} = 5 \text{ kg}$$

$$(2 \text{ kg} + 3 \text{ kg}) + 3 \text{ kg} = 5 \text{ kg} + 3 \text{ kg}$$

$$8 \text{ kg} = 8 \text{ kg}$$

$$a = b$$



$$a - c = b - c$$

- Napišite primjer za očuvanje jednakosti.
- Za rođendan je kupljeno 3 l soka od jabuke i 4.5 l multivitaminskog soka. Od gaziranih sokova bilo je 6 l kokte i 1.5 l fante. Popijeno je 5 l prirodnih sokova i 5 l gaziranog soka.

**Ostatak soka:**

$$3 \text{ l} + 4.5 \text{ l} = 6 \text{ l} + 1.5 \text{ l}$$

$$7.5 \text{ l} = 7.5 \text{ l}$$

$$(3 \text{ l} + 4.5 \text{ l}) - 5 \text{ l} = (6 \text{ l} + 1.5 \text{ l}) - 5 \text{ l}$$

$$7.5 \text{ l} - 5 \text{ l} = 7.5 \text{ l} - 5 \text{ l}$$

$$2.5 \text{ l} = 2.5 \text{ l}$$

$$a = b$$



$$a \cdot c = b \cdot c$$

- Napišite primjer za očuvanje jednakosti.
- Saša je za roštilj kupio meso za ćevape i potrošio je 96 kn za mljevenu junetinu i 58 kn za mljevenu janjetinu. Vjeran je kupio vratinu i pečenice i potrošio 43 kn za pečenice i 111 kn za vratinu. Naknadno su shvatili da trebaju dvostruku količinu mesa.

**Ukupan trošak:**

$$96 \text{ kn} + 58 \text{ kn} = 43 \text{ kn} + 111 \text{ kn}$$

$$154 \text{ kn} = 154 \text{ kn}$$

$$(96 \text{ kn} + 58 \text{ kn}) \cdot 2 = (43 \text{ kn} + 111 \text{ kn}) \cdot 2$$

$$154 \text{ kn} \cdot 2 = 154 \text{ kn} \cdot 2$$

$$308 \text{ kn} = 308 \text{ kn}$$

$$a = b$$



$$a : c = b : c$$

- Napišite primjer za očuvanje jednakosti.
- Slavko je odlučio dio travnjaka pretvoriti u vrt. Za papriku je pripremio gredice ukupne površine  $24 \text{ m}^2$ , a za rikolu je pripremio gredicu površine  $12 \text{ m}^2$ . Zoran je na dijelu svog travnjaka **pripremio gredicu za krumpir površine  $36 \text{ m}^2$** . Naknadno su shvatili da se očekuje oporavak gospodarstva i da im nije potrebno saditi toliko povrća pa je svaki od njih četverostruko smanjio površinu vrta.

**Obrađena površina:**

$$24 \text{ m}^2 + 12 \text{ m}^2 = 36 \text{ m}^2$$

$$36 \text{ m}^2 = 36 \text{ m}^2$$

$$(24 \text{ m}^2 + 12 \text{ m}^2) : 4 = 36 \text{ m}^2 : 4$$

$$36 \text{ m}^2 : 4 = 36 \text{ m}^2 : 4$$

$$9 \text{ m}^2 = 9 \text{ m}^2$$

$$a = b$$

Jednakost ostaje očuvana ako:

- s obje strane dodamo isti broj

$$a + c = b + c$$

- s obje strane oduzmemo isti broj

$$a - c = b - c$$

- obje strane pomnožimo istim brojem

$$a \cdot c = b \cdot c$$

- obje strane podijelimo istim brojem različitim od 0

$$a : c = b : c$$



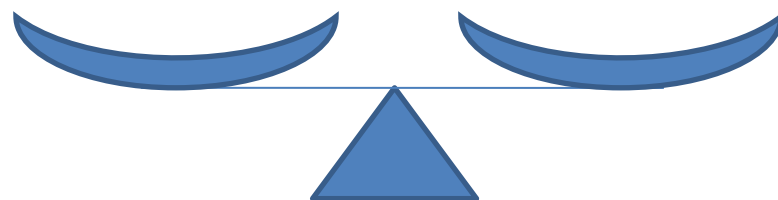
# Nepoznanica

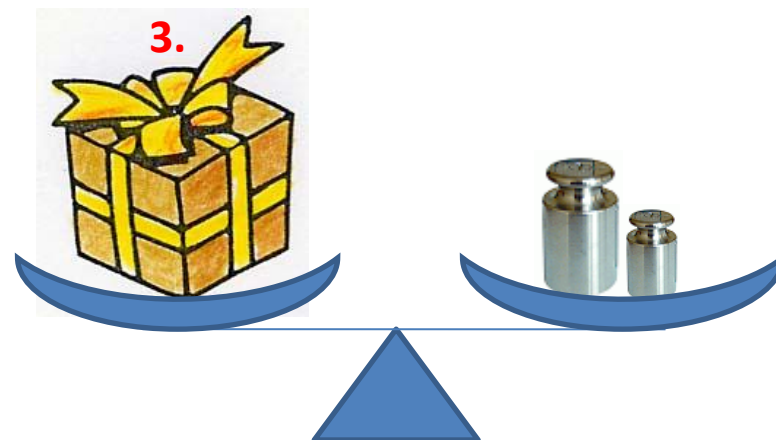
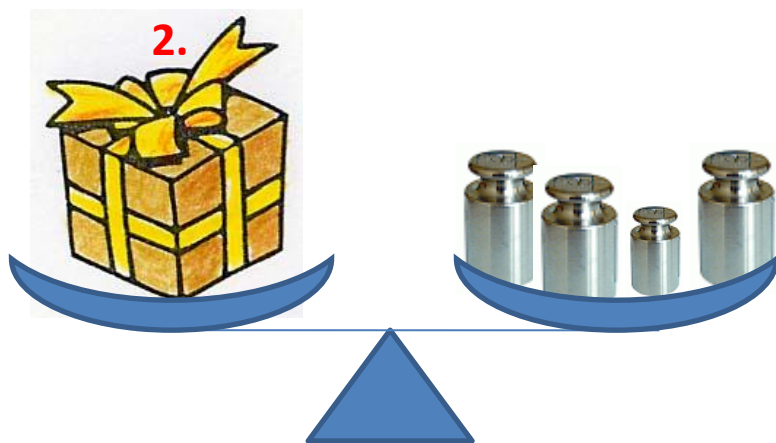
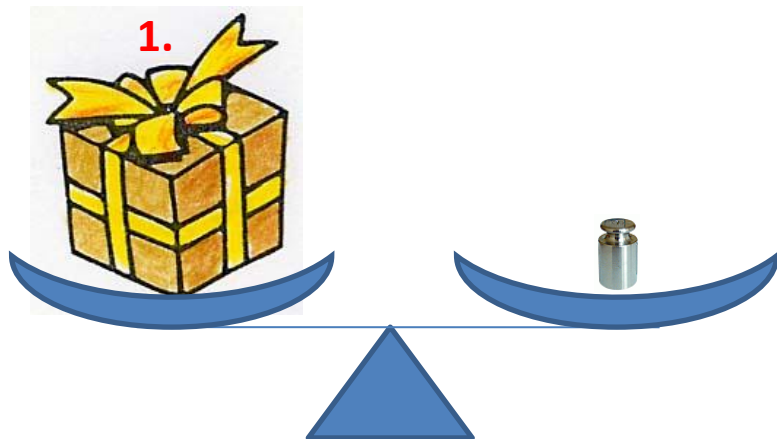


