

SURADNIČKO UČENJE I METODE AKTIVNE NASTAVE MATEMATIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI

**Primjer: SKUPOVI BROJEVA
- izgradnja skupa realnih brojeva -**

prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija
Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu
cizmesij@math.hr

17. siječnja 2014. i 25. travnja 2014.

1. ŠTO ZNAČI „UČITI MATEMATIKU”?

- kratki osvrt na teorije učenja
(matematike) -**

KONSTRUKTIVISTIČKA TEORIJA

KONSTRUKTIVIZAM

- izvire iz kognitivne škole psihologije
- oslanja se na rezultate Jeana Piageta (1930-te godine)
 - uveo koncept mentalne sheme
 - razvio teoriju kognitivnog razvoja djeteta (1930-te godine)
- **glavna teza: učenici (= svi oni koji uče) su kreatori svoga učenja i svoje znanje konstruiraju na temelju postojećeg znanja**

Dva osnovna principa (Ernst von Glasersfeld, 1987.):

1. Učenik sam **aktivno** gradi (konstruira) svoje znanje, a ne prima ga pasivno iz svog okoliša.
2. Dolaženje do spoznaje (znanja) je proces adaptacije, zasnovan na učenikovom iskustvu svijeta što ga okružuje i njime stalno modificiran.

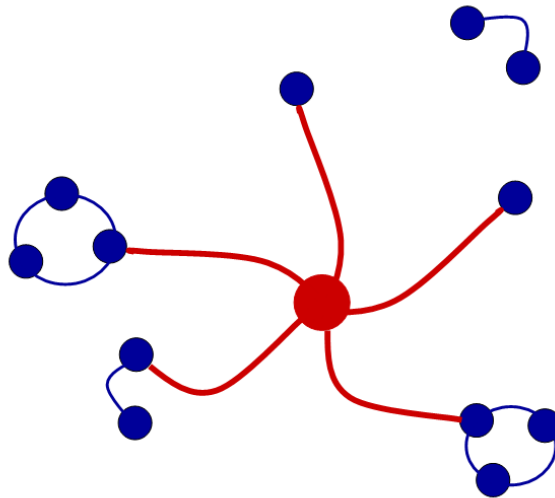
(1) - trivijalni konstruktivizam

(1) & (2) - radikalni konstruktivizam

KONSTRUKTIVISTIČKA TEORIJA (2)

KOGNITIVNE SHEME

- proizvod su:
 - konstruiranog znanja
 - alata pomoću kojih se može izgraditi dodatno novo znanje
- pri učenju dolazi do reorganizacije, nadopunjavanja ili nekog drugog oblika modifikacije postojeće sheme (mreže)



KONSTRUKTIVISTIČKA TEORIJA (3)

KOGNITIVNE SHEME (nastavak)

Dva načina promjene kognitivne sheme (J. Piaget):

- **asimilacija** - javlja se kada novi koncept pristaje uz (tj. „paše uz”) postojeće znanje (mrežu) te nove informacije samo proširuju postojeću mrežu
- **akomodacija** - javlja se kada novi koncept ne pristaje uz (tj. „paše uz”) postojeće znanje pa mozak mora preurediti postojeću kognitivnu mrežu ili ju nadomjestiti novom
 - do toga učenik dolazi **refleksivnim mišljenjem** (Fosnot, 1996.)

Refleksivno mišljenje = propitivanje postojećih ideja (tzv. prethodno znanje, odnosno postojeće kognitivne sheme) s ciljem pronalaženja onih koje izgledaju da bi mogle biti povezane s trenutnom misli, idejom ili zadatkom.

PRIMJER: MOGUĆA MREŽA IDEJA KOJE MOGU PRIDONIJETI RAZUMIJEVANJU POJMA OMJERA

Dijeljenje: Omjer 3 : 4 jednak je 0.75.

Mjerilo karte: mjerilo geografske karte pokazuje da udaljenost od 1 cm na karti predstavlja udaljenost od 50 km u prirodi.

Trigonometrija: sve trigonometrijske funkcije kuta su omjeri.

Uspoređivanje: omjer sunčanih i kišnih dana veći je na jugu nego na sjeveru Hrvatske.

OMJER

Nagib pravca i nagib ceste: Omjer ordinate i apscise svake točke pravca je -0.8. Omjer visine brda i horizontalne udaljenosti podnožja brda od njegovog vrha je 10%.

Jedinična cijena: Cijena paketa od 5 kg kestena je 24.95 kn. To je 49,90 kn za 10 kg kestena, tj. 4.99 kn za 1 kg kestena.

Gospodarstvo: Profit i gubitak računaju se kao omjer prihoda i ukupnog troška.

Geometrija: Omjer opsega i promjera svake kružnice je π ili približno 22 : 7. "Odgovarajuće" mjere sličnih likova imaju isti omjer.

SOCIOKULTURALNA TEORIJA

SOCIOKULTURALNA TEORIJA (SOCIJALNI KONSTRUKTIVIZAM)

- proizlazi iz rezultata Leva Vygotskog (Lev Vygotsky, 1920-te i 1930-te, Rusija)
- dijeli mnoge postavke s konstruktivizmom
 - npr. proces učenja je aktivno traženje smisla i značenja od strane učenika
- ima i svoje originalne temeljne koncepte

Temeljni postulati:

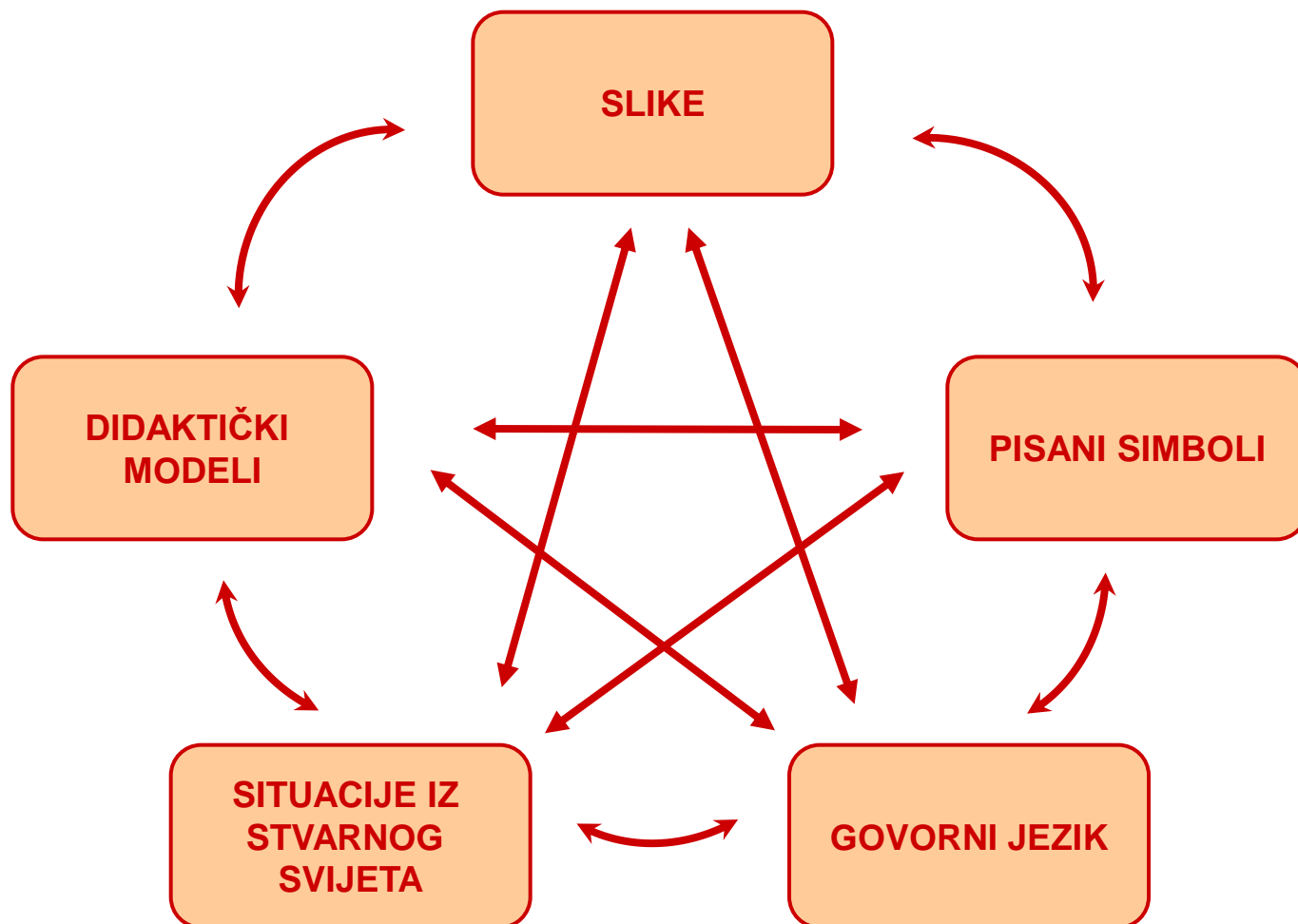
- **mentalni procesi odvijaju se među ljudima u socijalnim okruženjima učenja, iz kojih učenici ideje preuzimaju u svoj psihološki sklop (interioriziraju ih, pounutrašnjuju ih)**
- način na koji se informacija interiorizira (ili uči) ovosi o tome nalazi li se u tzv. **zoni najbližeg razvoja** (ZPD = *zone of proximal development*)
 - **zona najbližeg razvoja** = razlika između učenikovog potpomognutog (asistiriranog) i nepotpomognutog (neasistiriranog) odgovora (ponašanja ili postupanja) na zadatak, tj. raspon znanja koje učenik ne bi mogao naučiti ili mu prići bez pomoći drugih s više znanja („boljih znalaca”)

SOCIOKULTURALNA TEORIJA (2)

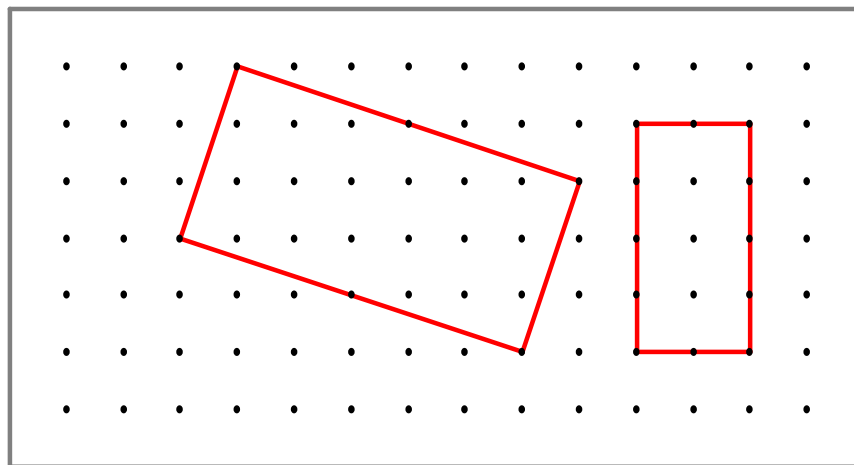
Temeljni postulati (nastavak):

- **semiotička medijacija** – način na koji informacija prelazi iz socijalnog u individualni prostor
 - mehanizam pomoću kojeg se utječe na individualna uvjerenja, stavove i ciljeve i pomoću kojeg oni utječu na sociokulturalne prakse
 - uključuje interakciju putem jezika, dijagrama, slika i djelovanja (alati medijacije)
- **socijalna interakcija** – ključna za medijaciju
- **postavljanje skela** (eng. *scaffolding*) – početna pomoć učitelja/drugih tijekom procesa postupno se smanjuje

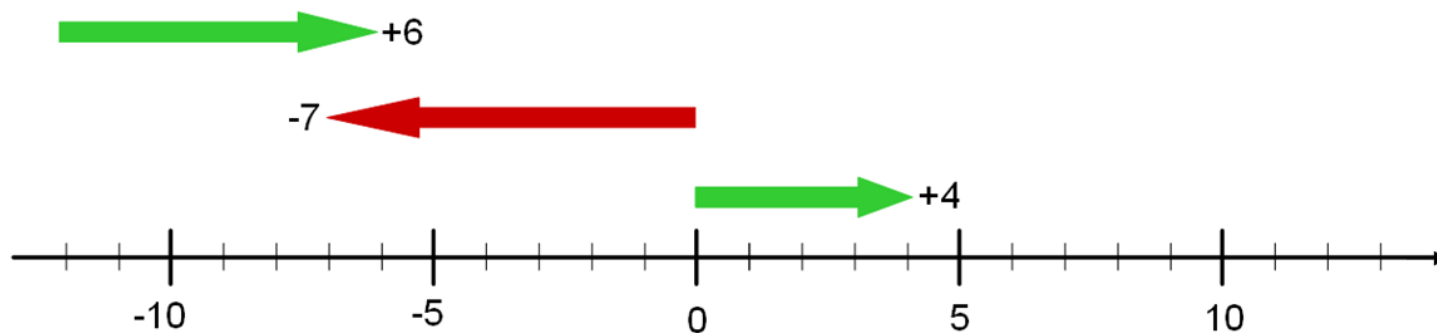
PET RAZLIČITIH NAČINA PRIKAZIVANJA MATEMATIČKIH IDEJA
prelaženje iz jednih u druge ili mijenjanje prikaza istim načinom može
pridonijeti razvoju novih koncepata



I OVO SU DIDAKTIČKI MODELI



GEOPLOČA



BROJEVNI PRAVAC

2. ŠTO ZNAČI „RAZUMJETI MATEMATIKU”?

**- kratki osvrt na pojam
matematičke kompetencije -**

RAZUMIJEVANJE MATEMATIKE

RAZUMIJEVANJE (MATEMATIKE)

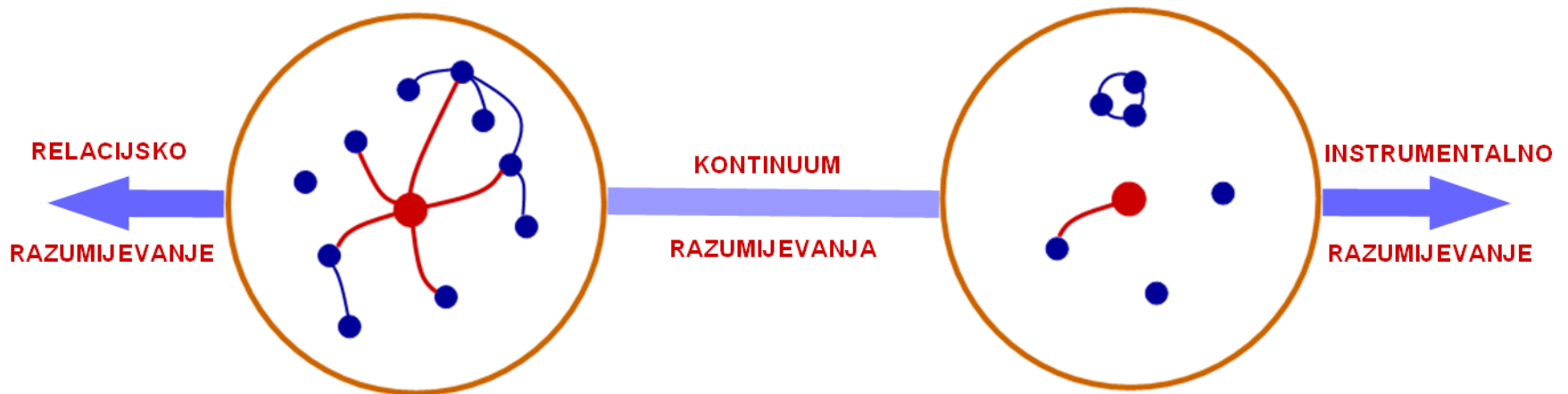
- mjera kvalitete i kvantitete veza koje ideja ima s postojećim idejama
- ovisi o postojanju odgovarajućih ideja i kreiranju novih veza
- razlikuje se od osobe do osobe

KONTINUUM RAZUMIJEVANJA (Richard Skemp, 1978.)

- ekstremi:
 - relacijsko razumijevanje
 - instrumentalno razumijevanje

RAZUMIJEVANJE MATEMATIKE (2)

KONTINUUM RAZUMIJEVANJA (nastavak):



KONCEPTUALNO I PROCEDURALNO ZNANJE

KONCEPTUALNO ZNANJE

- znanje o odnosima i temeljnim idejama promatrane teme

PROCEDURALNO ZNANJE

- znanje o pravilima i procedurama koje se primjenjuju u matematičkim procesima te simbolizam koji se koristi za prikazivanje matematike

Primjer

$$47 \cdot 21$$

Konceptualno znanje:

- množenje je uzastopno pribrajanje jednakih pribrojnika
- zapis $47 \cdot 21$ može se interpretirati kao površina pravokutnika stranica duljina 47 cm i 21 cm

Proceduralno znanje:

- standardni algoritam množenja

MATEMATIČKA KOMPETENCIJA

PREPORUKE EUROPSKOG PARLAMENTA I VIJEĆA o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje

(prosinac 2006.)

Europski referentni okvir navodi osam ključnih kompetencija:

- komunikacija na materinskom jeziku
- komunikacija na stranim jezicima
- **matematička kompetencija** i osnovne kompetencije u prirodoslovlju i tehnologiji
- digitalna kompetencija
- kompetencija *učiti kako učiti*
- socijalna i građanska kompetencija
- inicijativnost i poduzetništvo
- kulturna svijest i izražavanje

MATEMATIČKA KOMPETENCIJA (2)

DEFINICIJA

Matematička kompetencija je **sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja** kako bi se riješio **niz problema** u svakodnevnim situacijama.

Uz dobro vladanje brojevima (tzv. **numerička pismenost**), naglasak je na **procesu i aktivnosti**, kao i na **znanju**.

Matematička kompetencija uključuje, na različitim stupnjevima, **sposobnost i volju za korištenjem matematičkih načina mišljenja** (logičko i prostorno mišljenje) i **prikazivanja** (formule, modeli, konstrukcije, grafovi, grafikoni).