- Iva, Ivana i Ivan su dobili poklone od bake. Pokloni su zamotani i spremljeni u pakete jednakih veličine. Baka im je otkrila da je Iva dobila knjigu, Ivana plišanog medu, a Ivan novce za sladoled na maturalcu. Trebaju odrediti kome pripada koji paket.



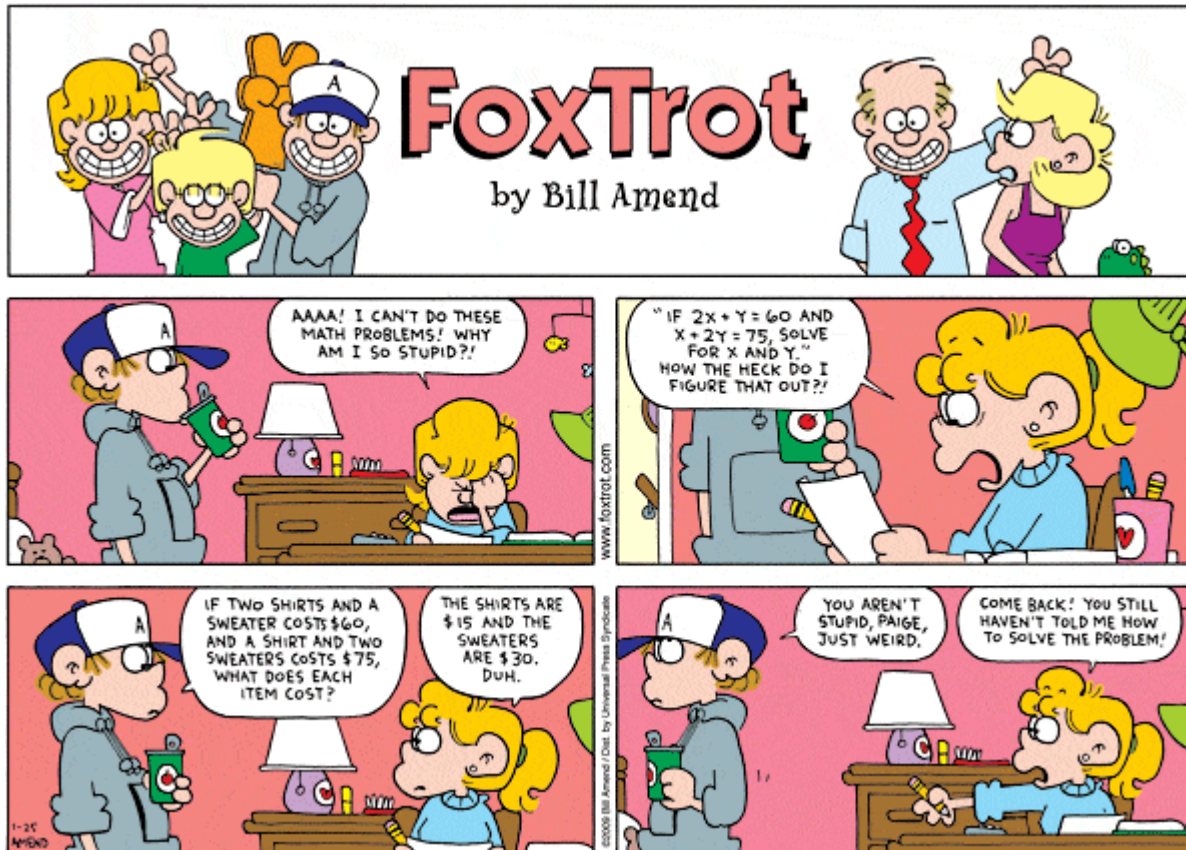
- Sadržaj pojedinog paketa je nepoznat, a ukoliko se odredi njegova masa, moguće je odrediti i sadržaj.
- Masa svakog paketa je nepoznata, vaganjem mogu odrediti njihove mase.
- Označimo li s  $x$  masu paketa koji treba izvagati tada je  $x$  nepoznanica.





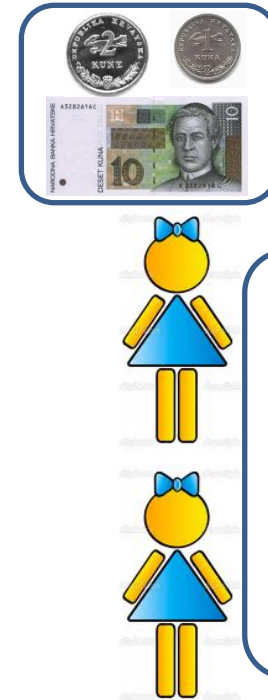
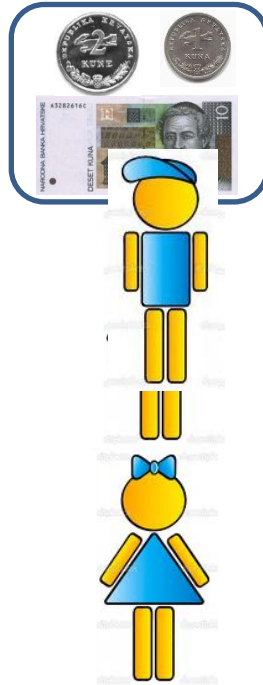
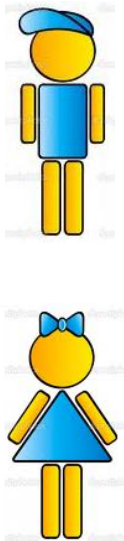
**Prvi paket pripada Ivanu, drugi Ivi, a treći Ivani.**

# Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom





- Robert i Marta imaju 269 kn. Robert ima 13 kuna više. Koliko novca ima Robert, a koliko Marta?



- Robert i Marta imaju 269 kn. Robert ima 13 kuna više. Koliko novca ima Robert, a koliko Marta?