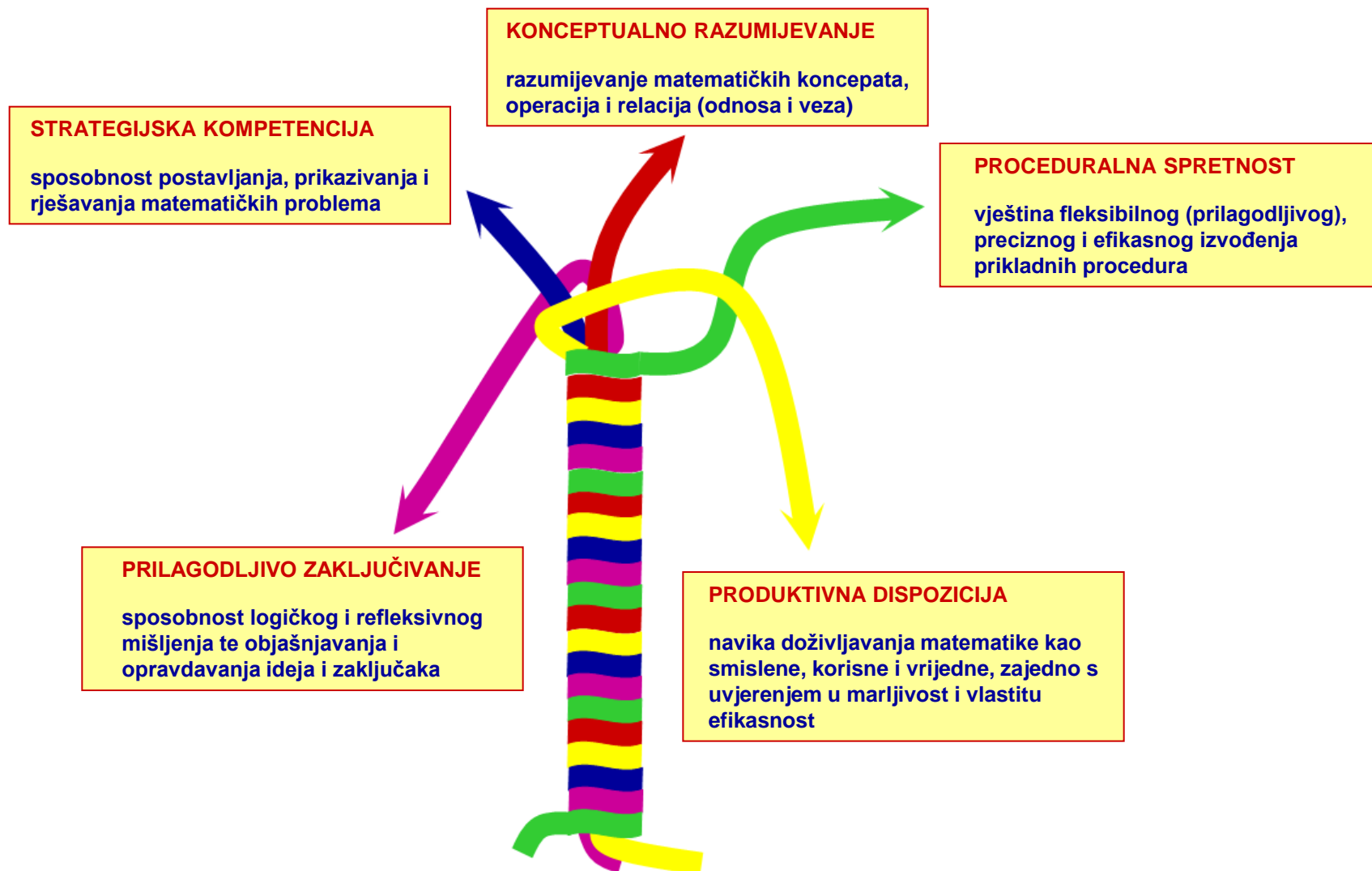
MATEMATIČKA KOMPETENCIJA (3)

TEMELJNA ZNANJA, VJEŠTINE I STAVOVI povezani s ovom kompetencijom:

- **Potrebno znanje** u matematici uključuje čvrsto znanje brojeva, mjera i struktura, osnovnih operacija i osnovnih matematičkih prikaza, razumijevanje matematičkih izraza i pojmova, te svijest o pitanjima na koje matematika može dati odgovore.
- Osoba bi trebala moći **primijeniti matematička načela i procese** u svakodnevnom kontekstu kod kuće i na poslu, te moći slijediti i vrednovati nizove argumenata. Osoba bi trebala biti sposobna **matematički rasuđivati, razumjeti matematičke dokaze i komunicirati** na matematičkom jeziku, te **koristiti primjerena pomagala**.
- **Pozitivan stav u matematici** zasnovan je na poštivanju istine, te volji za traženjem razloga i procjeni njihove valjanosti.

PET STANDARDA MATEMATIČKE KOMPETENCIJE (SAD)

Prema: *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*, 2001.



3. KAKO ORGANIZIRATI NASTAVU MATEMATIKE?

**- suradničko učenje i metode
aktivne nastave matematike -**

UČENIČKE AKTIVNOSTI U NASTAVI MATEMATIKE

Nastava matematike treba biti strukturirana od niza planiranih, organiziranih i svrsishodnih **učeničkih aktivnosti** u kojima učenici **rade matematiku**:

- uočavaju i istražuju pravilnosti i zakonitosti
- uspostavljaju i istražuju veze i odnose (relacije) među promatranim objektima i situacijama
- povezuju matematičke koncepte s njima bliskim smislenim situacijama i problemima iz realnog svijeta i svakodnevnog života
- odabiru i primjenjuju različite matematičke strategije i metode
- uvježbavaju različite matematičke postupke (algoritme) i tehnike

AKTIVNI GLAGOLI KOJIMA OPISUJEMO UČENIČKE AKTIVNOSTI

Dok rade matematiku, učenici:

- istražuju
- ispituju
- naslućuju
- rješavaju
- potvrđuju
- opravdavaju
- uvjeravaju se
- predstavljaju / prikazuju
- primjenjuju
- iskazuju / formuliraju
- otkrivaju
- konstruiraju
- objašnjavaju / argumentiraju
- predviđaju
- razvijaju
- opisuju
- rabe / koriste
- dokazuju
- ...

METODE UČENJA I POUČAVANJA MATEMATIKE

Navedeni opći glagoli jasno određuju metode učenja i poučavanja matematike.

Učeničke aktivnosti moraju biti takve da od učenika zahtijevaju:

- višu razinu mišljenja, tzv. **refleksivno mišljenje**
- razumijevanje problema, odnosno situacije
- misaono predstavljanje (vizualizaciju) problema, odnosno situacije
- **aktivno razmišljanje i zaključivanje** o matematičkim idejama uključenima u aktivnost

Važno!!

Učenje i poučavanje matematike **ne smije** se svesti na učeničko:

- slušanje nastavnika
- prepisivanje tuđih (nastavnikovih ili drugih učenika) ideja i rješenja s ploče
- memoriranje definicija, pravila i gotovih algoritama
- drilanje pojedinih (tipova) zadataka

METODE UČENJA I POUČAVANJA MATEMATIKE (2)

Zadaća je nastavnika stvoriti pozitivno ozračje u kojem se učenike potiče na:

- **istraživanje i primjenu matematičkih ideja i koncepata**
- **suradnju i učenje jednih od drugih**

Produktivna kultura nastave matematike uključuje i ova načela:

- **učničke matematičke ideje su “razredna valuta”**
 - ideja svakog učenika ima potencijal pridonijeti nečijem učenju matematike i kao takva zaslužuje uvažavanje i povratnu informaciju od nastavnika
- **učenici imaju autonomiju u izboru metoda za rješavanje problemskih zadataka**
 - više različitih metoda omogućuje njihovu usporedbu i raspravu o njihovoj efikasnosti i racionalnosti u drugim (matematičkim) situacijama
- **učničke pogreške vrijedna su prilika za učenje**
 - učničke pogreške otvaraju mogućnost za ispitivanje pogrešnih koncepcija (miskoncepcija) i pogrešaka u zaključivanju i podižu razinu analitičkih sposobnosti svih učenika
 - pogreške ne smijemo “gurati pod tepih” već ih treba konstruktivno upotrijebiti u učenju i poučavanju matematike

DVIJE IDEJE ZA SURADNIČKO UČENJE

Dvije efikasne metode suradničkog rada učenika na istraživanju matematičkih koncepata i postupaka:

- **aktivnost „gostiona”**
- **aktivnost radnih centara (ili radnih stanica)**

U obje aktivnosti učenici:

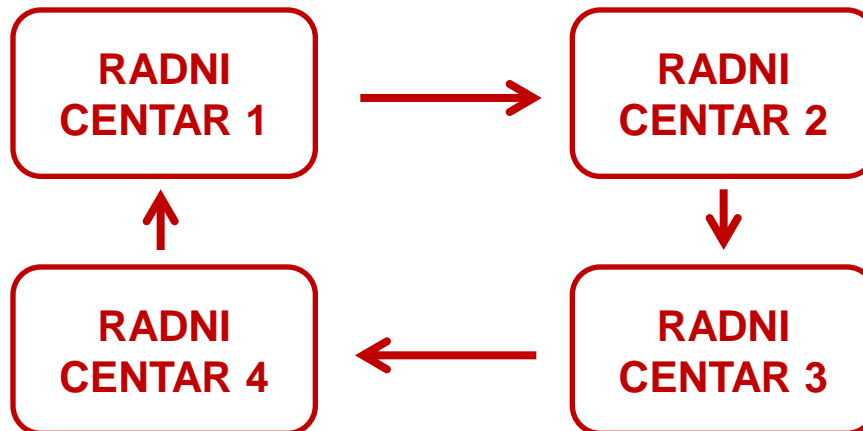
- suradnički, u timovima,
- uz razmjenu ideja i uzajamnu pomoć

rade na postavljenom problemu, zadacima, nastavnom listiću i sl.

RADNI CENTRI (RADNE STANICE)

Organizacija rada:

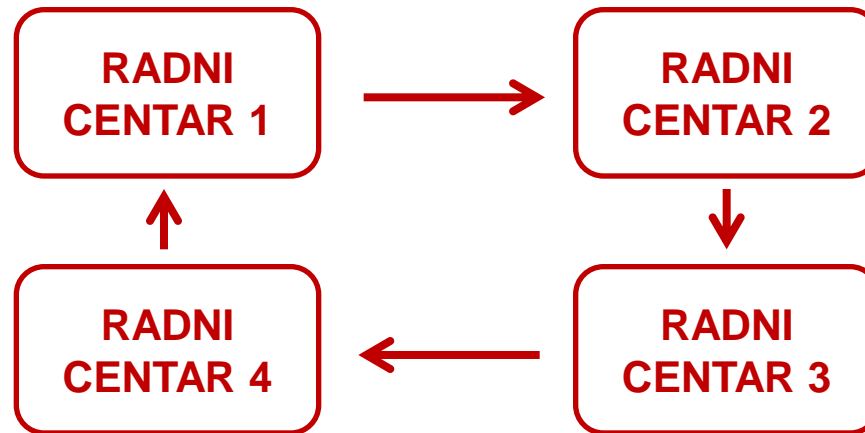
- radni materijal za učenike podijeljen je u međusobno nezavisne aktivnosti, koje se mogu odvijati proizvoljnim redoslijedom
- aktivnosti moraju biti planirane tako da imaju jednako trajanje
- učenici su podijeljeni u podjednako velike skupine (4 – 5 učenika) čiji je broj jednak broju pripremljenih radnih centara
- na početku rada, svaka od skupina učenika zauzima mjesto u jednom radnom centru
- učenici zadanim kružnim redoslijedom obilaze radne centre i izvode pripadne aktivnosti, sve dok ih sve ne obiđu
- nastavnik nadzire rad u centrima i oglašava vrijeme promjene centra
- umjesto premještanja učenika, mogu se premještati radni materijali



RADNI CENTRI (RADNE STANICE) (2)

Ova aktivnost osobito je pogodna za uvježbavanje i usustavljivanje gradiva.

Pri planiranju ove aktivnosti mora se voditi računa o vremenu: svaka skupina učenika mora obići sve radne centre.



„GOSTIONA”

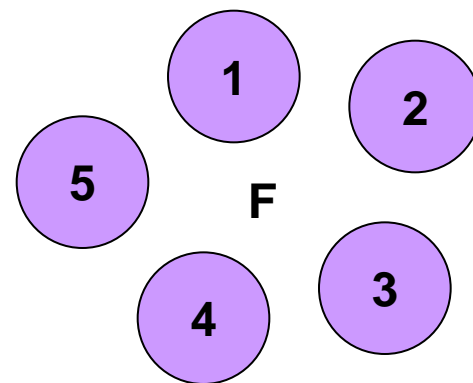
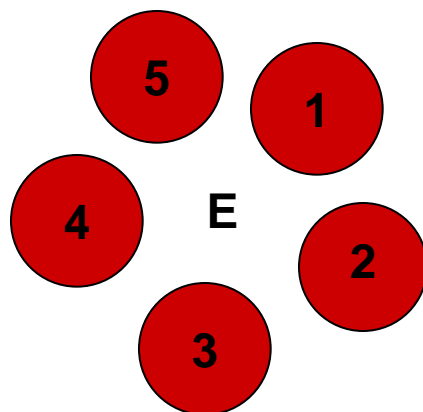
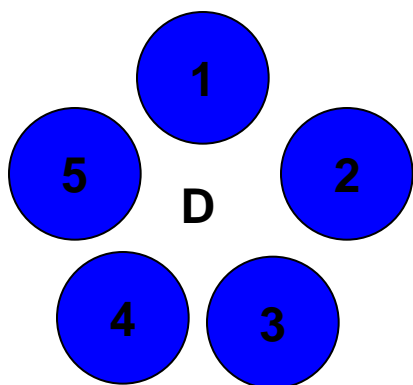
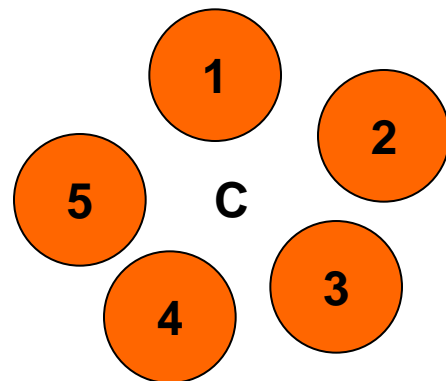
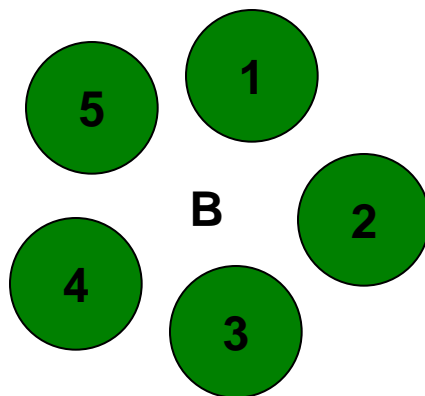
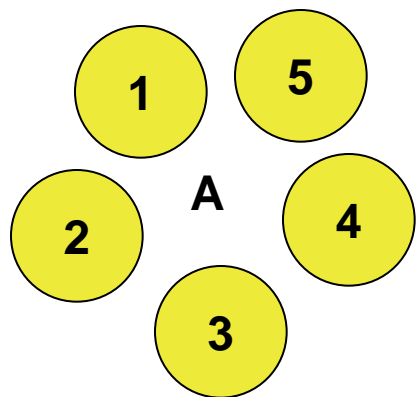
Organizacija rada:

- radni materijal za učenike podijeljen je u dijelove, tako da se na njemu radi u tri etape
- učenici su podijeljeni u skupine A, B, C, D..., svaka s 4 do 5 učenika, a svaki učenik dobiva i svoj broj 1, 2, 3, 4...
- skupine dobivaju različite, ali analogne zadatke na kojima rade
- nastavnik nadzire rad u svakoj skupini, a nakon određenog, planiranog vremena najavljuje promjenu sastava grupa, prema brojevima 1, 2, 3, 4..., tj. najavljuje odlazak „u goste”
- u svakoj skupini sada je po jedan učenik svake „originalne” skupine
- razmjenjuju se ideje, rezultati i zaključci do kojih je došla svaka „originalna” skupina i donose zajednički zaključci
- nakon planiranog vremena, nastavnik oglašava „povratak kući” u „originalne” skupine
- učenici svake skupine sada usklađuju zaključke i završavaju svoj rad na zadacima.