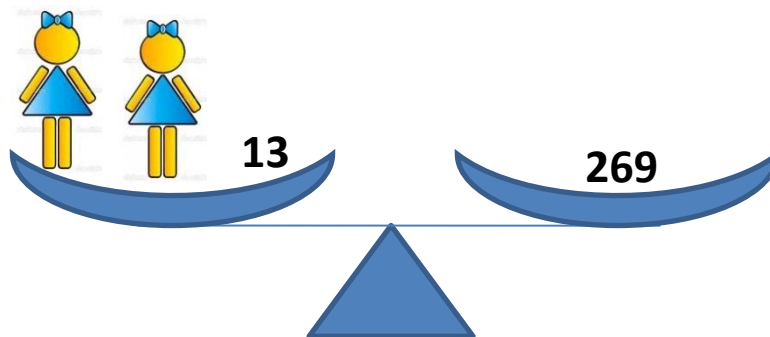
količina novca koju ima Marta



količina novca koju ima Robert



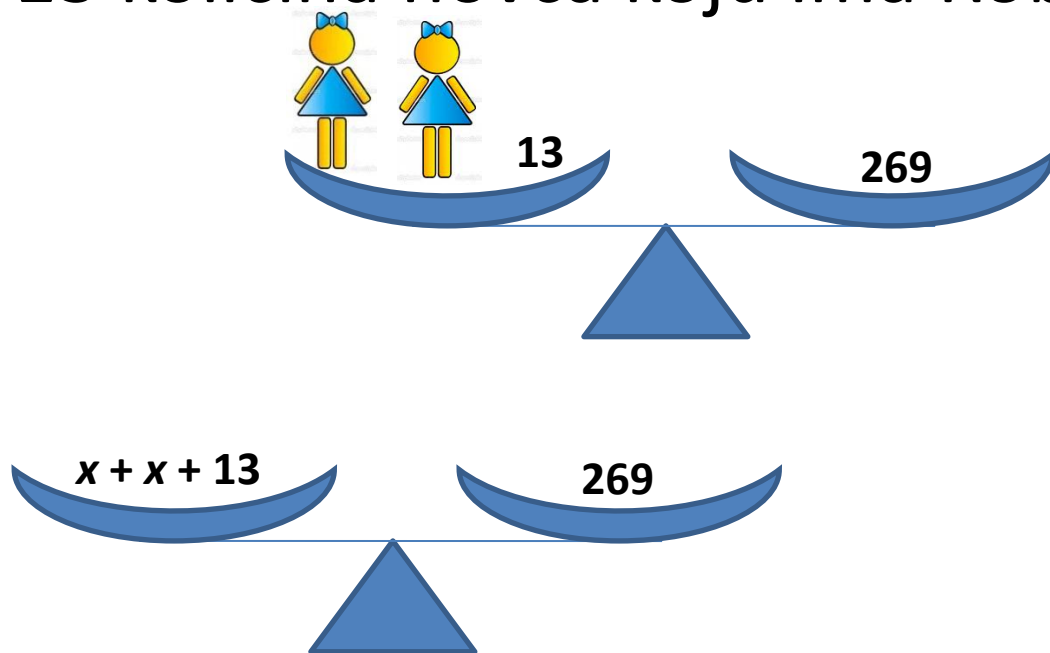
13



- Robert i Marta imaju 269 kn. Robert ima 13 kuna više. Koliko novca ima Robert, a koliko Marta?

$x$  količina novca koju ima Marta

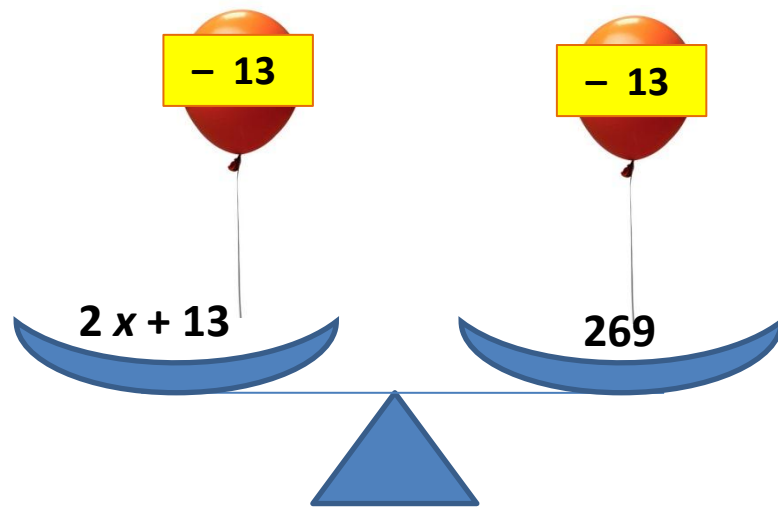
$x + 13$  količina novca koju ima Robert



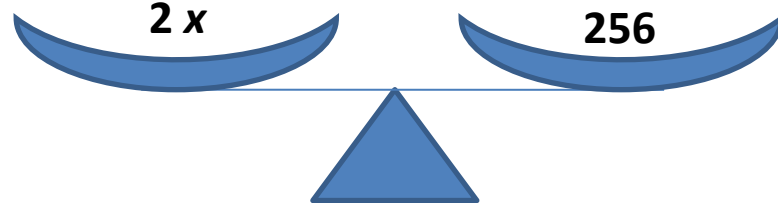
$$x + x + 13 = 269$$

linearna jednačina

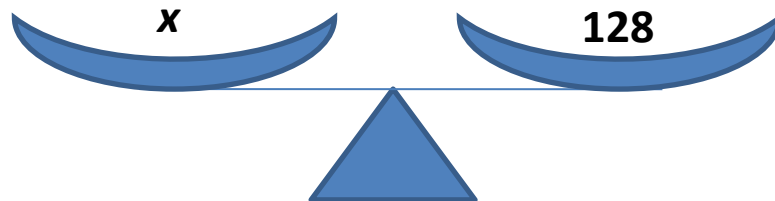




$$2x + 13 = 269 \quad / - 13$$



$$2x = 256 \quad / : 2$$



$$x = 128$$

Marta ima 128,00 kn, a Robert 141,00 kn.