Ova aktivnost osobito je pogodna pri otkrivanju novih matematičkih koncepata i njihovih svojstava jer omogućuje:

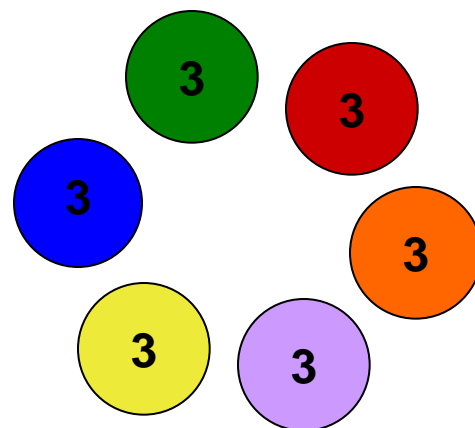
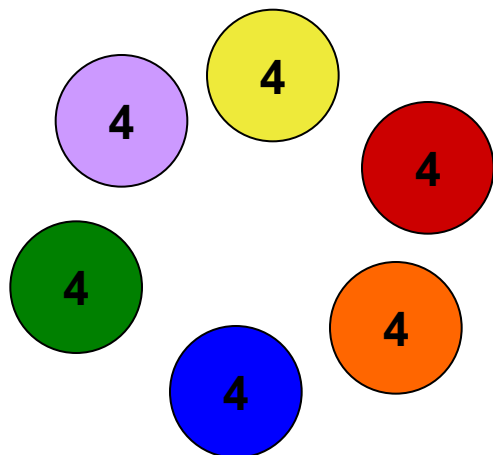
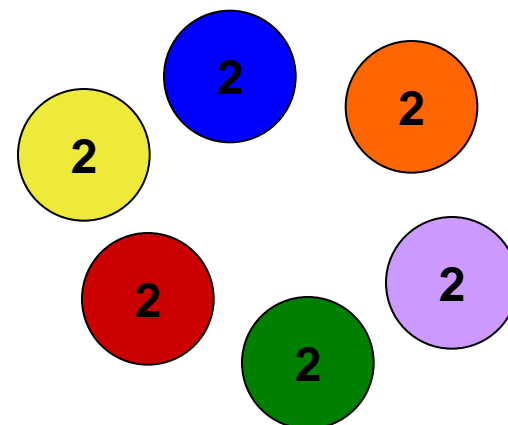
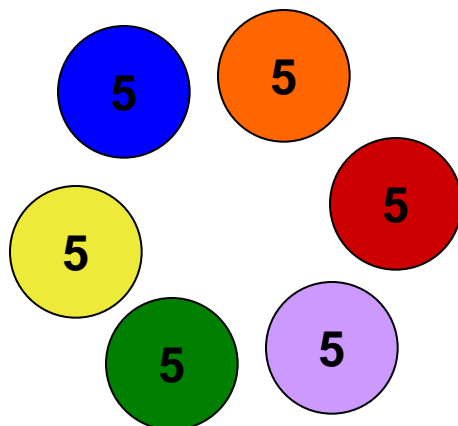
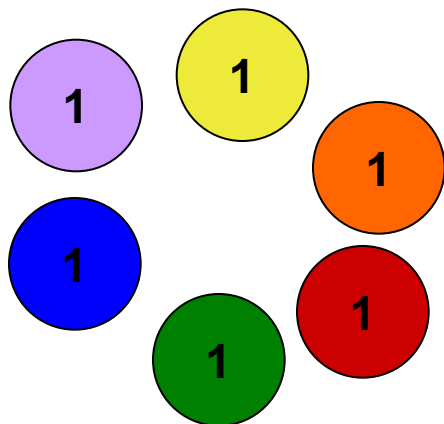
- dovoljno velik i reprezentativan uzorak podataka, primjera ili analognih slučajeva na temelju kojih učenici **nepotpunom indukcijom donose opći zaključak**
- razmjenu učeničkih spoznaja i ideja te njihovu neposrednu međusobnu komunikaciju matematičkim jezikom

1. faza – RAD U SKUPINAMA A, B, C, D, E, F

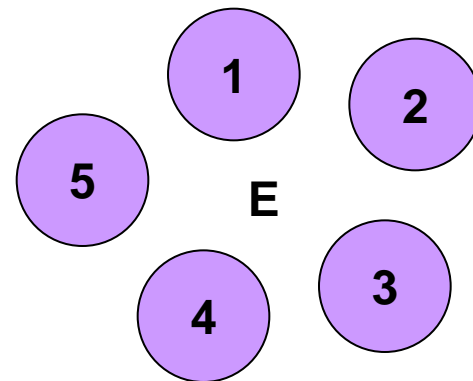
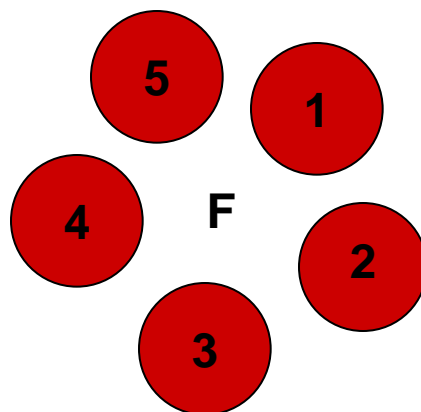
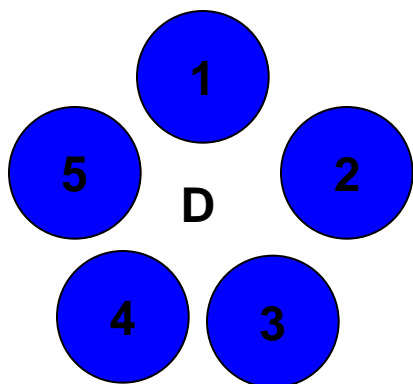
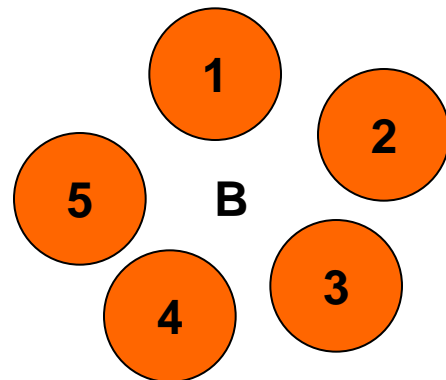
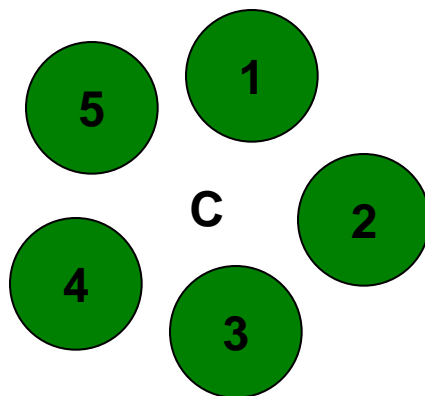
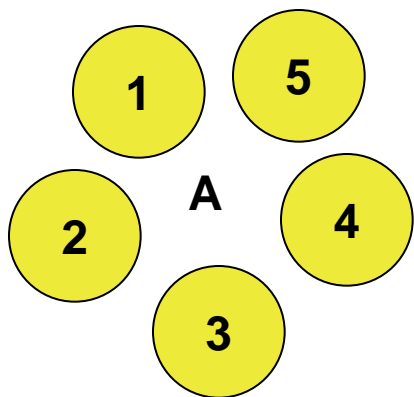


2. faza – IDEMO U GOSTE NA KAVU

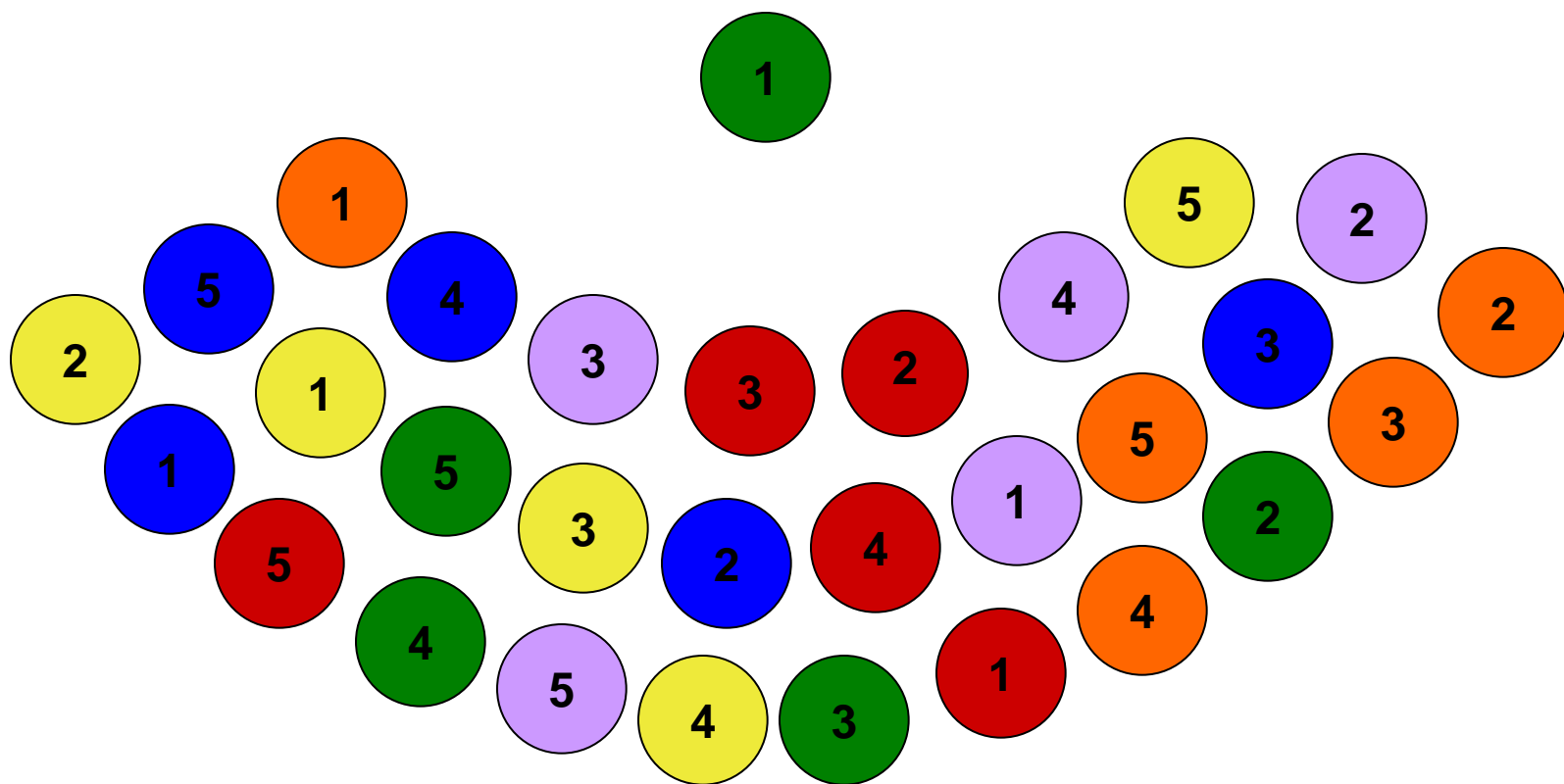
1, 2, 3, 4, 5



3. faza – POVRATAK KUĆI U SKUPINE A, B, C, D, E, F



4. faza (opcionalno) – ZAJEDNIČKA RAZREDNA DISKUSIJA I ZAKLJUČCI



„GOSTIONA” (2)

Ova aktivnost osobito je pogodna pri otkrivanju novih matematičkih koncepata i njihovih svojstava jer omogućuje:

- dovoljno velik i reprezentativan uzorak podataka, primjera ili analognih slučajeva na temelju kojih učenici **nepotpunom indukcijom donose opći zaključak**
- razmjenu učeničkih spoznaja i ideja te njihovu neposrednu međusobnu komunikaciju matematičkim jezikom.

4. Primjeri: SKUPOVI BROJEVA

- izgradnja skupa realnih brojeva -

4.1. POJAM PROSTOG BROJA

AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja

Cilj aktivnosti: učenici će, primjenjujući pravila djeljivosti, “otkriti” proste brojeve

Oblik rada: suradnički rad učenika u šest četveročlanih timova i četiri šesteročlana tima, u obliku gostionice

Potrebni materijal:

- nastavni listić broj 1 za svakog učenika, s time da po dvije skupine imaju isti nastavni listić (skupine A i D; skupine B i E; skupine C i F)
- nastavni listić broj 2 s tablicom prirodnih brojeva od 1 do 30, za svakog učenika
- nastavni listić broj 3 s pitanjima, za svakog učenika

NASTAVNI LISTIĆ BROJ 1 ZA SKUPINE A i D

Odredite sve djelitelje prirodnih brojeva iz prvog stupca tablice, ispišite ih i odredite njihov broj.

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1		
3		
4		
7		
10		
15		
18		
23		
27		
28		
30		

1. Koji od brojeva u tablici ima najmanje djelitelja? Koliko?
2. Koji prirodni broj je djelitelj svakog od brojeva u tablici?
3. Koliko najmanje djelitelja imaju brojevi u tablici koji su različiti od 1?
4. Odredite brojeve u tablici s točno 2 djelitelja. Kojim su brojevima djeljivi ti brojevi?
5. Ispišite sve brojeve iz tablice koji imaju više od 2 djelitelja.

NASTAVNI LISTIĆ BROJ 1 ZA SKUPINE B i E

Odredite sve djelitelje prirodnih brojeva iz prvog stupca tablice, ispišite ih i odredite njihov broj.

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1		
2		
5		
6		
11		
14		
20		
21		
24		
26		
29		

1. Koji od brojeva u tablici ima najmanje djelitelja? Koliko?
2. Koji prirodni broj je djelitelj svakog od brojeva u tablici?
3. Koliko najmanje djelitelja imaju brojevi u tablici koji su različiti od 1?
4. Odredite brojeve u tablici s točno 2 djelitelja. Kojim su brojevima djeljivi ti brojevi?
5. Ispišite sve brojeve iz tablice koji imaju više od 2 djelitelja.

NASTAVNI LISTIĆ BROJ 1 ZA SKUPINE C i F

Odredite sve djelitelje prirodnih brojeva iz prvog stupca tablice, ispišite ih i odredite njihov broj.

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1		
8		
9		
12		
13		
16		
17		
19		
22		
23		
25		

1. Koji od brojeva u tablici ima najmanje djelitelja? Koliko?
2. Koji prirodni broj je djelitelj svakog od brojeva u tablici?
3. Koliko najmanje djelitelja imaju brojevi u tablici koji su različiti od 1?
4. Odredite brojeve u tablici s točno 2 djelitelja. Kojim su brojevima djeljivi ti brojevi?
5. Ispišite sve brojeve iz tablice koji imaju više od 2 djelitelja.

NASTAVNI LISTIĆ BROJ 2 ZA SVAKOG UČENIKA

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		

1. Koji od brojeva u tablici ima najmanje djelitelja? Koliko?
2. Koji prirodni broj je djelitelj svakog od brojeva u tablici?
3. Koliko najmanje djelitelja imaju brojevi u tablici koji su različiti od 1?
4. Odredite brojeve u tablici s točno 2 djelitelja. Kojim su brojevima djeljivi ti brojevi?
5. Ispišite sve brojeve iz tablice koji imaju više od 2 djelitelja.

NASTAVNI LISTIĆ BROJ 3 ZA SVAKOG UČENIKA

1. Koliko najmanje djelitelja može imati neki prirodni broj?
2. Koji prirodni broj ima najmanje djelitelja?
3. Koliko najmanje djelitelja može imati prirodni broj različit od 1?
4. Kojim je brojevima sigurno djeljiv svaki prirodni broj različit od 1?
5. Koji od prirodnih brojeva u tablici imaju točno 2 djelitelja?
6. Koji od prirodnih brojeva u tablici imaju više od 2 djelitelja?
7. Koji od prirodnih brojeva u tablici ima najviše djelitelja?

AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (2)

Tijek aktivnosti:

1. faza (10 min):

Učenike podijelimo u šest četveročlanih skupina.

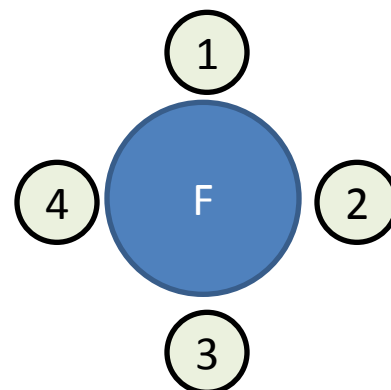
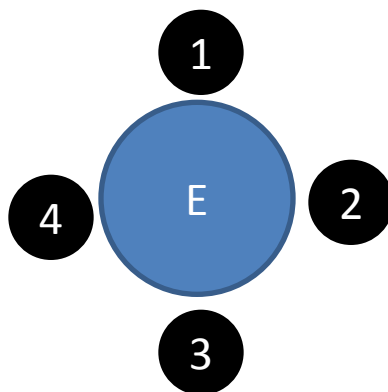
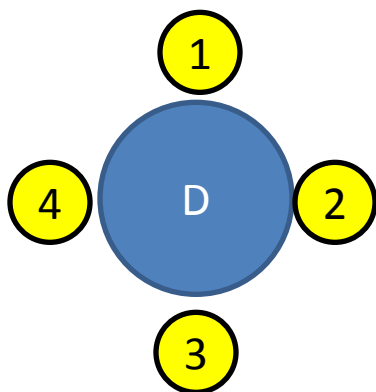
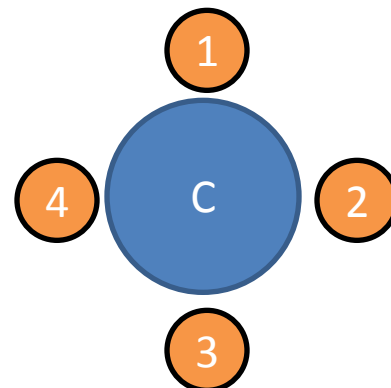
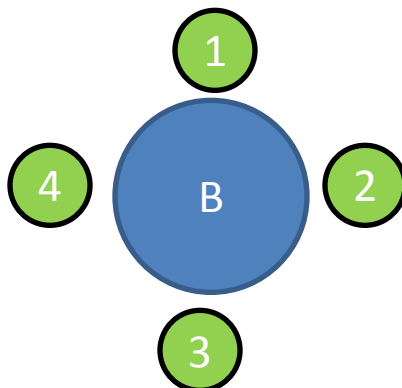
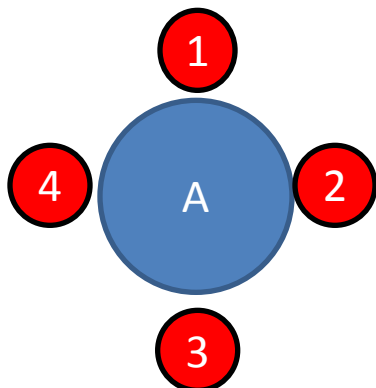
Svaka skupina dobije oznaku A, B, C, D, E ili F.

Svaki član svake skupine dobije jedan od brojeva 1, 2, 3 ili 4.

AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (3)

Tijek aktivnosti:

1. faza (10 min) - učenici u skupinama ispunjavaju nastavni listić broj 1 za tu skupinu



ISPUNJENI NASTAVNI LISTIĆ BROJ 1 ZA SKUPINE A I D

Odredite sve djelitelje prirodnih brojeva iz prvog stupca tablice, ispišite ih i odredite njihov broj.

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1	1	1
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
7	1, 7	2
10	1, 2, 5, 10	4
15	1, 3, 5, 15	4
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
23	1, 23	2
27	1, 3, 9, 27	4
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	6
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	8

1. Koji od brojeva u tablici ima najmanje djelitelja? Koliko?
Broj 1 ima najmanje djelitelja, samo samoga sebe.
2. Koji prirodni broj je djelitelj svakog od brojeva u tablici?
Broj 1 je djelitelj svakog od brojeva u tablici.
3. Koliko najmanje djelitelja imaju brojevi u tablici koji su različiti od 1?
Brojevi u tablici koji su različiti od 1 imaju najmanje 2 djelitelja.
4. Odredite brojeve u tablici s točno 2 djelitelja. Kojim su brojevima djeljivi ti brojevi?
To su brojevi 3, 7 i 23. Svaki od njih djeljiv je samo s 1 i samim sobom.
5. Ispišite sve brojeve iz tablice koji imaju više od 2 djelitelja.
To su brojevi 4, 10, 15, 18, 27, 28 i 30.