- Postupnost u rješavanju jednadžbi

- Provjera rješenja

$$x + a = b$$

- Je li neki broj

rješenje zadane jednadžbe?

$$ax = b$$

(često učenici rješavaju

$$ax + b = c$$

jednadžbu)

$$a - x = b$$



$$a - bx = c$$

$$ax + b = cx + d$$

$$\frac{2x-3}{6} - \frac{1-x}{12} = 3-5 \cdot \frac{x+5}{4} \quad / \cdot 12$$

$$a \cdot c = b \cdot c$$

$$12 \cdot \left( \frac{2x-3}{6} - \frac{1-x}{12} \right) = 12 \cdot \left( 3-5 \cdot \frac{x+5}{4} \right)$$

distributivnost

$$12 \cdot \frac{2x-3}{6} - 12 \cdot \frac{1-x}{12} = 12 \cdot 3 - 12 \cdot 5 \cdot \frac{x+5}{4}$$

$$2 \cdot (2x-3) - (1-x) = 12 \cdot 3 - 15 \cdot (x+5)$$

distributivnost

$$4x - 6 - 1 + x = 36 - 15x - 75$$

asocijativnost

$$5x - 7 = -15x - 39 \quad / + 15x + 7$$

$$a + c = b + c$$

$$20x = -32 \quad / : 20$$

$$a : c = b : c$$

$$x = -\frac{8}{5}$$

## Problemski zadaci

- Prvog dana Petar je pročitao  $\frac{1}{10}$  knjige, drugog dana  $\frac{1}{9}$  ostatka, a trećeg dana još 13 stranica. U ta tri dana pročitao je 0.25 knjige. Koliko stranica ima ta knjiga?

**x broj stranica knjige**

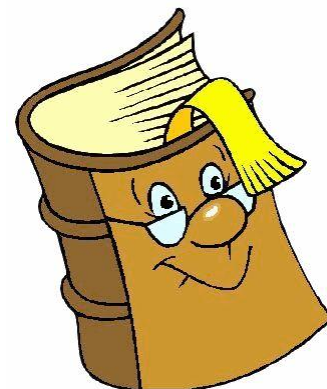
prvi dan je pročitao  $\frac{1}{10}x$

ostalo je za pročitati  $\frac{9}{10}x$

drugi dan je pročitao  $\frac{1}{9}$  od  $\frac{9}{10}x = \frac{1}{10}x$

treći dan je pročitao 13 stranica

u tri dana je pročitao 0.25 knjige tj.  $\frac{1}{4}x$



$$\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}x + 13 = 0.25x$$

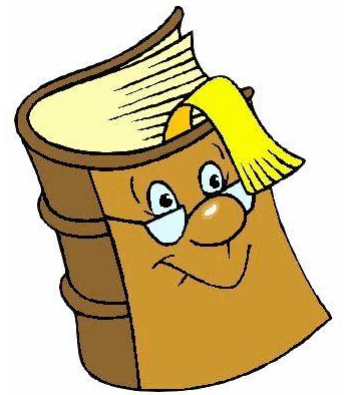
$$\frac{2}{10}x + 13 = \frac{1}{4}x$$

$$\frac{1}{5}x + 13 = \frac{1}{4}x$$

$$4x + 260 = 5x$$

$$260 = 5x - 4x$$

$$x = 260$$



# Knjiga koju čita Petar ima 260 stranica.

- Provjera rješenja:

prvi dan je pročitao  $\frac{1}{10}x$

prvi dan je pročitao **26 stranica**

ostalo je za pročitati  $\frac{9}{10}x$

ostalo je za pročitati **234 stranice**

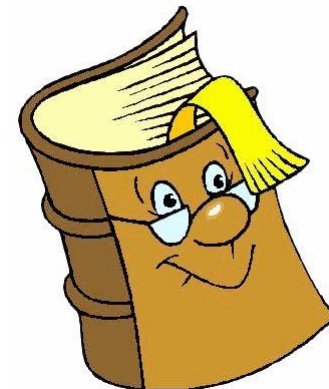
drugi dan je pročitao  $\frac{1}{9}$  ostatka

drugi dan je pročitao **26 stranica**

treći dan je pročitao **13 stranica**

u tri dana je pročitao 0.25 knjige tj.  $\frac{1}{4}x$

u tri dana je pročitao **65 stranica**



$$26 + 26 + 13 = 65$$

- Za svaku od jednažbi osmislite problemski zadatak:

$$x - 3 = -9$$

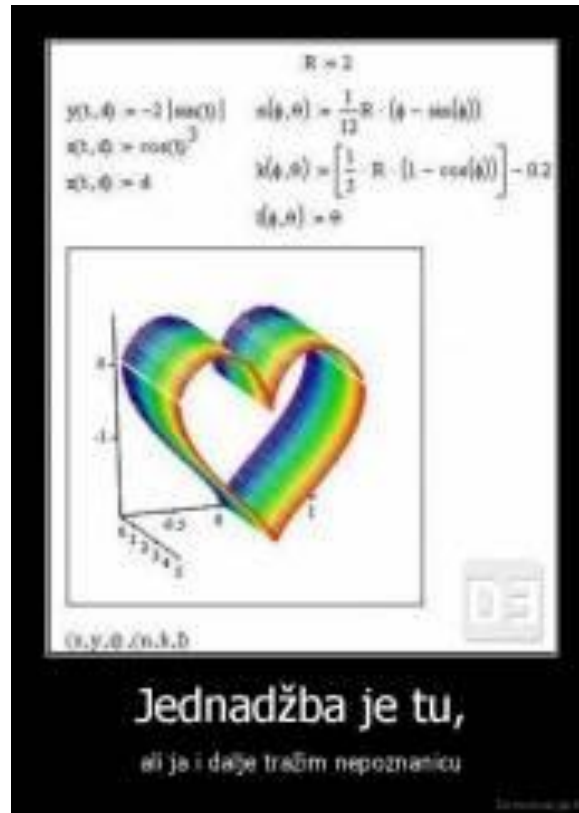
$$\frac{2}{3}x = 28$$

$$2x + 8 = 11$$

$$100 - x = 24.5$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}x + 300 = x$$

# Linearna rovnica s 2 nepoznanice





Sanja je platila račun 70,00 kn i to novčanicama od 20 kn i 10 kn.  
Na koliko je različitih načina mogla platiti taj račun?

[illegible]



Broj novčanica od 20 kn	Broj novčanica od 10 kn	Iznos
0	7	70
1	5	70
2	3	70
3	1	70
<del>4</del>	<del>0</del>	<del>80</del>

- Možemo li zamijeniti dobiveni broj novčanica od 20 kn i broj novčanica od 10 kn?



Broj novčanica od 20 kn	Broj novčanica od 10 kn	Iznos
0	7	70
1	5	70
2	3	70
3	1	70

Broj novčanica od 10 kn	Broj novčanica od 20 kn	Iznos
0	7	
1	5	
2	3	
3	1	

Broj novčanica od 20 kn	Broj novčanica od 10 kn	Iznos
0	7	70
1	5	70
2	3	70
3	1	70



Broj novčanica od 10 kn	Broj novčanica od 20 kn	Suma
0	7	140
1	5	110
2	3	80
3	1	50


- Možemo li kombinirati broj novčanica od 20 kn i 10 kn na bilo koji način?

Broj novčanica od 20 kn	Broj novčanica od 10 kn	Iznos
0	7	70
1	5	70
2	3	70
3	1	70



Broj novčanica od 20 kn	Broj novčanica od 10 kn	Iznos
0	5	50
1	1	30

- Broj novčanica od 10 kn i 20 kn su međusobno zavisni
- Prikažimo tu vezu:

$$\begin{array}{c} \text{BROJ} \\ \text{NOVČANICA} \\ \text{OD 20 KN} \end{array} \cdot \text{

**x broj novčanica od 20 kn**$$

**y broj novčanica od 10 kn**

$$20x + 10y = 70$$

**linearna jednačba s dvije nepoznanice**

Sanja može platiti račun na 4 različita načina.

- To može učiniti sa :
  - 0 novčanica od 20 kn i 7 novčanica od 10 kn
  - 1 novčanicom od 20 kn 5 novčanica od 10 kn
  - 2 novčanice od 20 kn i 3 novčanice od 10 kn
  - 3 novčanice od 20 kn i 1 novčanicom od 10 kn

Rješenja možemo zapisati u obliku **uređenog para**:

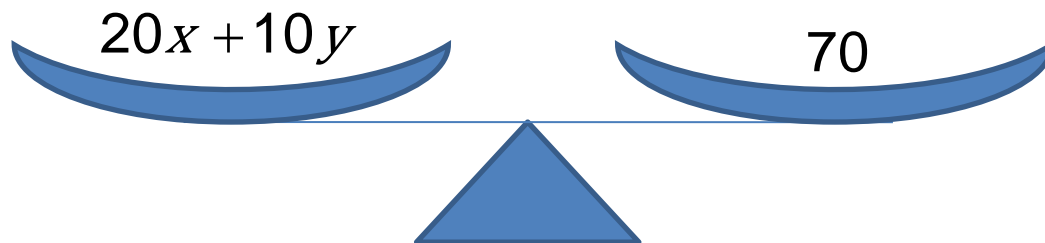
**(0, 7)**

**(1, 5)**

**(2, 3)**

**(3, 1)**

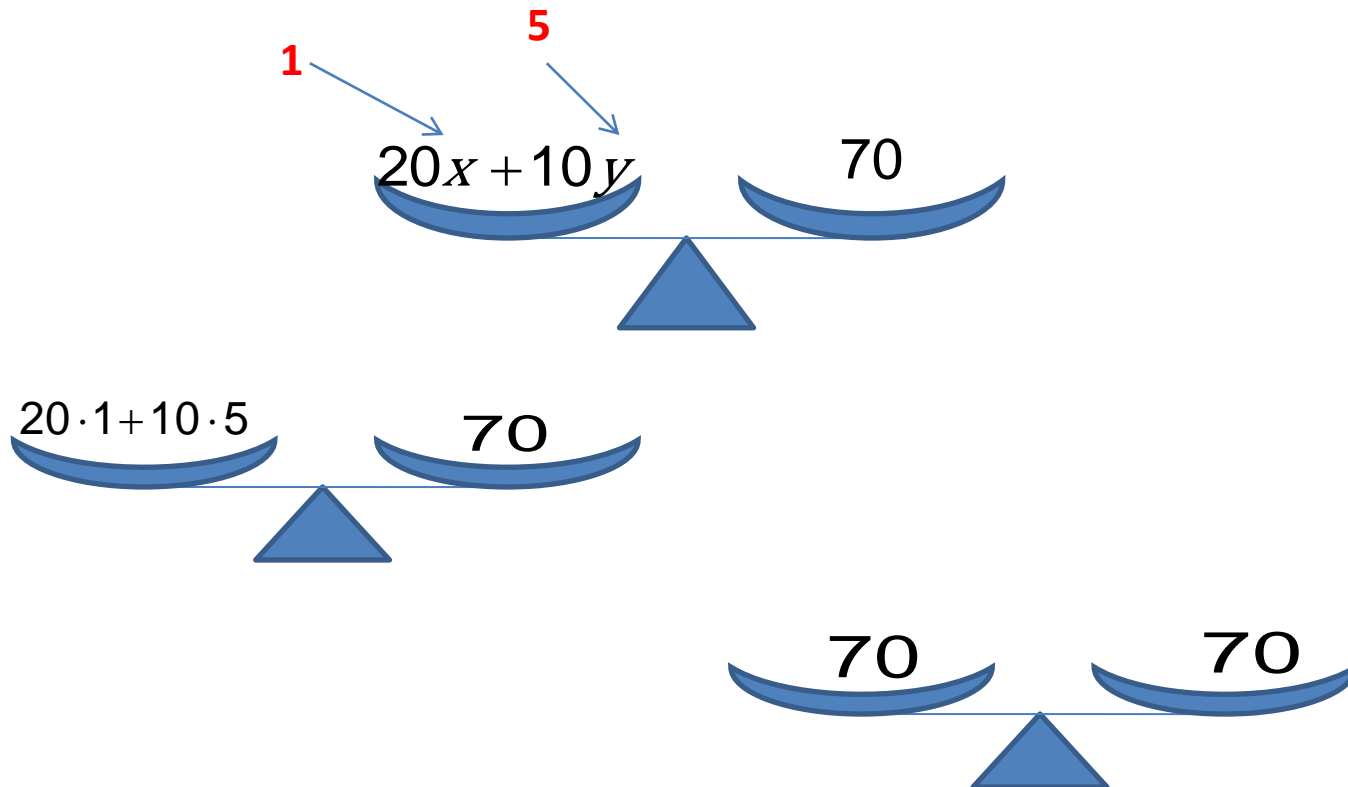
- Znamo da svaku jednakost možemo prikazati pomoću vage jednakih krakova u ravnoteži.
- Prikažimo jednadžbu  $20x + 10y = 70$  pomoću vage:





## Provjera rješenja

- Uvrstimo uređeni par  $(x, y) = (1, 5)$  u jednadžbu i promotrimo što se događa s vagom.



## Linearna jednađba s dvjema nepoznanicama

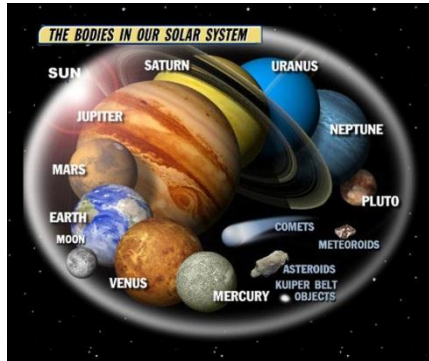
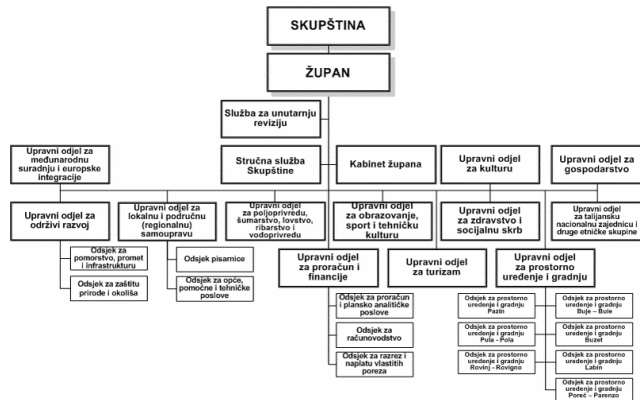
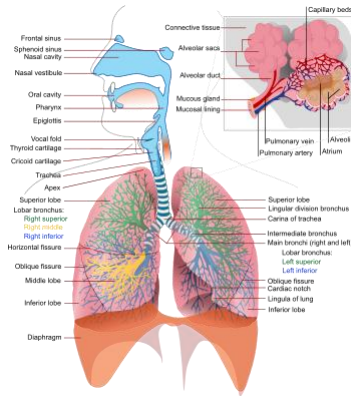
$$\textcircled{a}x + \textcircled{b}y = \textcircled{c}$$