ISPUNJENI NASTAVNI LISTIĆ BROJ 1 ZA SKUPINE B I E

Odredite sve djelitelje prirodnih brojeva iz prvog stupca tablice, ispišite ih i odredite njihov broj.

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1	1	1
2	1, 2	2
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
11	1, 11	2
14	1, 2, 7, 14	4
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6
21	1, 3, 7, 21	4
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8
26	1, 2, 13, 26	4
29	1, 29	2

1. Koji od brojeva u tablici ima najmanje djelitelja? Koliko?

Broj 1 ima najmanje djelitelja, samo samoga sebe.

2. Koji prirodni broj je djelitelj svakog od brojeva u tablici?

Broj 1 je djelitelj svakog od brojeva u tablici.

3. Koliko najmanje djelitelja imaju brojevi u tablici koji su različiti od 1?

Brojevi u tablici koji su različiti od 1 imaju najmanje 2 djelitelja.

4. Odredite brojeve u tablici s točno 2 djelitelja. Kojim su brojevima djeljivi ti brojevi?

To su brojevi 2, 5, 11 i 29. Svaki od njih djeljiv je samo s 1 i samim sobom.

5. Ispišite sve brojeve iz tablice koji imaju više od 2 djelitelja.

To su brojevi 6, 14, 20, 21, 24 i 26.

ISPUNJENI NASTAVNI LISTIĆ BROJ 1 ZA SKUPINE C I F

Odredite sve djelitelje prirodnih brojeva iz prvog stupca tablice, ispišite ih i odredite njihov broj.

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1	1	1
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
13	1, 13	2
16	1, 2, 4, 8, 16	5
17	1, 17	2
19	1, 19	2
22	1, 2, 11, 22	4
23	1, 23	2
25	1, 5, 25	3

1. Koji od brojeva u tablici ima najmanje djelitelja? Koliko?

Broj 1 ima najmanje djelitelja, samo samoga sebe.

2. Koji prirodni broj je djelitelj svakog od brojeva u tablici?

Broj 1 je djelitelj svakog od brojeva u tablici.

3. Koliko najmanje djelitelja imaju brojevi u tablici koji su različiti od 1?

Brojevi u tablici koji su različiti od 1 imaju najmanje 2 djelitelja.

4. Odredite brojeve u tablici s točno 2 djelitelja. Kojim su brojevima djeljivi ti brojevi?

To su brojevi 13, 17, 19 i 23. Svaki od njih djeljiv je samo s 1 i samim sobom.

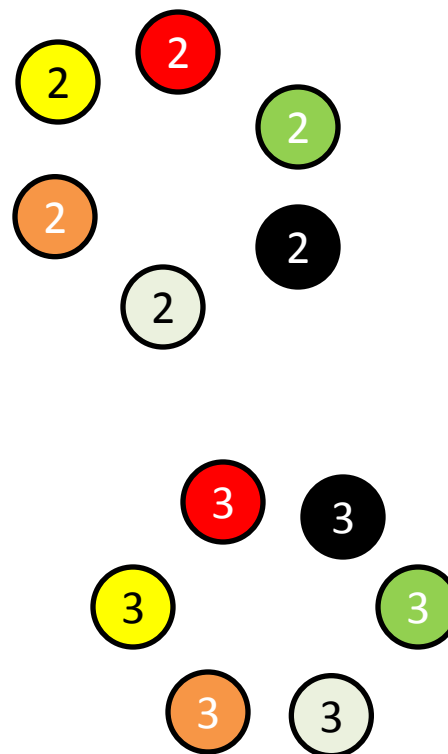
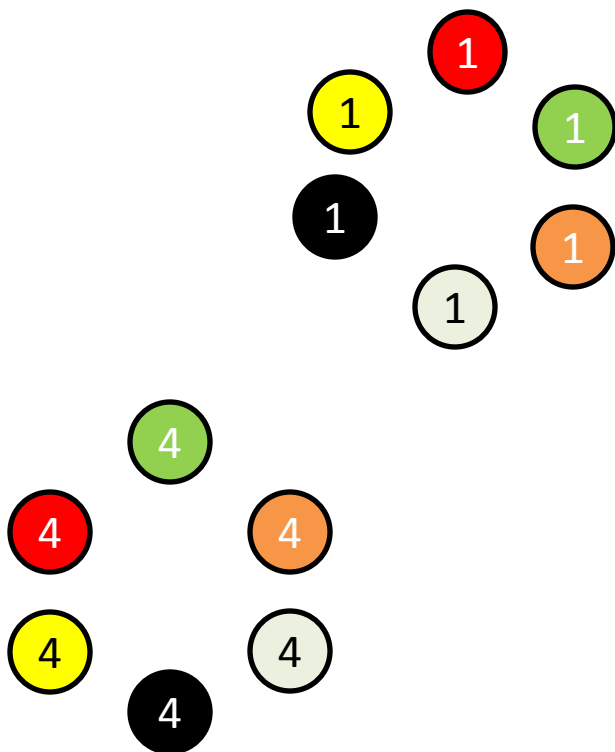
5. Ispišite sve brojeve iz tablice koji imaju više od 2 djelitelja.

To su brojevi 8, 9, 12, 16, 22 i 25.

AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (4)

Tijek aktivnosti:

2. faza – Idemo u goste na kavu (10 min)



AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (5)

Tijek aktivnosti:

2. faza – Idemo u goste na kavu **(10 min)**

- Učenici međusobno uspoređuju nastavne listiće broj 1 te primjećuju da dva po dva učenika imaju isti listić.
- Dva po dva učenika koji imaju isti nastavni listić broj 1 uspoređuju svoje tablice i zaključke te usklađene zaključke prezentiraju članovima ostalih četiriju skupina.
- Svaki učenik dobije nastavni listić broj 2.
- Zajednički, uz razmjenu ideja i mišljenja, diskusijom rješavaju cijeli nastavni listić broj 2.

ISPUNJENI NASTAVNI LISTIĆ BROJ 2

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
13	1, 13	2
14	1, 2, 7, 14	4
15	1, 3, 5, 15	4
16	1, 2, 4, 8, 16	5
17	1, 17	2
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
19	1, 19	2
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6
21	1, 3, 7, 21	4
22	1, 2, 11, 22	4
23	1, 23	2
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8
25	1, 5, 25	3
26	1, 2, 13, 26	4
27	1, 3, 9, 27	4
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	6
29	1, 29	2
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	8

1. Koji od brojeva u tablici ima najmanje djelitelja?
Koliko?

Broj 1 ima najmanje djelitelja, samo samoga sebe.

2. Koji prirodni broj je djelitelj svakog od brojeva u tablici?

Broj 1 je djelitelj svakog od brojeva u tablici.

3. Koliko najmanje djelitelja imaju brojevi u tablici koji su različiti od 1?

Brojevi u tablici koji su različiti od 1 imaju najmanje 2 djelitelja.

4. Odredite brojeve u tablici s točno 2 djelitelja.
Kojim su brojevima djeljivi ti brojevi?

To su brojevi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 i 29.

Svaki od njih djeljiv je samo s 1 i samim sobom.

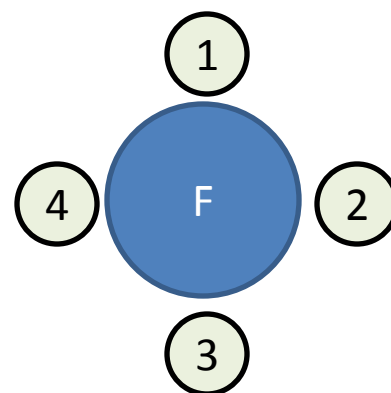
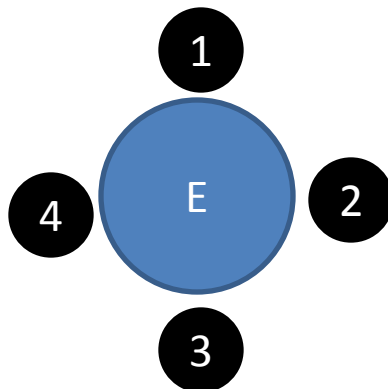
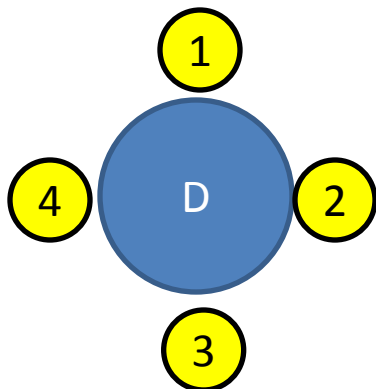
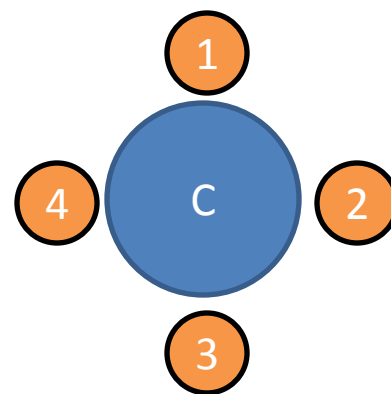
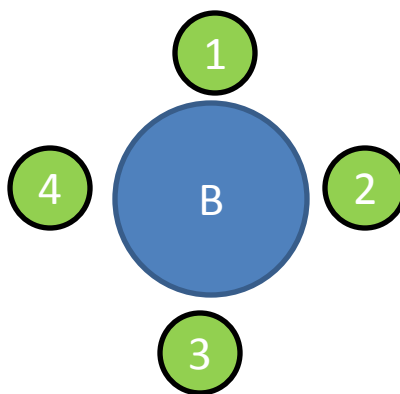
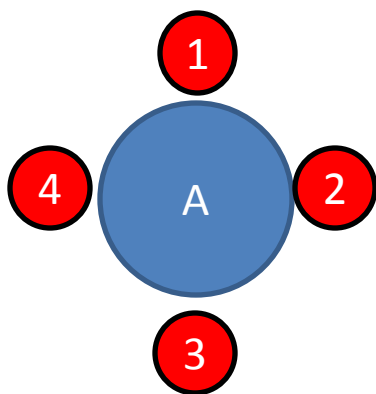
5. Ispišite sve brojeve iz tablice koji imaju više od 2 djelitelja.

To su brojevi 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28 i 30.

AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (6)

Tijek aktivnosti:

3. faza – Povratak kući u skupinu A, B, C, D, E **(10 min)**



AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (7)

Tijek aktivnosti:

3. faza – Povratak kući u skupinu A, B, C, D, E (10 min)

- Upućujemo učenike da na nastavnom listiću broj 2 zaokruže sve brojeve koji imaju točno dva djelitelja.
- Učenici u svakoj skupini usporede i provjere označene tablice.

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
13	1, 13	2
14	1, 2, 7, 14	4
15	1, 3, 5, 15	4
16	1, 2, 4, 8, 16	5
17	1, 17	2
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
19	1, 19	2
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6
21	1, 3, 7, 21	4
22	1, 2, 11, 22	4
23	1, 23	2
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8
25	1, 5, 25	3
26	1, 2, 13, 26	4
27	1, 3, 9, 27	4
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	6
29	1, 29	2
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	8

AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (8)

Tijek aktivnosti:

3. faza – Povratak kući u skupinu A, B, C, D, E **(10 min)**

- Svakom učeniku podijelimo nastavni listić broj 3 s pitanjima. Učenici u timu diskutiraju i rješavaju nastavni listić broj 3 te donose zaključke.

ISPUNJENI NASTAVNI LISTIĆ BROJ 3

1. Koliko najmanje djelitelja može imati neki prirodni broj?

Prirodni broj može imati najmanje jednog djelitelja. To je broj 1.

2. Koji prirodni broj ima najmanje djelitelja?

Broj 1 ima najmanje djelitelja, samo samoga sebe.

3. Koliko najmanje djelitelja može imati prirodni broj različit od 1?

Prirodni broj različit od 1 može imati najmanje 2 djelitelja, broj 1 i samoga sebe.

4. Kojim je brojevima sigurno djeljiv svaki prirodni broj različit od 1?

Svaki prirodni broj različit od 1 sigurno je djeljiv s 1 i samim sobom.

5. Koji od prirodnih brojeva u tablici imaju točno 2 djelitelja?

Prirodni brojevi u tablici koji imaju točno 2 djelitelja su: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 i 29.

6. Koji od prirodnih brojeva u tablici imaju više od 2 djelitelja?

Prirodni brojevi u tablici koji imaju više od 2 djelitelja su: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28 i 30.

7. Koji od prirodnih brojeva u tablici ima najviše djelitelja?

Brojevi 24 i 30 imaju najviše djelitelja, točno osam.

AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (9)

Tijek aktivnosti:

3. faza – Povratak kući u skupinu A, B, C, D, E **(10 min)**

- Slijedi usmena diskusija u razredu o zajedničkim zaključcima svih skupina.
- Učenicima prikazujemo ispunjenu tablicu iz nastavnog listića broj 2.

PRIRODAN BROJ	SVI DJELITELJI BROJA	BROJ DJELITELJA
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
13	1, 13	2
14	1, 2, 7, 14	4
15	1, 3, 5, 15	4
16	1, 2, 4, 8, 16	5
17	1, 17	2
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
19	1, 19	2
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6
21	1, 3, 7, 21	4
22	1, 2, 11, 22	4
23	1, 23	2
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8
25	1, 5, 25	3
26	1, 2, 13, 26	4
27	1, 3, 9, 27	4
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	6
29	1, 29	2
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	8

AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (10)

Tijek aktivnosti:

Završna diskusija (5 min)

Učenici dolaze do zaključaka:

- Broj 1 je djelitelj svakog prirodnog broja.
- Svaki prirodni broj veći od 1 ima barem dva djelitelja, a to su broj 1 i sam taj broj.
- Postoje prirodni brojevi s točno dva djelitelja, tj. oni koji su djeljivi samo s 1 i samim sobom.
- Postoje prirodni brojevi koji su, osim s 1 i samim sobom, djeljivi još nekim prirodnim brojem.

AKTIVNOST. Otkrivanje pojma prostog broja (11)

Tijek aktivnosti:

Završna diskusija (5 min)

Postavljamo pitanja:

- Koji su brojevi jednostavniji, a koji složeniji?
- Kako biste nazvali brojeve s točno dva djelitelja?
- A kako one s više od dva djelitelja?



Uvođenje novih pojmova:

Prirodni brojevi koji imaju točno dva djelitelja zovu se **PROSTI BROJEVI**.

Prirodni brojevi koji imaju više od dva djelitelja zovu se **SLOŽENI BROJEVI**.

Broj **1** ima samo jednog djelitelja. **Taj broj nije ni prost, niti složen.**

4.2. PRIMJENA RASTAVA BROJA NA PROSTE FAKTORE PRI ODREĐIVANJU NAJVEĆEG ZAJEDNIČKOG DJELITELJA I NAJMANJEG ZAJEDNIČKOG VIŠEKRAATNIKA DVAJU PRIRODNIH BROJEVA

Zadatak:

Odredite najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva 660 i 468.



Rješenje.

Prethodno naučeni postupak:

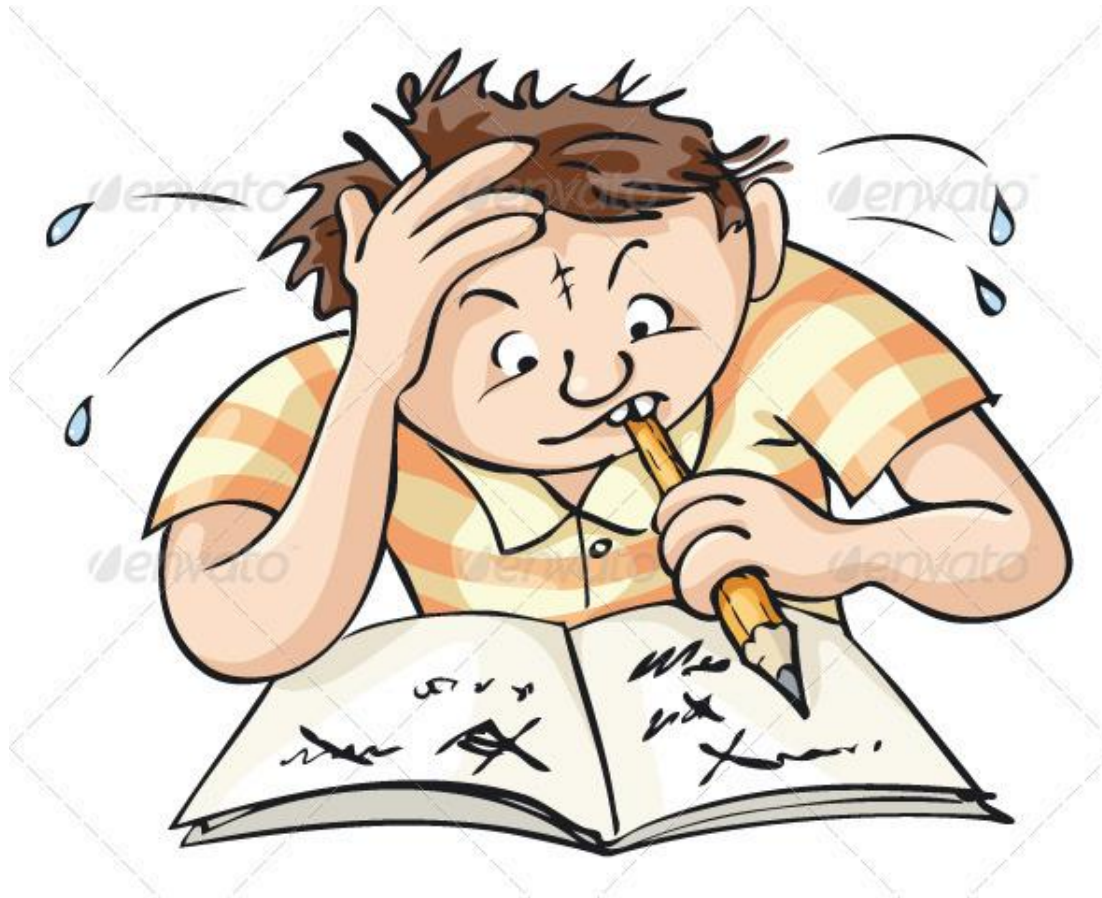
BROJ	660	468
SVI DJELITELJI BROJA	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 20, 22, 30, 33, 44, 55, 60, 66, 110, 132, 165, 220, 330, 660	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 13, 18, 26, 36, 39, 52, 78, 117, 156, 234, 468
ZAJEDNIČKI DJELITELJI BROJEVA	1, 2, 3, 4, 6, 12	
NAJVEĆI ZAJEDNIČKI DJELITELJ BROJEVA	12	

Rješenje.