koeficijent uz  $x$       koeficijent uz  $y$       slobodni član

$x$  i  $y$  su nepoznanice

$a, b, c$  su koeficijenti

Rješenje je svaki uređen par  $(x, y)$  racionalnih brojeva koji zadovoljava jednađbu tj. ako vrijednosti članova uređenog para uvrstimo u jednađbu i dobijemo istinitu tvrdnju.

[illegible]

Na koje sve načine možemo izvagati paket mase 12 kg ako koristimo utege mase 1 kg i 2 kg?

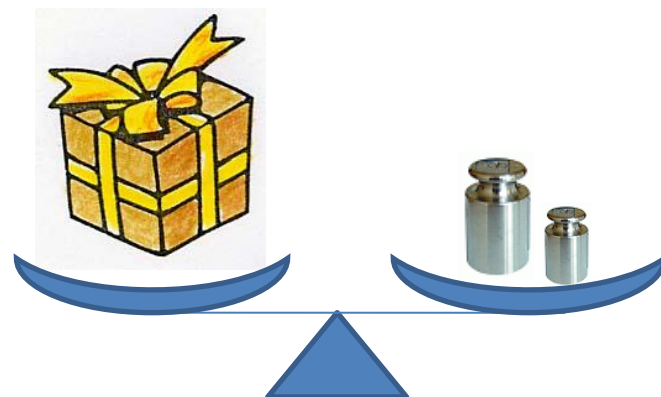
$x$  = broj utega mase 1 kg

$y$  = broj utega mase 2 kg

$$\begin{array}{c} \text{Broj utega} \\ \text{mase 1 kg} \end{array} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 1 \text{ kg}}}{\text{1 kg}} + \begin{array}{c} \text{Broj utega} \\ \text{mase 2 kg} \end{array} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ kg}}}{\text{2 kg}} = 12 \text{ kg}$$

Linearna jednačba s dvije nepoznanice:

$$x + 2y = 12$$



- Rješenja iz tablice možemo prikazati kao uređene parove:

$x$	$y$	$(x,y)$
0	6	(0,6)
2	5	(2,5)
4	4	(4,4)
6	3	(6,3)
8	2	(8,2)
10	1	(10,1)
12	0	(12,0)

**Zadatak ima 7 rješenja.**

Riješimo zadatak: Na koje sve načine možemo kombinirati utege mase 1 kg i 2 kg tako da koristimo 11 utega?

$x$  = broj utega mase 1 kg

$y$  = broj utega mase 2 kg

$$\text{Broj utega mase 1 kg} + \text{Broj utega mase 2 kg} = 11$$

Linearna jednačba s dvije nepoznanice:

$$x + y = 11$$



- Moguća rješenja su dana tablicom:

$x$	$y$	$x + y$
0	11	11
1	10	11
2	9	11
3	8	11
4	7	11
5	6	11
6	5	11
7	4	11
8	3	11
9	2	11
10	1	11
11	0	11

- Rješenja iz tablice možemo prikazati kao uređene parove:

$x$	$y$	$(x, y)$
0	11	(0, 11)
1	10	(1, 10)
2	9	(2, 9)
3	8	(3, 8)
4	7	(4, 7)
5	6	(5, 6)
6	5	(6, 5)
7	4	(7, 4)
8	3	(8, 3)
9	2	(9, 2)
10	1	(10, 1)
11	0	(11, 0)

**Zadatak ima 12 rješenja.**



- Kombinacija ovih dvaju zadataka:
- Na koliko načina možemo izvagati paket mase 12 kg ako koristimo utege mase 1 kg i 2 kg i ako smo koristili 11 utega ?

$x$	$y$	$(x,y)$
0	6	(0,6)
2	5	(2,5)
4	4	(4,4)
6	3	(6,3)
8	2	(8,2)
10	1	(10,1)
12	0	(12,0)

Zadatak ima samo jedno rješenje.

$x$	$y$	$(x, y)$
0	11	(0, 11)
1	10	(1, 10)
2	9	(2, 9)
3	8	(3, 8)
4	7	(4, 7)
5	6	(5, 6)
6	5	(6, 5)
7	4	(7, 4)
8	3	(8, 3)
9	2	(9, 2)
10	1	(10, 1)
11	0	(11, 0)

- Uređenim parovima iz prve tablice pridružite točke u koordinatnom sustavu i označite ih crvenom bojom
- Uređenim parovima iz druge tablice pridružite točke u koordinatnom sustavu i označite ih plavom bojom

$x$	$y$	$(x,y)$
0	6	(0,6)
2	5	(2,5)
4	4	(4,4)
6	3	(6,3)
8	2	(8,2)
10	1	(10,1)
12	0	(12,0)

$x$	$y$	$(x, y)$
0	11	(0, 11)
1	10	(1, 10)
2	9	(2, 9)
3	8	(3, 8)
4	7	(4, 7)
5	6	(5, 6)
6	5	(6, 5)
7	4	(7, 4)
8	3	(8, 3)
9	2	(9, 2)
10	1	(10, 1)
11	0	(11, 0)

# Zapišimo veze između veličina $x$ i $y$ :

Na koliko načina možemo izvagati paket mase 12 kg  
ako koristimo utege mase 1 kg i 2 kg:

$$x + 2y = 12$$

i ako smo koristili 11 utega:

$$x + y = 11$$

Dodavanjem uvjeta imamo samo jedno rješenje:

Samo na jedan način i to pomoću 10 utega od 1 kg i 1 utega od 2 kg.

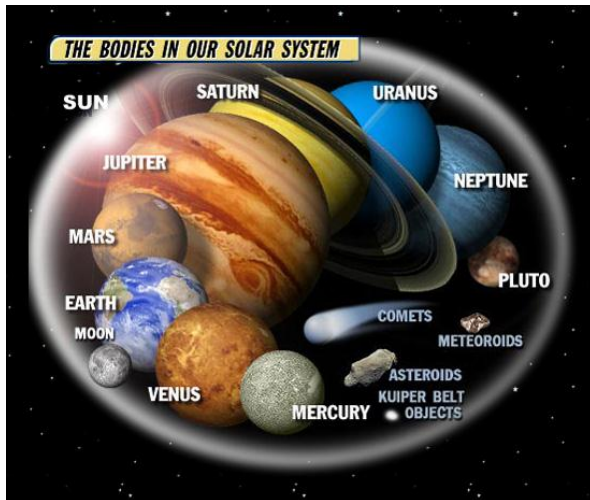
**(10, 1)**

$$x + 2y = 12$$

$$x + y = 11$$

Jednadžbe čine cjelinu.

Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

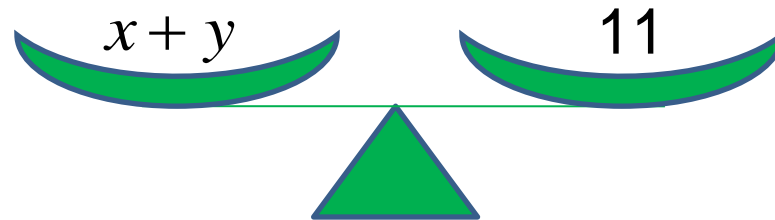
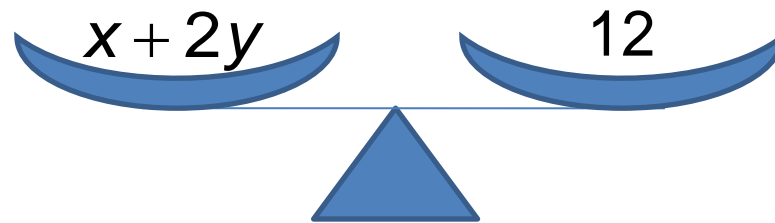


(10, 1)  
Sunce i planeti čine cjelinu koju nazivamo  
**Sunčev sustav.**

ju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

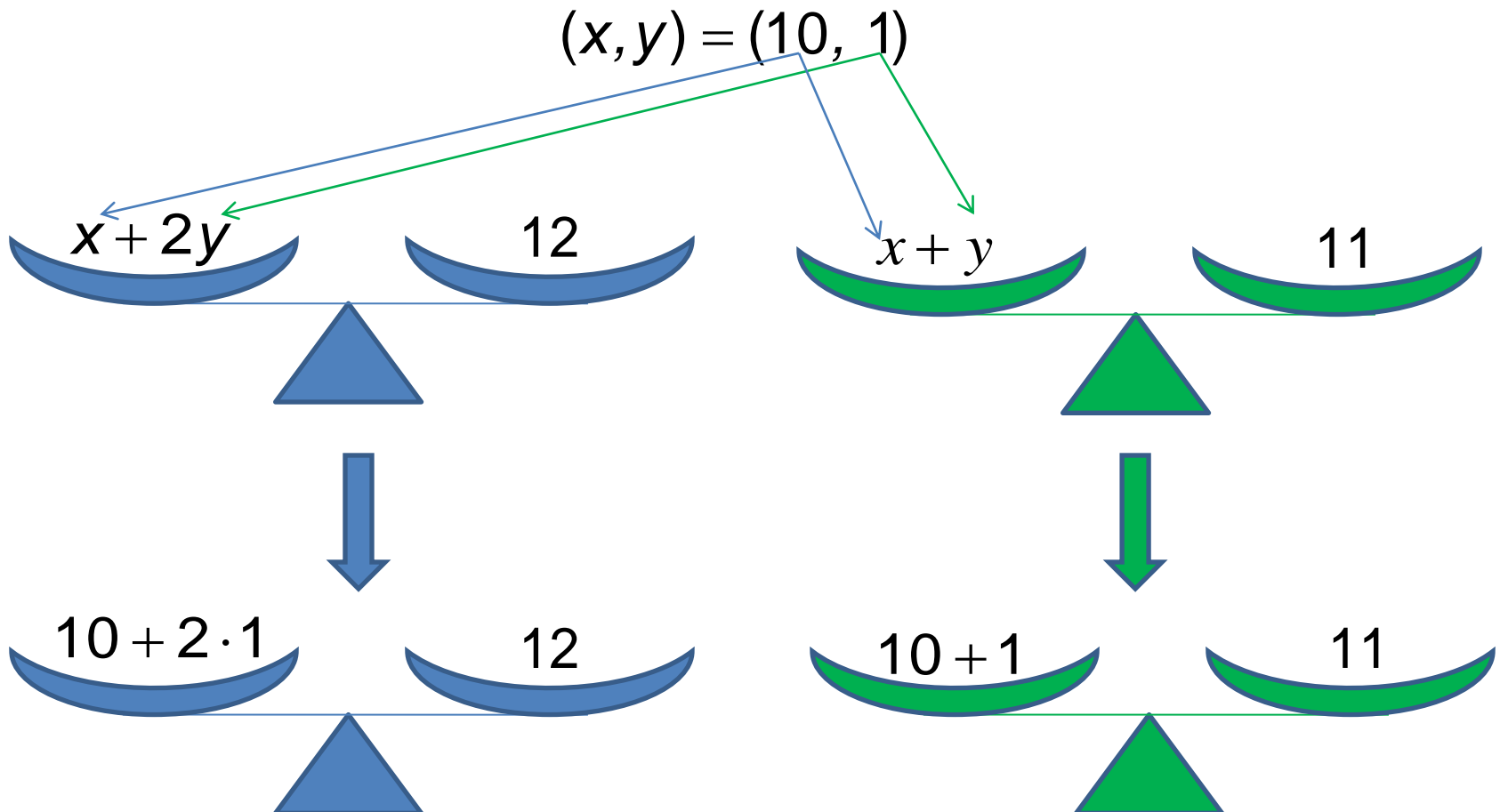
$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

- Koji bi bio model za ovaj sustav?



$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

Rješenje sustava je uređeni par brojeva koji zadovoljava obje jednačbe sustava.



U sustavu

$$\begin{array}{l} \boxed{1}x + \boxed{1}y = \boxed{12} \\ \boxed{\frac{1}{2}}x + \boxed{2}y = \boxed{18} \end{array}$$

Brojeve 1 i  $\frac{1}{2}$  zovemo **koeficijenti** sustava **uz x**.

Brojeve 1 i 2 zovemo **koeficijenti** sustava **uz y**.

Brojeve 12 i 18 zovemo **slobodni članovi** sustava.

Za sustav zapisan u ovakvom obliku kažemo da je zadan u **standardnom obliku** (obje jednačbe na lijevoj strani imaju nepoznanice, a slobodni članovi se nalaze na desnoj strani jednačbe. Pri tome iz zadanog sustava odmah možemo pročitati koeficijente uz x i y, te slobodne članove).