Prethodno naučeni postupak:

BROJ	660	468
VIŠEKRAVNICI BROJA	660, 1320, 1980, 2640, 3300, 3960, 4620, 5280, 5940, 6600, 7260, 7920, 8580, 9240, 9900, 10560, ...	468, 936, 1404, 1872, 2340, 2808, 3276, 3744, 4212, 4680, 5148, 5616, 6084, 6552, 7020, 7488, 7956, 8424, 8892, 9360, 9828, 10296, ...
ZAJEDNIČKI VIŠEKRAVNICI BROJEVA	???	
NAJMANJI ZAJEDNIČKI VIŠEKRAVNIK BROJEVA	???	

Uočimo da je takav način neefikasan jer zahtijeva puno vremena.



Pitamo se, postoji li efikasniji način određivanja najvećeg zajedničkog djelitelja i najmanjeg zajedničkog višekratnika?



AKTIVNOST.

Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja pomoću rastava broja na proste faktore

- Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u paru, “otkriti” vezu između najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju brojeva i njihovih rastava na proste faktore
- Oblik rada: suradnički rad učenika u paru (12 parova)
- Potrebni materijal:
 - nastavni listić s tablicom za svaki par učenika, ukupno 12 listića (po 4 para dobiju isti listić)

Primjer nastavnog listića

1. Ispišite sve djelitelje brojeva u tablici te odredite njihov najveći zajednički djelitelj.
2. Rastavite brojeve na proste faktore.

Broj	Svi djelitelji broja	Najveći zajednički djelitelj brojeva	Rastav broja na proste faktore
36			
90			

Primjer nastavnog listića

1. Ispišite sve djelitelje brojeva u tablici te odredite njihov najveći zajednički djelitelj.
2. Rastavite brojeve na proste faktore.

Broj	Svi djelitelji broja	Najveći zajednički djelitelj brojeva	Rastav broja na proste faktore
60			
210			

Primjer nastavnog listića

1. Ispišite sve djelitelje brojeva u tablici te odredite njihov najveći zajednički djelitelj.
2. Rastavite brojeve na proste faktore.

Broj	Svi djelitelji broja	Najveći zajednički djelitelj brojeva	Rastav broja na proste faktore
72			
360			

AKTIVNOST.

Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja pomoću rastava broja na proste faktore (2)

- Tijek aktivnosti:
 - učenici u parovima nalaze djelitelje i najveći zajednički djelitelj zadanih brojeva i upisuju ih u tablicu
 - predstavnik para dobivene vrijednosti upisuje u tablicu na ploču, parovi koji su imali iste te brojeve kontroliraju točnost, a ostali dopisuju nove vrijednosti

Primjer djelomično ispunjene tablice na ploči

Broj	Djelitelji broja	Najveći zajednički djelitelj brojeva	Rastav broja na proste faktore
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72	72	
360	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360		
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	18	
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90		
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	30	
210	1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210		

AKTIVNOST.

Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja pomoću rastava broja na proste faktore (3)

- Tijek aktivnosti (nastavak) :
 - učenici u parovima rastavljaju zadane brojeve na proste faktore i rastav upisuju u tablicu
 - predstavnik para dobivene vrijednosti upisuje u tablicu na ploču, parovi koji su imali iste te brojeve kontroliraju točnost, a ostali dopisuju nove vrijednosti

Primjer ispunjene tablice na ploči

Broj	Djelitelji broja	Najveći zajednički djelitelj brojeva	Rastav broja na proste faktore
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72	72	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	18	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	30	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST.

Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja pomoću rastava broja na proste faktore (4)

- učitelj kaže učenicima da u rastavima na proste faktore zadanih parova brojeva zaokruže i upare jednake faktore
- učenici u parovima pronalaze zajedničke proste faktore, predstavnici timova dolaze pred ploču, a ostali zapisuju i kontroliraju

Primjer tablice na ploči

Broj	Djelitelji broja	Najveći zajednički djelitelj	Rastav broja na proste faktore
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72	72	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	18	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	30	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST.

Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja pomoću rastava broja na proste faktore (5)

- prema uputi učitelja, učenici pomnože zajedničke proste faktore u rastavima obaju brojeva (svaki faktor pojavljuje se samo jednom)

AKTIVNOST.

Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja pomoću rastava broja na proste faktore (6)

- na temelju tablice učenici uočavaju:
 - zajednički prosti faktori brojeva 72 i 360 su: 2, 2, 2, 3 i 3
 - njihov umnožak je: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$
 - otprije znaju da je 72 najveći zajednički djelitelj brojeva 72 i 360

Broj	Djelitelji broja	Najveći zajednički djelitelj	Rastav broja na proste faktore
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72	72	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	18	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	30	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST 6.

Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja pomoću rastava broja na proste faktore (7)

- na temelju tablice učenici uočavaju:
 - zajednički prosti faktori brojeva 36 i 90 su: 2, 3 i 3
 - njihov umnožak je: $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
 - otprije znaju da je 18 najveći zajednički djelitelj brojeva 36 i 90

Broj	Djelitelji broja	Najveći zajednički djelitelj	Rastav broja na proste faktore
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72	72	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	18	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	30	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST.

Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja pomoću rastava broja na proste faktore (8)

- na temelju tablice učenici uočavaju:
 - zajednički prosti faktori brojeva 60 i 210 su: 2, 3 i 5
 - njihov umnožak je: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
 - otprije znaju da je 30 najveći zajednički djelitelj brojeva 60 i 210

Broj	Djelitelji broja	Najveći zajednički djelitelj	Rastav broja na proste faktore
72	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72	72	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	18	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	30	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST.

Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja pomoću rastava broja na proste faktore (9)

*Učenici zaključuju da je **najveći zajednički djelitelj** dvaju prirodnih brojeva jednak umnošku svih zajedničkih prostih faktora tih brojeva.*

AKTIVNOST.

Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika pomoću rastava broja na proste faktore

- Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u paru, “otkriti” vezu između najmanjeg zajedničkog višekratnika dvaju brojeva i njihovih rastava na proste faktore
- Oblik rada: suradnički rad učenika u paru (12 parova)
- Potrebni materijal:
 - nastavni listić s tablicom za svaki par učenika, ukupno 12 listića (po 4 para dobiju isti listić)

Primjer nastavnog listića

1. Ispišite sve višekratnike brojeva u tablici te odredite njihov najmanji zajednički višekratnik.
2. Rastavite brojeve na proste faktore.

Broj	Višekratnici broja	Najmanji zajednički višekratnik brojeva	Rastav broja na proste faktore
36			
90			

Primjer nastavnog listića

1. Ispišite sve višekratnike brojeva u tablici te odredite njihov najmanji zajednički višekratnik.
2. Rastavite brojeve na proste faktore.

Broj	Višekratnici broja	Najmanji zajednički višekratnik brojeva	Rastav broja na proste faktore
60			
210			

Primjer nastavnog listića

1. Ispišite sve višekratnike brojeva u tablici te odredite njihov najmanji zajednički višekratnik.
2. Rastavite brojeve na proste faktore.

Broj	Višekratnici broja	Najmanji zajednički višekratnik brojeva	Rastav broja na proste faktore
72			
360			

AKTIVNOST.

Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika pomoću rastava broja na proste faktore (2)

- Tijek aktivnosti:
 - učenici u parovima nalaze višekratnike i najmanji zajednički višekratnik zadanih brojeva i upisuju ih u tablicu
 - predstavnik para dobivene vrijednosti upisuje u tablicu na ploču, parovi koji su imali iste te brojeve kontroliraju točnost, a ostali dopisuju nove vrijednosti

Primjer djelomično ispunjene tablice na ploči

Broj	Višekratnici broja	Najmanji zajednički višekratnik brojeva	Rastav broja na proste faktore
72	72, 144, 216, 288, 360, 432, ...	360	
360	360, 720, ...		
36	72, 108, 144, 180, 216, 252, ...	180	
90	180, 270, 360, 450, ...		
60	120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, ...	420	
210	210, 420, 630, 740, 850, 960, ...		

AKTIVNOST.

Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika pomoću rastava broja na proste faktore (3)

- Tijek aktivnosti (nastavak) :
 - učenici u parovima rastavljaju zadane brojeve na proste faktore i rastav upisuju u tablicu
 - predstavnik para dobivene vrijednosti upisuje u tablicu na ploču, parovi koji su imali iste te brojeve kontroliraju točnost, a ostali dopisuju nove vrijednosti

Primjer ispunjene tablice na ploči

Broj	Višekratnici broja	Najmanji zajednički višekratnik brojeva	Rastav broja na proste faktore
72	72, 144, 216, 288, 360, 432, ...	360	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	360, 720, ...		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	72, 108, 144, 180, 216, 252, ...	180	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	180, 270, 360, 450, ...		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, ...	420	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	210, 420, 630, 740, 850, 960, ...		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST.

Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika pomoću rastava broja na proste faktore (4)

- učitelj kaže učenicima da u rastavima na proste faktore zadanih parova brojeva zaokruže plavom bojom i upare jednake faktore, a crvenom bojom zaokruže ostale, neuparene faktore
- predstavnici timova dolaze pred ploču, a ostali zapisuju i kontroliraju

Primjer tablice na ploči

Broj	Višekratnici broja	Najmanji zajednički višekratnik brojeva	Rastav broja na proste faktore
72	72, 144, 216, 288, 360, 432, ...	360	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	360, 720, ...		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	72, 108, 144, 180, 216, 252, ...	180	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	180, 270, 360, 450, ...		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, ...	420	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	210, 420, 630, 740, 850, 960, ...		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST.

Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika pomoću rastava broja na proste faktore (5)

- prema uputi učitelja, učenici pomnože zajedničke proste faktore u rastavima obaju brojeva te sve ostale faktore u oba broja

AKTIVNOST.

Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika pomoću rastava broja na proste faktore (6)

- na temelju tablice učenici uočavaju:
 - zajednički prosti faktori brojeva 72 i 360 su: 2, 2, 2, 3 i 3
 - preostali prosti faktor je: 5
 - njihov umnožak je: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$
 - otprije znaju da je 360 najmanji zajednički višekratnik brojeva 72 i 360

Broj	Višekratnici broja	Najmanji zajednički višekratnik brojeva	Rastav broja na proste faktore
72	72, 144, 216, 288, 360, 432, ...	360	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	360, 720, ...		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	72, 108, 144, 180, 216, 252, ...	180	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	180, 270, 360, 450, ...		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, ...	420	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	210, 420, 630, 740, 850, 960, ...		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST.

Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika pomoću rastava broja na proste faktore (7)

- na temelju tablice učenici uočavaju:
 - zajednički prosti faktori brojeva 36 i 90 su: 2, 3 i 3
 - preostali prosti faktori u oba broja su: 2 i 5
 - njihov umnožak je: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 180$
 - otprije znaju da je 180 najmanji zajednički višekratnik brojeva 36 i 90

Broj	Višekratnici broja	Najmanji zajednički višekratnik brojeva	Rastav broja na proste faktore
72	72, 144, 216, 288, 360, 432, ...	360	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	360, 720, ...		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	72, 108, 144, 180, 216, 252, ...	180	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	180, 270, 360, 450, ...		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, ...	420	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	210, 420, 630, 740, 850, 960, ...		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST.

Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika pomoću rastava broja na proste faktore (8)

- na temelju tablice učenici uočavaju:
 - zajednički prosti faktori brojeva 60 i 210 su: 2, 3 i 5
 - preostali prosti faktori u oba broja su: 2 i 7
 - njihov umnožak je: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 = 420$
 - otprije znaju da je 420 najmanji zajednički višekratnik brojeva 60 i 210

Broj	Višekratnici broja	Najmanji zajednički višekratnik brojeva	Rastav broja na proste faktore
72	72, 144, 216, 288, 360, 432, ...	360	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
360	360, 720, ...		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
36	72, 108, 144, 180, 216, 252, ...	180	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
90	180, 270, 360, 450, ...		$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
60	120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, ...	420	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
210	210, 420, 630, 740, 850, 960, ...		$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

AKTIVNOST.

Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika pomoću rastava broja na proste faktore (9)

*Učenici zaključuju da je **najmanji zajednički višekratnik** dvaju prirodnih brojeva jednak umnošku svih zajedničkih i preostalih prostih faktora tih brojeva (tj. jednak je umnošku najvećeg zajedničkog djelitelja i preostalih prostih faktora tih brojeva).*

Sjetimo se zadatka:

Odredite najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva 660 i 468.



Riješimo ga na prethodno opisane načine:

Broj	Rastav broja na proste faktore	Najveći zajednički djelitelj brojeva	Najmanji zajednički višekratnik brojeva
660	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 25\,740$
468	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13$		

Uočimo...

Najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva možemo **brže** i **jednostavnije** naći pomoću rastava brojeva na proste faktore.



Zadatak:

Odredite najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva 10 i 21.



Rješenje.

Broj	Rastav broja na proste faktore	Najveći zajednički djelitelj brojeva	Najmanji zajednički višekratnik brojeva
10	$2 \cdot 5$		
21	$3 \cdot 7$		

Koji su zajednički prosti faktori brojeva 10 i 21?

Nema ih!

Koji je najveći zajednički djelitelj brojeva 10 i 21?

Jedini zajednički djelitelj brojeva 10 i 21 je broj 1.
Dakle, broj 1 je i najveći zajednički djelitelj brojeva
10 i 21.

Prirodne brojeve koji nemaju zajedničkog djelitelja osim broja 1 zovemo **RELATIVNO PROSTI BROJEVI**.

Uočimo da oni svaki za sebe nisu prosti: 10 i 21 su složeni brojevi.

Rješenje.

Broj	Rastav broja na proste faktore	Najveći zajednički djelitelj brojeva	Najmanji zajednički višekratnik brojeva
10	$2 \cdot 5$	1	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$
21	$3 \cdot 7$		

Čemu je jednak najmanji zajednički višekratnik relativno prostih brojeva 10 i 21?

Najmanji zajednički višekratnik relativno prostih brojeva 10 i 21 jednak je njihovom umnošku, tj. broju 210.

Očito je da to vrijedi općenito:

Najmanji zajednički višekratnik relativno prostih brojeva jednak je umnošku tih brojeva.

Radi lakšeg zapisivanja, uvodimo kraće oznake:

Najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva a, b označavamo oznakom $D(a, b)$.

Najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva a, b označavamo oznakom $V(a, b)$.

4.3. DECIMALNI ZAPIS RACIONALNOG BROJA

Iracionalni brojevi. Realni brojevi.



Mihaela Bahun
Ivana Laštro
Luka Liker
Antonija Mohar
Ivan Nađ

PRISJETIMO SE!!!!



AKTIVNOST : *Kakve smo sve brojeve upoznali?!*

Cilj aktivnosti: učenici će se, odgovaranjem na pitanja nastavnika, prisjetiti poznatih skupova brojeva: $\mathbf{N}, \mathbf{N}_0, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}^+$

Oblik rada: frontalni, dijalog nastavnika s učenicima

Potrebni materijal: slike na kojima su brojevi, selotejp

Tijek aktivnosti:

- nastavnik lijepi slike na ploču te postavlja pitanja učenicima
- učenici odgovaraju na pitanja i prisjećaju se poznatih skupova brojeva

AKTIVNOST : *Kakve smo sve brojeve upoznali?!*

Koliko svjećica ima na torti?

Na torti ima 7 svjećica.

Kojem skupu pripada broj svjećica?

Broj svjećica pripada skupu prirodnih brojeva \mathbf{N} .

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$



AKTIVNOST : *Kakve smo sve brojeve upoznali?!*

Koliko svjećica ima na torti?

Na torti ima 0 svjećica.

Kojem skupu pripada broj svjećica na torti?

Broj nula pripada skupu \mathbf{N}_0 . Skup prirodnih brojeva proširili smo nulom i dobili \mathbf{N}_0 .

$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$



AKTIVNOST : *Kakve smo sve brojeve upoznali?!*

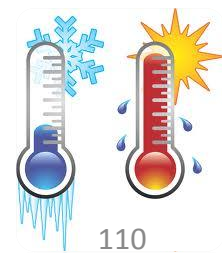
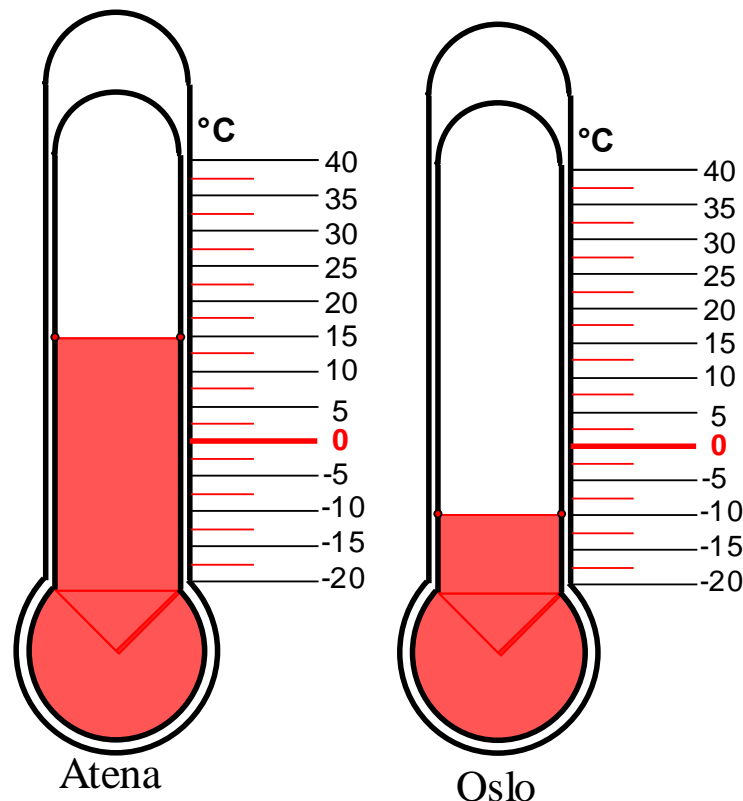
Kolika je temperatura na termometrima?