Odredi koeficijente uz  $x$ , koeficijente uz  $y$  i slobodne članove u sustavima zapisanih u standardnom obliku:

$$\begin{aligned}x - 2y &= 8 \\ 3x + 5y &= 0\end{aligned}$$

**koeficijenti** sustava **uz  $x$**  : 1 i 3  
**koeficijenti** sustava **uz  $y$**  : -2 i 5  
**slobodni članovi** sustava : 8 i 0

$$\begin{aligned}-3x + 7y &= 5 \\ 0.2x - 5y &= -4\end{aligned}$$

**koeficijenti** sustava **uz  $x$**  : -3 i 0.2  
**koeficijenti** sustava **uz  $y$**  : 7 i -5  
**slobodni članovi** sustava : 5 i -4

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x + y &= 0.5 \\ x - y &= 1\frac{1}{4}\end{aligned}$$

**koeficijenti** sustava **uz  $x$**  :  $\frac{2}{3}$  i 1  
**koeficijenti** sustava **uz  $y$**  : 1 i -1  
**slobodni članovi** sustava : 0.5 i  $1\frac{1}{4}$



Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama

$$\textcircled{a_1}x + \textcircled{b_1}y = \textcircled{c_1}$$

$$\textcircled{a_2}x + \textcircled{b_2}y = \textcircled{c_2}$$

$x$  i  $y$  su nepoznanice

koeficijenti uz  $x$

$a_1, a_2$

koeficijenti uz  $y$

$b_1, b_2$

slobodni članovi

$c_1, c_2$

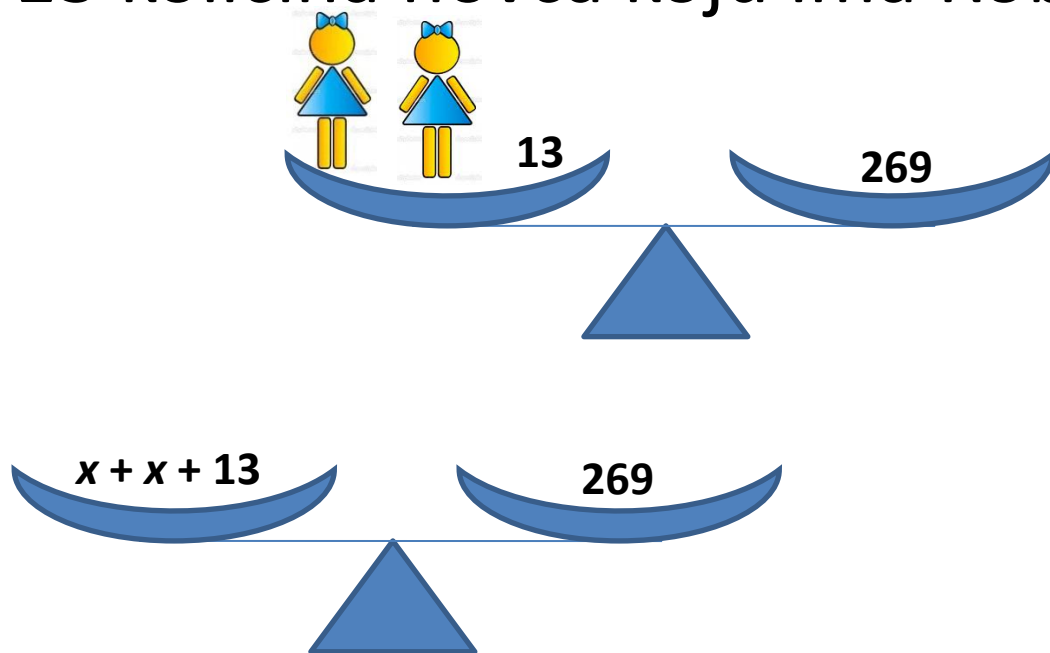
Rješenje sustava: svaki uređeni par racionalnih brojeva koji zadovoljava obje jednadžbe

$(x, y)$

- Robert i Marta imaju 269 kn. Robert ima 13 kuna više. Koliko novca ima Robert, a koliko Marta?

$x$  količina novca koju ima Marta

$x + 13$  količina novca koju ima Robert



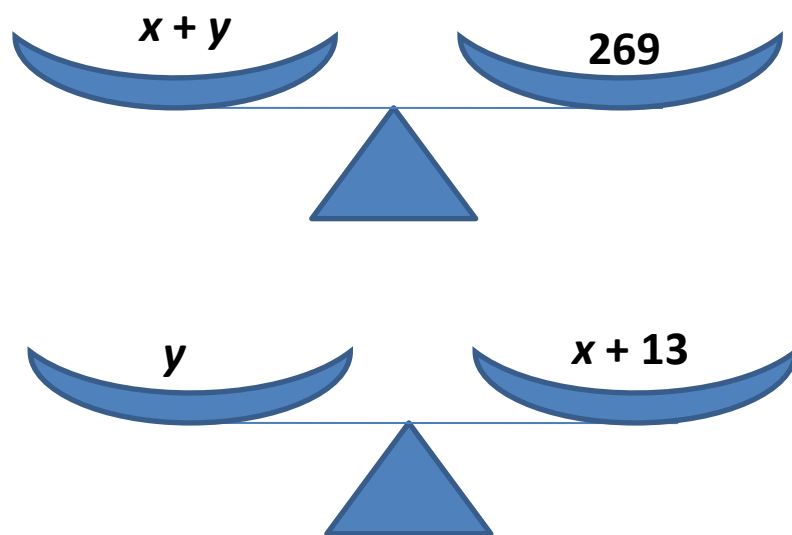
$$x + x + 13 = 269$$

linearna jednačina

- Robert i Marta imaju 269 kn. Robert ima 13 kuna više. Koliko novca ima Robert, a koliko Marta?

$x$  količina novca koju ima Marta

$y$  količina novca koju ima Robert



$$x + y = 269$$

$$y = x + 13$$

sustav dviju  
linearnih jednadžbi  
s dvije nepoznanice

## Literatura:

- G. Polya: Matematičko otkriće, HMD,Zagreb, 2003., 436 str.
- B. Pavković, D. Veljan: Elementarna matematika 1, Školska knjiga, Zagreb, 2004., 424 str.
- PowerPoint prezentacije - materijali za nastavu (Željka Orčić, prof. i Sanja Stilinović, prof.)
- materijali za ogledne sate metodičke prakse studentica PMF-a (Lucija Baljkas, Ivana Martić i Dijana Soldić)
- [www.mzos.hr](http://www.mzos.hr) – Nastavni plan i program za osnovnu školu, 370 str.
- [www.google.hr](http://www.google.hr) - slike

Hvala na pažnji!