Na lijevom termometru je 15°C ,
a na desnom -10°C .

Kojem skupu pripadaju brojevi koje smo
očitali?

Pripadaju skupu pozitivnih i negativnih cijelih
brojeva.

Skup cijelih brojeva uključuje sve do sada
navedene brojeve.



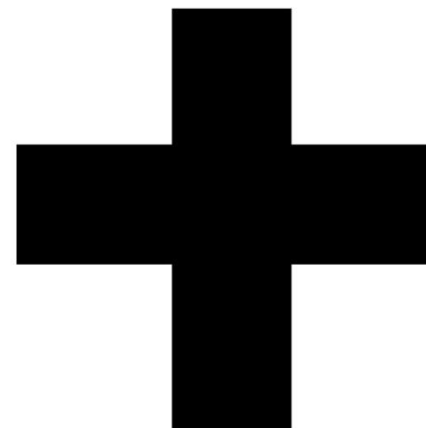
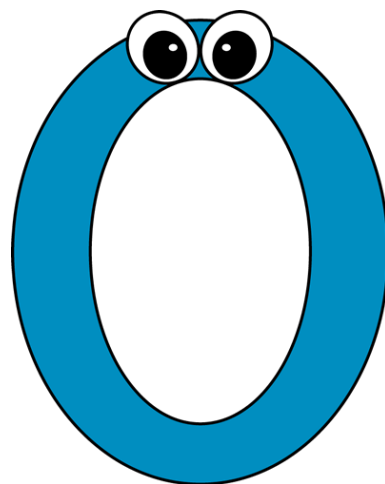
AKTIVNOST : *Kakve smo sve brojeve upoznali?!*

Koja je oznaka za skup cijelih brojeva?

Oznaka za skup cijelih brojeva je **Z**. Matematički ga zapisujemo:

$$\mathbf{Z} = \{ \dots, -n, \dots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, n, \dots \}$$

$$\mathbf{Z} = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \dots, n, -n, \dots \}$$



AKTIVNOST : *Kakve smo sve brojeve upoznali?!*

Što je na slici?

Na slici je boca vode zapremine pola litre.

Kako možemo matematički zapisati zapreminu od pola litre?

Zapreminu od pola litre zapisujemo kao decimalni broj 0.5 l ili kao razlomak $\frac{1}{2}$ l.



AKTIVNOST : *Kakve smo sve brojeve upoznali?!*

Koji skup skup brojeva sadrži brojeve 0.5 i $\frac{1}{2}$?

Skup pozitivnih razlomaka i decimalnih brojeva, odnosno skup pozitivnih racionalnih brojeva, \mathbf{Q}^+ . Skup \mathbf{N} proširili smo do skupa \mathbf{Q}^+ .

Kako bismo označili skup negativnih razlomaka i decimalnih brojeva?

Taj skup bismo označili \mathbf{Q}^- .

Kako nazivamo skup koji sadrži \mathbf{Q}^+ , nulu i \mathbf{Q}^- ?

To je skup racionalnih brojeva.

$$\frac{x}{y}$$

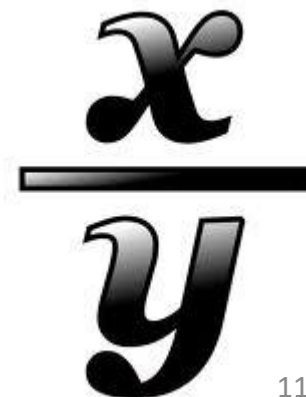
AKTIVNOST : *Kakve smo sve brojeve upoznali?!*

Kako matematički zapisujemo taj skup?

Skup sadrži brojeve oblika $\frac{a}{b}$, gdje su a i b cijeli brojevi, a b ne smije biti nula.

Matematički ga zapisujemo:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\}$$

A large, stylized graphic of a fraction. The numerator is a bold, italicized 'x' and the denominator is a bold, italicized 'y', separated by a thick horizontal line.

AKTIVNOST : *Kakve smo sve brojeve upoznali?!*

Znamo:

$$-3 : 5 = -(3 : 5) = (-3) : 5 = 3 : (-5) = -0.6$$

Analogno, možemo shvatiti razlomak kao dijeljenje.

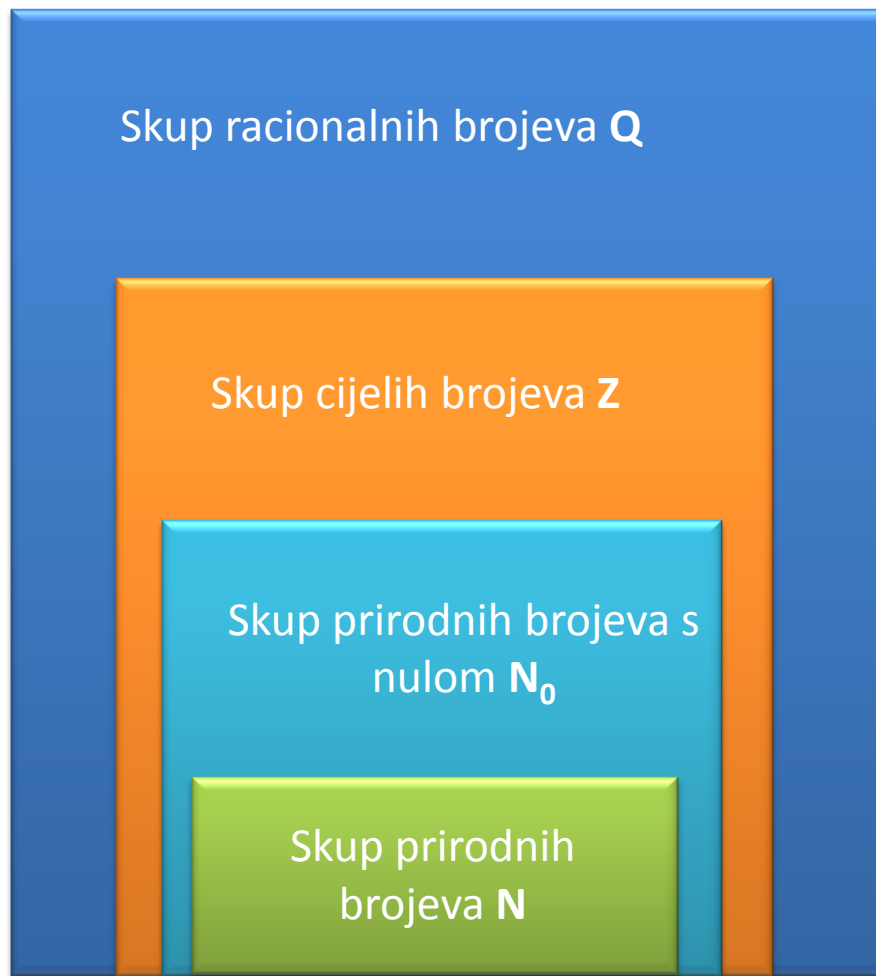
$$\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} = \frac{3}{-5} = -0.6$$

Kako onda još možemo zapisti skup racionalnih brojeva?

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N} \right\}$$



UOČIMO!



AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

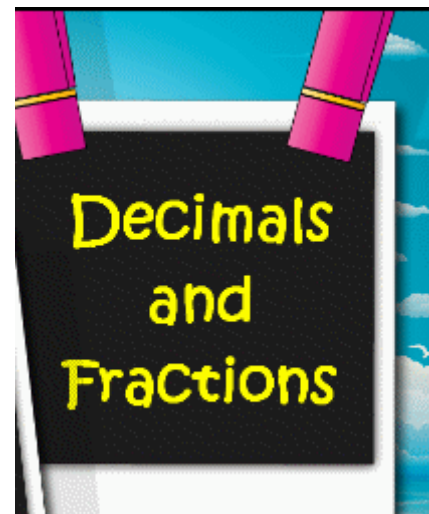
Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u paru, zapisivati razlomke u obliku decimalnih brojeva i obrnuto

Oblik rada: suradnički rad u paru

Potrebni materijal: nastavni listići

Tijek aktivnosti:

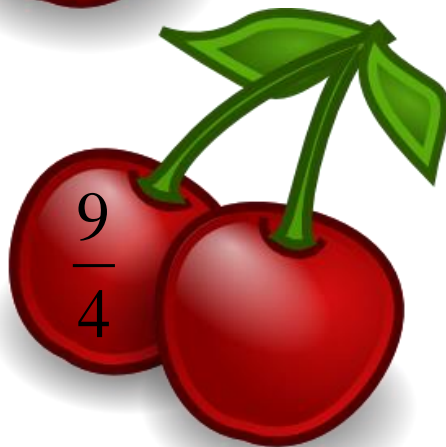
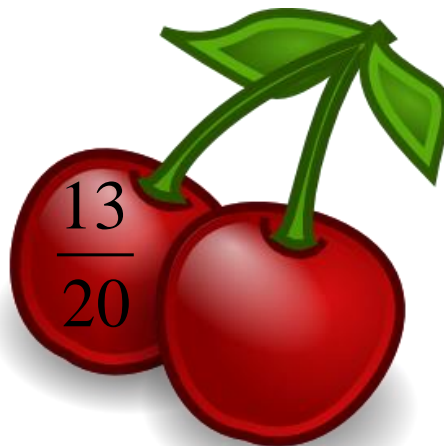
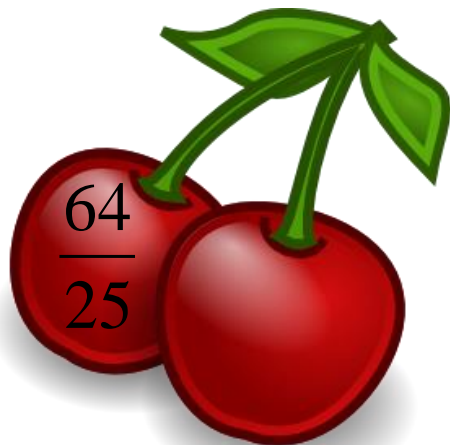
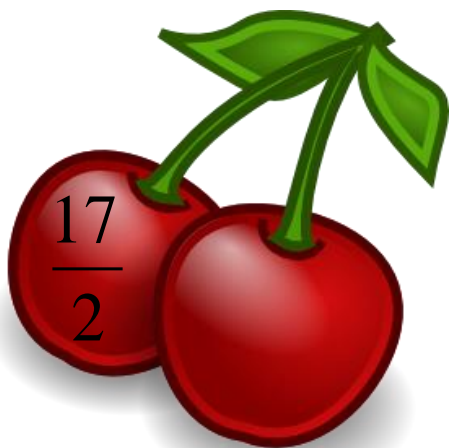
- nastavnik podijeli učenicima nastavne listiće
- učenici u paru rješavaju zadatke s nastavnih listića



AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

ZADATAK 1

Razlomak zapisan na lijevoj trešnji zapiši u decimalnom zapisu na desnu trešnju.



AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

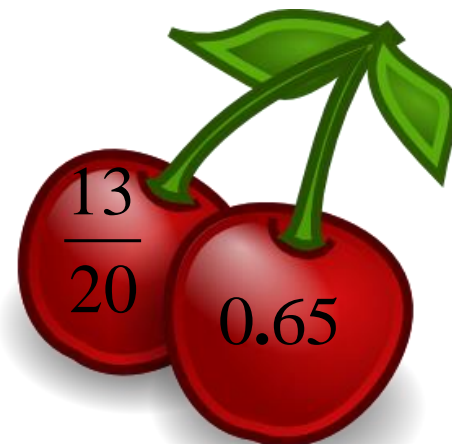
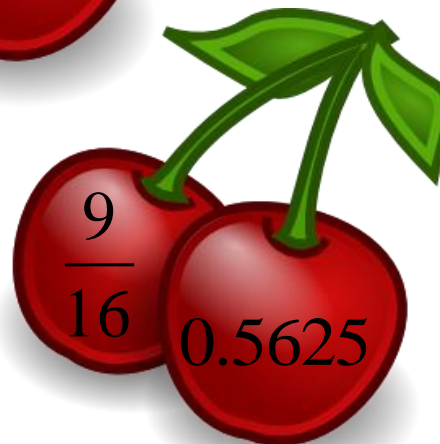
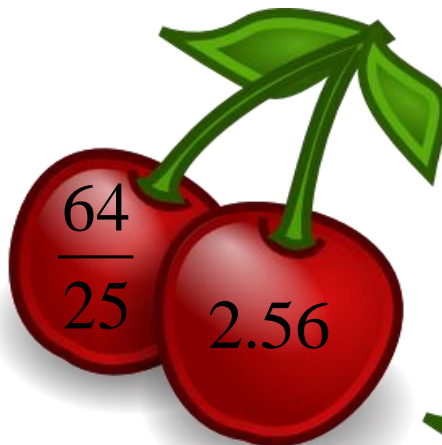
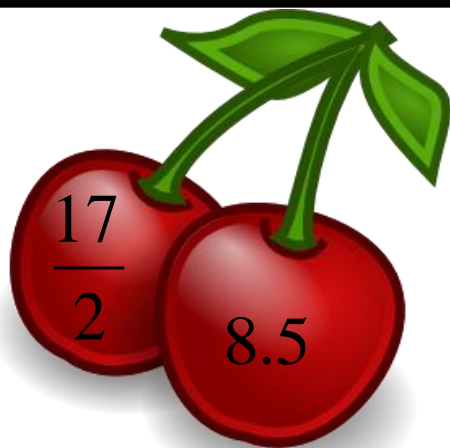
RJEŠENJE 1a

$$\frac{17}{2} = \frac{17 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{85}{10} = 8.5$$

$$\frac{64}{25} = \frac{64 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{256}{100} = 2.56$$

$$\frac{9}{4} = \frac{9 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{225}{100} = 2.25$$

$$\frac{13}{20} = \frac{13 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{65}{100} = 0.65$$



Drugi način
rješavanja!

AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

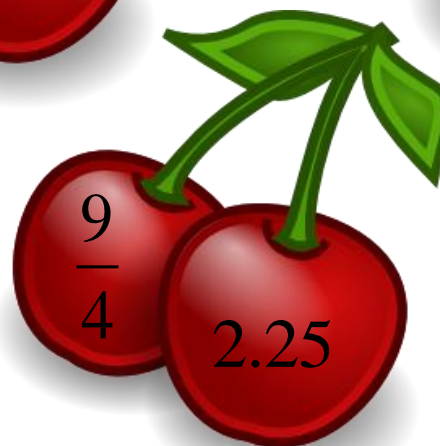
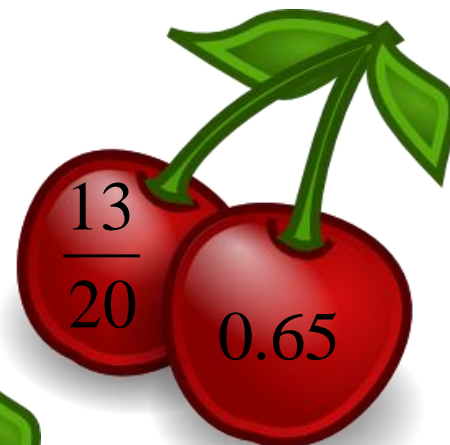
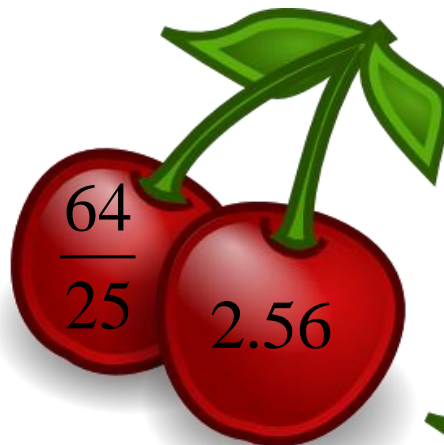
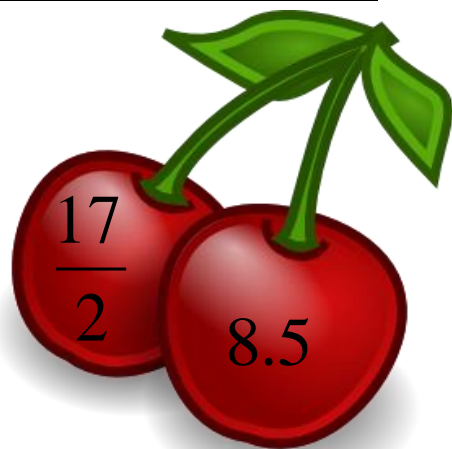
RJEŠENJE 1

$$\frac{17}{2} = 17 : 2 = 8.5$$

$$\frac{64}{25} = 64 : 25 = 2.56$$

$$\frac{13}{20} = 13 : 20 = 0.65$$

$$\frac{9}{4} = 9 : 4 = 2.25$$

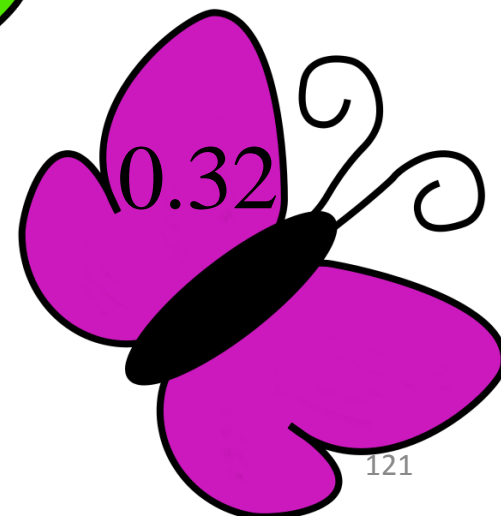
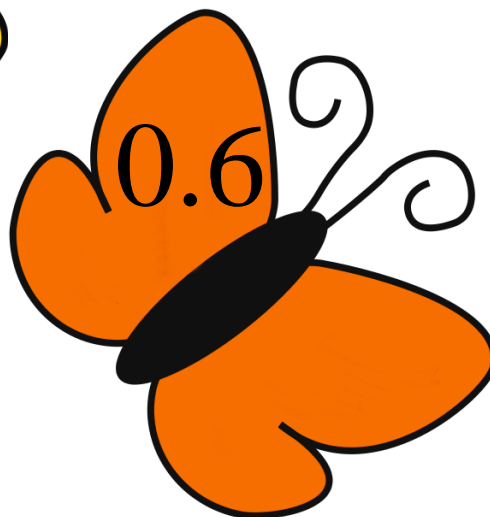


Ovaj zadatak
možemo riješiti i na
drugi način!

AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

ZADATAK 2

Decimalni broj, koji se nalazi na lijevom krilu leptira, zapiši u obliku potpuno skraćenog razlomka i taj razlomak zapiši na desno krilo leptira.



AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

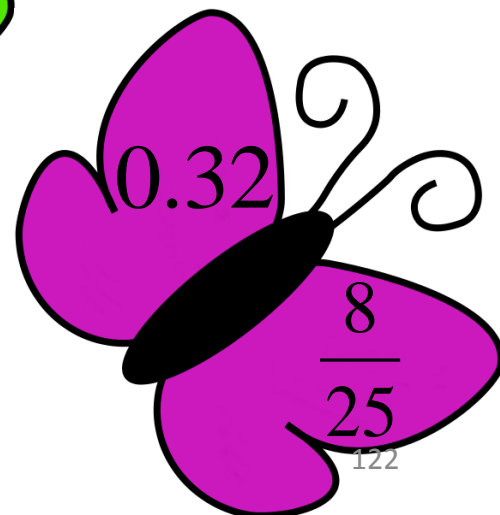
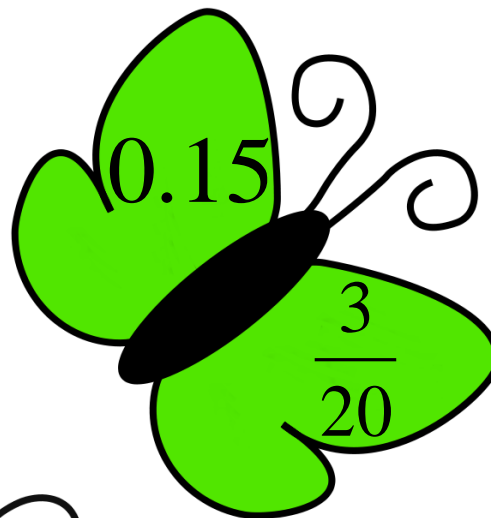
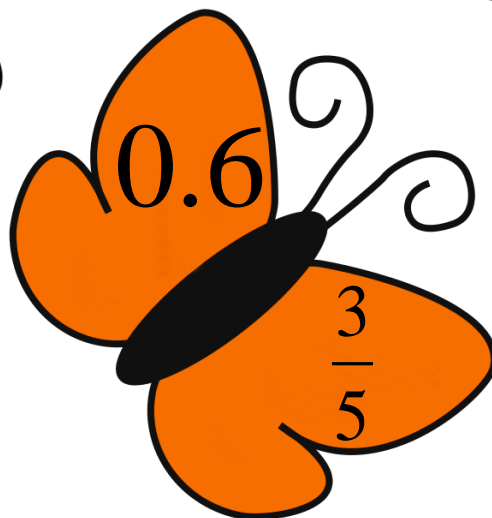
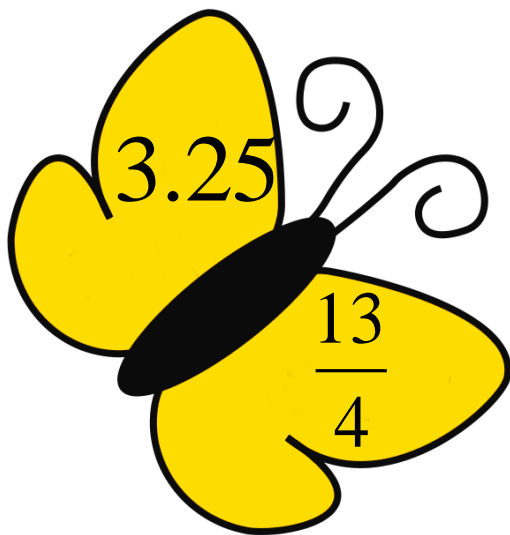
RJEŠENJE 2

$$3.25 = \frac{325}{100} = \frac{13}{4}$$

$$0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$0.15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

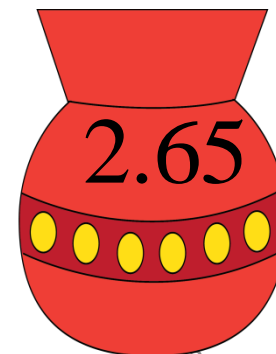
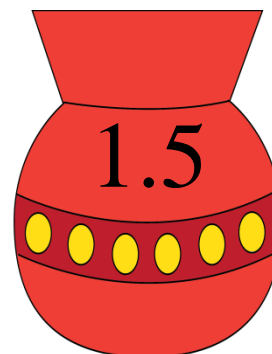
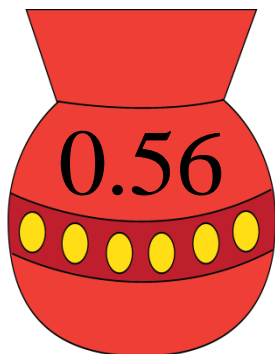
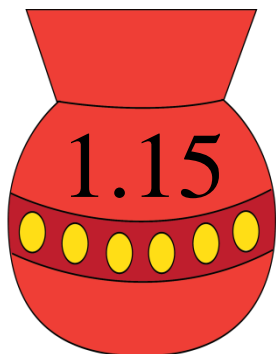
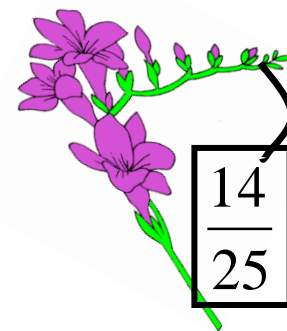
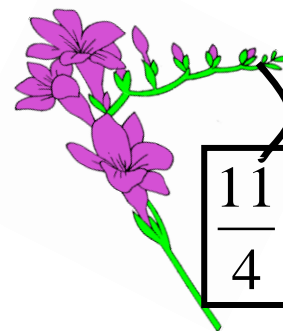
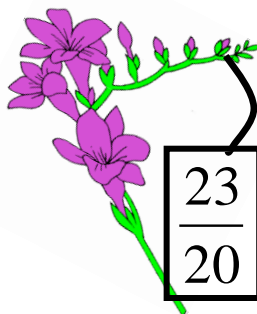
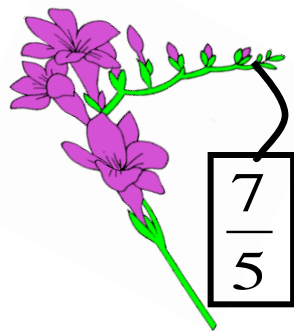
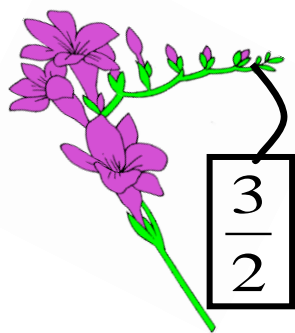
$$0.32 = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$$



AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

ZADATAK 3

Razlomak zapisan na cvijetu pridruži odgovarajućem decimalnom broju zapisanom na vazi. Prvo procijeni!



AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

RJEŠENJE 3

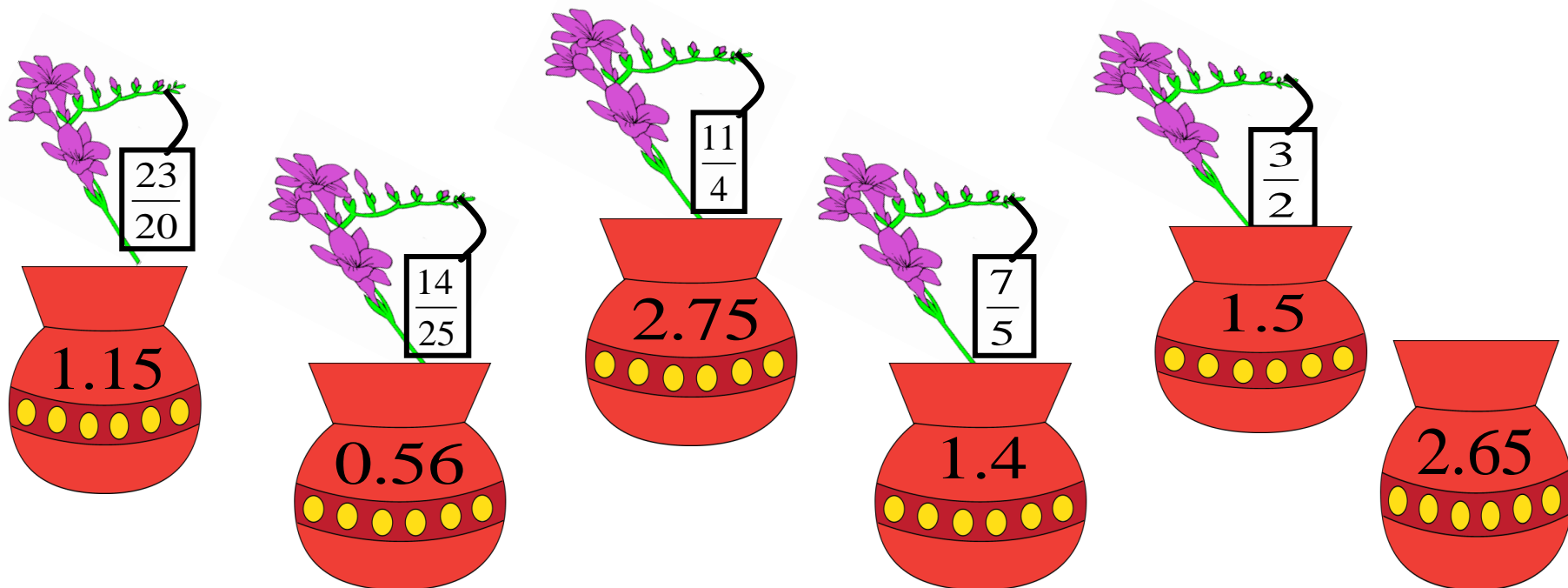
$$\frac{3}{2} = 3 : 2 = 1.5$$

$$\frac{23}{20} = 23 : 20 = 1.15$$

$$\frac{14}{25} = 14 : 25 = 0.56$$

$$\frac{7}{5} = 7 : 5 = 1.4$$

$$\frac{11}{4} = 11 : 4 = 2.75$$



AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

Diskusija:

Kako ste razlomku pridružili decimalni broj? (ZADATAK 1)

Decimalni zapis nekog razlomka određujemo dijeljenjem brojnika nazivnikom.

Razlomak možemo proširiti odgovarajućim brojem tako da dobijemo dekadski razlomak, a dijeljenje dekadskom jedinicom je jednostavnije.

Možete li za svaki decimalni broj pronaći odgovarajući razlomak? Na koji način? Što zaključujete? (ZADATAK 2)

Možemo. Svođenjem decimalnog broja na dekadski razlomak i potpunim skraćivanjem tog razlomka.

Decimalnom broju pripada više razlomačkih zapisa, ali samo jedan potpuno skraćen.

AKTIVNOST : *Decimalni broj = razlomak*

Diskusija:

Koje ste brojeve povezivali u ZADATKU 3? Na koji način?

Racionalne brojeve, tj. razlomke, povezivali smo s njihovim odgovarajućim decimalnim zapisom.

Decimalni zapis nekog razlomka određujemo dijeljenjem brojnika nazivnikom ili proširivanjem razlomka do dekadskog razlomka.

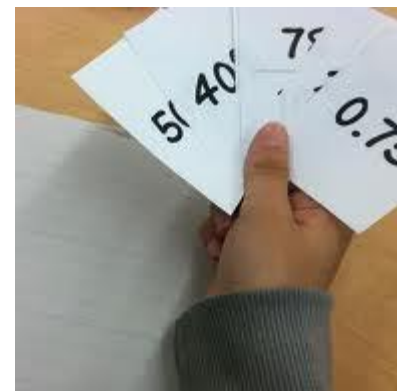
Ako prvo procjenjujemo, uočavamo da samo jedan razlomak ima veći nazivnik od brojnika, a to je $\frac{14}{25}$, što znači da njemu od ponuđenih decimalnih brojeva možemo odmah pridružiti decimalni broj 0.56. Kako imamo ponuđena samo dva decimalna broja veća od 2, jednom od njih možemo pridružiti $\frac{11}{4}$. Učenici procjenjuju da je to 2.75 (4 u nazivniku).

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u skupinama, otkriti da racionalni brojevi mogu imati beskonačan decimalni zapis

Oblik rada: suradničko-timski rad u četveročlanim timovima, frontalni rad

Potrebni materijal: 12 kartica na kojima se nalaze racionalni brojevi za svaki tim (po dva tima dobivaju jednake kartice), selotejp



AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Tijek aktivnosti:

- nastavnik podijeli učenike u šest četveročlanih timova te svakom timu podijeli 12 kartica na kojima se nalaze racionalni brojevi u razlomačkom zapisu
- nastavnik daje uputu učenicima da svaki učenik iz tima odabere tri kartice te da brojeve koji se nalaze na karticama zapišu u decimalnom zapisu
- učenici dijele brojnik zadanog razlomka nazivnikom i diskutiraju o dobivenim decimalnim zapisima zadanih racionalnih brojeva



AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Primjer kartica:

1. set

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{8}$$

$$\frac{25}{5}$$

$$\frac{11}{6}$$

$$\frac{10}{33}$$

$$\frac{7}{11}$$

$$\frac{26}{50}$$

$$\frac{6}{3}$$

$$\frac{16}{15}$$

$$\frac{23}{55}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{12}$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Primjer kartica:

2. set

$$\frac{4}{9}$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{9}{5}$$

$$\frac{16}{4}$$

$$\frac{41}{111}$$

$$\frac{7}{20}$$

$$\frac{75}{25}$$

$$\frac{13}{6}$$

$$\frac{13}{15}$$

$$\frac{23}{2}$$

$$\frac{7}{6}$$

$$\frac{8}{15}$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Primjer kartica:

3. set

$$\frac{6}{11}$$

$$\frac{14}{3}$$

$$\frac{19}{10}$$

$$\frac{18}{9}$$

$$\frac{23}{111}$$

$$\frac{9}{40}$$

$$\frac{0}{3}$$

$$\frac{7}{12}$$

$$\frac{4}{15}$$

$$\frac{17}{2}$$

$$\frac{15}{22}$$

$$\frac{19}{24}$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Tijek aktivnosti:

- učenici dijele brojnike razlomaka nazivnicima i dobivaju sljedeće podatke

1. set

$$\frac{5}{3} = 1.6666\dots$$

$$\frac{11}{6} = 1.8333\dots$$

$$\frac{5}{8} = 0.625$$

$$\frac{10}{33} = 0.303030\dots$$

$$\frac{25}{5} = 5$$

$$\frac{7}{11} = 0.6363\dots$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Tijek aktivnosti:

- učenici dijele brojnike razlomaka nazivnicima i dobivaju sljedeće podatke

1. set

$$\frac{26}{50} = 0.52$$

$$\frac{23}{55} = 0.41818...$$

$$\frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{16}{15} = 1.06666...$$

$$\frac{5}{12} = 0.416666...$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Tijek aktivnosti:

- učenici dijele brojnike razlomaka nazivnicima i dobivaju sljedeće podatke

2. set

$$\frac{4}{9} = 0.4444\dots$$

$$\frac{16}{4} = 4$$

$$\frac{8}{3} = 2.6666\dots$$

$$\frac{41}{111} = 0.369369\dots$$

$$\frac{9}{5} = 1.8$$

$$\frac{7}{20} = 0.35$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Tijek aktivnosti:

- učenici dijele brojnike razlomaka nazivnicima i dobivaju sljedeće podatke

2. set

$$\frac{75}{25} = 3$$

$$\frac{23}{2} = 11.5$$

$$\frac{13}{6} = 2.16666...$$

$$\frac{7}{6} = 1.1666...$$

$$\frac{13}{15} = 0.8666...$$

$$\frac{8}{15} = 0.5333...$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Tijek aktivnosti:

- učenici dijele brojnike razlomaka nazivnicima i dobivaju sljedeće podatke

3. set

$$\frac{6}{11} = 0.545454\dots$$

$$\frac{18}{9} = 2$$

$$\frac{14}{3} = 4.6666\dots$$

$$\frac{23}{111} = 0.207207\dots$$

$$\frac{19}{10} = 1.9$$

$$\frac{9}{40} = 0.225$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Tijek aktivnosti:

- učenici dijele brojnike razlomaka nazivnicima i dobivaju sljedeće podatke

3. set

$$\frac{0}{3} = 0$$

$$\frac{17}{2} = 8.5$$

$$\frac{7}{12} = 0.58333...$$

$$\frac{15}{22} = 0.68181...$$

$$\frac{4}{15} = 0.2666...$$

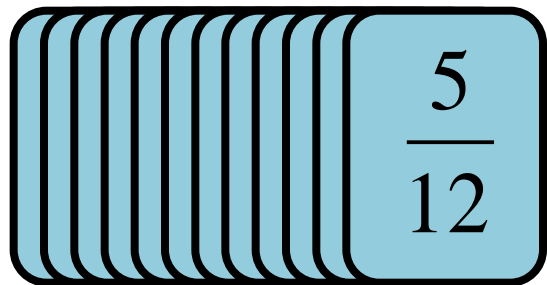
$$\frac{19}{24} = 0.791666...$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Tijek aktivnosti:

- nakon što su učenici zapisali zadane brojeve u decimalnom zapisu i prodiskutirali o dobivenim rješenjima, nastavnik im daje zadatak da uoče svojstvo po kojem će zadane brojeve razvrstati u tri grupe uzimajući u obzir njihove decimalne zapise
- učenici izlaze na ploču i selotejpom lijepe svoje tri kartice na ploču, ovisno o tome u koju grupu žele svrstati svoje brojeve
- jedan tim razvrstava kartice, a drugi tim koji ima iste kartice ga kontrolira





PRVA GRUPA

$$\frac{6}{3}$$

$$\frac{25}{5}$$

DRUGA GRUPA

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{26}{50}$$

$$\frac{5}{8}$$

TREĆA GRUPA

$$\frac{5}{12}$$

$$\frac{23}{55}$$

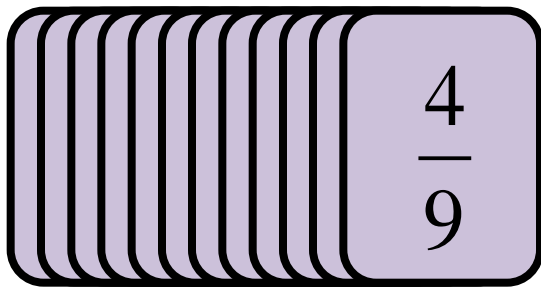
$$\frac{16}{15}$$

$$\frac{7}{11}$$

$$\frac{10}{33}$$

$$\frac{11}{6}$$

$$\frac{5}{3}$$



PRVA GRUPA

$$\frac{16}{4}$$

$$\frac{75}{25}$$

DRUGA GRUPA

$$\frac{9}{5}$$

$$\frac{7}{20}$$

$$\frac{23}{2}$$

TREĆA GRUPA

$$\frac{4}{9}$$

$$\frac{8}{3}$$

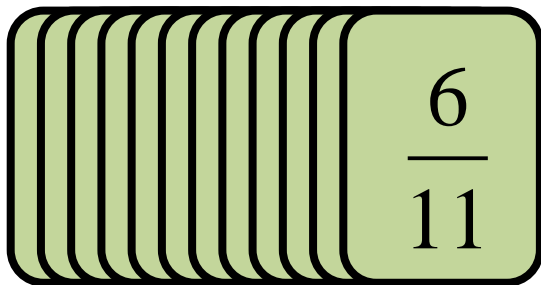
$$\frac{41}{111}$$

$$\frac{13}{6}$$

$$\frac{13}{15}$$

$$\frac{7}{6}$$

$$\frac{8}{15}$$



PRVA GRUPA

$$\frac{18}{9}$$

$$\frac{0}{3}$$

DRUGA GRUPA

$$\frac{19}{10}$$

$$\frac{9}{40}$$

$$\frac{17}{2}$$

TREĆA GRUPA

$$\frac{6}{11}$$

$$\frac{14}{3}$$

$$\frac{23}{111}$$

$$\frac{7}{12}$$

$$\frac{4}{15}$$

$$\frac{15}{22}$$

$$\frac{19}{24}$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Diskusija:

Na koji ste način razvrstali zadane brojeve u tri grupe? Po kojem kriteriju?

Zadane brojeve razvrstali smo u tri grupe s obzirom na postupak dijeljenja brojnika zadanih razlomaka nazivnicima tih razlomaka te s obzirom na decimalne zapise koje smo u tom postupku dobili.

Kakve brojeve ste svrstali u prvu grupu?

U prvu grupu smo stavili brojeve kod kojih smo pri dijeljenju brojnika nazivnikom kao rezultat (decimalni zapis) dobili cijeli broj.

Npr.

$$\frac{25}{5} = 25:5 = \mathbf{5}$$
$$\frac{16}{4} = 16:4 = \mathbf{4}$$
$$\frac{18}{9} = 18:9 = \mathbf{2}$$



Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{6}{3}$	$6 : 3 = 2$ 0	2
$\frac{75}{25}$	$75 : 25 = 3$ 0	3
$\frac{0}{3}$	$0 : 3 = 0$ 0	0

Rezultat dijeljenja je cijeli broj, a ostatak pri dijeljenju je 0.



AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Diskusija:

Kakve brojeve ste svrstali u drugu grupu?

U drugu smo grupu stavili brojeve kod kojih smo pri dijeljenju brojnika nazivnikom kao rezultat (decimalni zapis) dobili decimalni broj.

Npr.

$$\frac{3}{2} = 3 : 2 = 1.5 \quad \frac{7}{20} = 7 : 20 = 0.35$$

10
0

70
100
0



Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{26}{50}$	$26 : 50 = 0.52$ $\begin{array}{r} 260 \\ 100 \\ \textcircled{0} \end{array}$	0.52
$\frac{5}{8}$	$5 : 8 = 0.625$ $\begin{array}{r} 50 \\ 20 \\ 40 \\ \textcircled{0} \end{array}$	0.625
$\frac{9}{5}$	$9 : 5 = 1.8$ $\begin{array}{r} 40 \\ \textcircled{0} \end{array}$	1.8
$\frac{23}{2}$	$23 : 2 = 11.5$ $\begin{array}{r} 10 \\ \textcircled{0} \end{array}$	11.5

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{19}{10}$	$19 : 10 = 1.9$ 90 0	1.9
$\frac{9}{40}$	$9 : 40 = 0.225$ 90 100 200 0	0.225
$\frac{17}{2}$	$17 : 2 = 8.5$ 10 0	8.5

Rezultat dijeljenja je decimalni broj, a ostatak pri dijeljenju je 0.



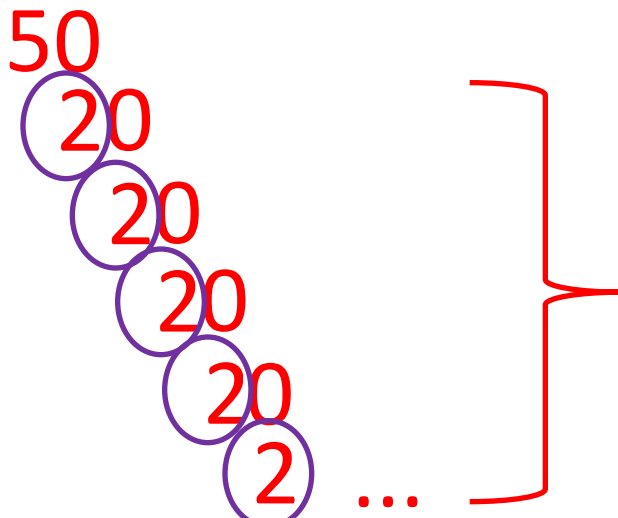
AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Diskusija:

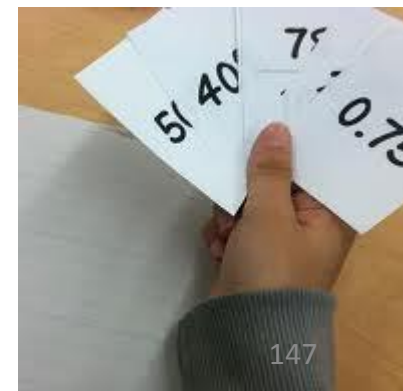
Kakve brojeve ste svrstali u treću grupu?

U treću grupu stavili smo brojeve kod kojih dijeljenje brojnika nazivnikom nije nikad prestalo, odnosno brojeve kod kojih se pri dijeljenju brojnika nazivnikom određeni ostaci ponavljaju te nikad ne dolazimo do ostatka 0.

Npr. $\frac{11}{6} = 11 : 6 = 1.83333 \dots$



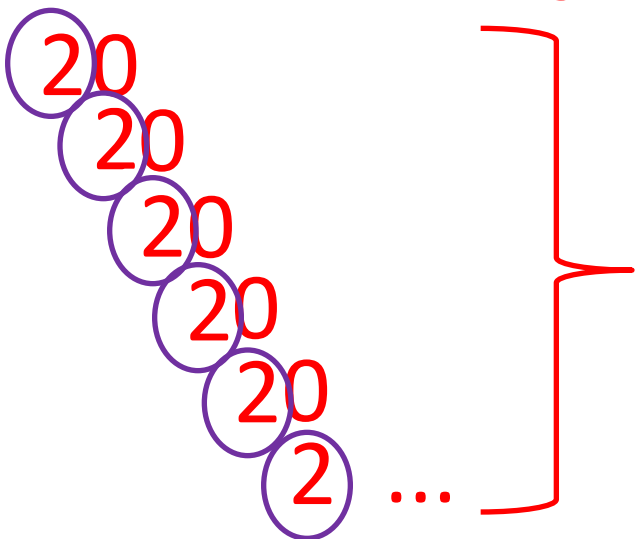
Ponavlja se
ostatak 2
beskonačno
mnogo puta.



AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Diskusija:

Npr. $\frac{14}{3} = 14 : 3 = 4.66666 \dots$



20
20
20
20
20
2 ...

Ponavlja se
ostatak 2
beskonačno
mного puta.

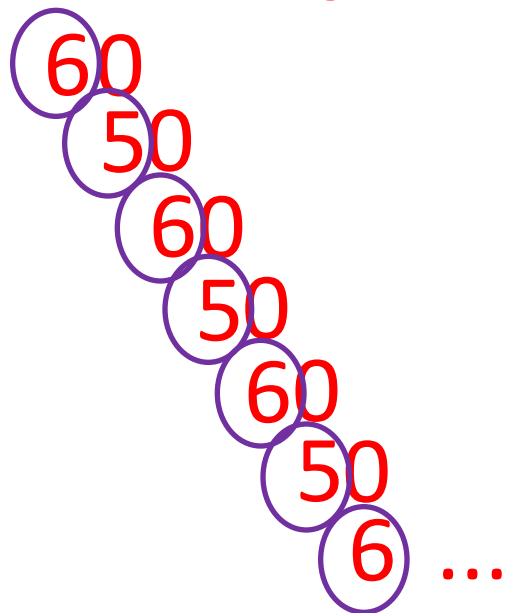


AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

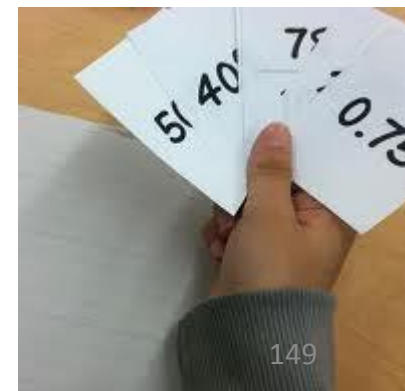
Diskusija:

Npr.

$$\frac{6}{11} = 6 : 11 = 0.545454 \dots$$



Ponavljaju se ostatak 6
pa ostatak 5 beskonačno
mnogo puta.



Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{5}{12}$	$5 : 12 = 0.41666\dots$ 50 20 80 80 80 ...	0.416666...
$\frac{23}{55}$	$23 : 55 = 0.41818\dots$ 230 100 450 100 450 ...	0.41818...
$\frac{16}{15}$	$16 : 15 = 1.06666\dots$ 100 100 100 100 ...	1.06666...

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{5}{3}$	$5 : 3 = 1.6666\dots$ <div> <div>20</div> <div>20</div> <div>20</div> <div>20 ...</div> </div>	1.6666...
$\frac{8}{15}$	$8 : 15 = 0.5333\dots$ <div> <div>80</div> <div>50</div> <div>50</div> <div>50 ...</div> </div>	0.5333...
$\frac{7}{11}$	$7 : 11 = 0.6363\dots$ <div> <div>70</div> <div>40</div> <div>70</div> <div>40 ...</div> </div>	0.6363...
$\frac{7}{6}$	$7 : 6 = 1.1666\dots$ <div> <div>10</div> <div>40</div> <div>40</div> <div>40 ...</div> </div>	1.1666...

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{4}{9}$	$4 : 9 = 0.4444\dots$ <div> <div>40</div> <div>40</div> <div>40</div> <div>40 ...</div> </div>	0.4444...
$\frac{8}{3}$	$8 : 3 = 2.6666\dots$ <div> <div>20</div> <div>20</div> <div>20</div> <div>20 ...</div> </div>	2.6666...
$\frac{13}{6}$	$13 : 6 = 2.16666\dots$ <div> <div>10</div> <div>40</div> <div>40</div> <div>40</div> <div>40 ...</div> </div>	2.16666...
$\frac{13}{15}$	$13 : 15 = 0.8666\dots$ <div> <div>130</div> <div>100</div> <div>100</div> <div>100 ...</div> </div>	0.8666...

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{41}{111}$	$41 : 111 = 0.369369\dots$ $\begin{array}{r} 410 \\ 770 \\ 1040 \\ 410 \\ 770 \\ 1040 \dots \end{array}$	$0.369369\dots$
$\frac{10}{33}$	$10 : 33 = 0.303030\dots$ $\begin{array}{r} 100 \\ 10 \\ 100 \\ 10 \\ 100 \\ 10 \dots \end{array}$	$0.303030\dots$
$\frac{8}{15}$	$8 : 15 = 0.5333\dots$ $\begin{array}{r} 80 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \dots \end{array}$	$0.5333\dots$

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{23}{111}$	$23 : 111 = 0.207...$ $\begin{array}{r} 230 \\ 80 \\ 800 \\ 230 \\ 80 \\ 800 \dots \end{array}$	$0.207207...$
$\frac{7}{12}$	$7 : 12 = 0.583333...$ $\begin{array}{r} 70 \\ 100 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \dots \end{array}$	$0.583333...$
$\frac{4}{15}$	$4 : 15 = 0.2666...$ $\begin{array}{r} 40 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \dots \end{array}$	$0.266666...$

Razlomak	Račun	Decimalni zapis
$\frac{15}{22}$	$15 : 22 = 0.68181...$ $\begin{array}{r} 150 \\ 180 \\ 40 \\ 180 \\ 40... \end{array}$	0.6818181...
$\frac{19}{24}$	$19 : 24 = 0.791666...$ $\begin{array}{r} 190 \\ 220 \\ 40 \\ 160 \\ 160 \\ 160... \end{array}$	0.791666...

Rezultat dijeljenja je beskonačni decimalni zapis, a ostaci pri dijeljenju se ponavljaju.



AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Diskusija:

Uočili smo da se kod brojeva iz treće skupine ostaci pri dijeljenju brojnika nazivnikom stalno ponavljaju te nikad ne dolazimo do ostatka 0. Kako izgledaju decimalni zapisi koje dobijemo pri takvom postupku dijeljenja?

U takvim decimalnim zapisima određena se znamenka ili skupina znamenki decimalnog dijela ponavljaju u beskonačnost.

Hoće li kod tih brojeva decimalni dio decimalnog zapisa daljnjim dijeljenjem postati konačan? Zašto?

Neće, jer dijeljenje nikad neće završiti zbog ponavljanja jednakih ostataka.

Kako biste nazvali decimalne zapise racionalnih brojeva koji imaju decimalni dio koji nije konačan?

Beskonačni decimalni zapisi.



AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Diskusija:

Kako biste, s obzirom na decimalne zapise koje ste dobili dijeljenjem brojnika nazivnikom, nazvali racionalne brojeve koje ste razvrstali u tri grupe?

U prvu grupu stavili smo racionalne brojeve kod kojih smo kao rezultat dijeljenja brojnika nazivnikom dobili cijele brojeve. ➡ Takvi racionalni brojevi su

CIJELI BROJEVI.

U drugu grupu stavili smo racionalne brojeve kod kojih smo kao rezultat dijeljenja brojnika nazivnikom dobili decimalne brojeve. ➡ Takvi

racionalni brojevi su **DECIMALNI BROJEVI.**

U treću grupu stavili smo racionalne brojeve kod kojih smo kao rezultat dijeljenja brojnika nazivnikom dobili beskonačne decimalne zapise. ➡ Takvi racionalni brojevi su brojevi s

BESKONAČNIM DECIMALNIM ZAPISOM.



PRVA GRUPA

$$\frac{16}{4}$$

$$\frac{6}{3}$$

$$\frac{0}{3}$$

$$\frac{18}{9}$$

$$\frac{75}{25}$$

$$\frac{25}{5}$$

DRUGA GRUPA

$$\frac{26}{50}$$

$$\frac{9}{5}$$

$$\frac{17}{2}$$

$$\frac{23}{2}$$

$$\frac{7}{20}$$

$$\frac{9}{40}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{19}{10}$$

RACIONALNI BROJEVI KOJI IMAJU BESKONAČAN DECIMALNI ZAPIS

$$\frac{7}{11}$$

$$\frac{41}{111}$$

$$\frac{23}{111}$$

$$\frac{5}{12}$$

$$\frac{19}{24}$$

$$\frac{13}{15}$$

$$\frac{6}{11}$$

$$\frac{23}{55}$$

$$\frac{4}{9}$$

$$\frac{11}{6}$$

$$\frac{10}{33}$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{7}{12}$$

$$\frac{16}{15}$$

$$\frac{8}{15}$$

$$\frac{4}{15}$$

$$\frac{7}{6}$$

$$\frac{13}{6}$$

$$\frac{15}{22}$$

$$\frac{5}{3}$$

AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Zaključak aktivnosti:

Pozitivan racionalni broj je ili cijeli broj ili decimalni broj ili ima beskonačan decimalni zapis.



AKTIVNOST : *Decimalni zapis racionalnih brojeva*

Diskusija:

Za pozitivan racionalni broj zaključili smo da je ili cijeli broj ili decimalni broj ili ima beskonačan decimalni zapis. Možete li utvrditi vrijedi li isti zaključak za broj 0 i za negativne racionalne brojeve?

Broj 0 je cijeli broj pa slijedi da zaključak vrijedi i za broj 0.

Za negativne racionalne brojeve analogno možemo provjeriti i zaključiti da vrijedi isti zaključak jer je postupak isti, uz negativni predznak količnika.

Npr.

$$\frac{-8}{4} = -2$$

$$\frac{-13}{8} = -1.625$$

$$\frac{-2}{15} = -0.1333333...$$

Negativan racionalni broj je ili negativan cijeli broj ili negativan decimalni broj ili ima beskonačan decimalni zapis.

Beskonačni decimalni zapisi na kalkulatoru!

Cilj aktivnosti: učenici će, pretvarajući razlomke u decimalne zapise pomoću kalkulatora, otkriti da koristeći kalkulator dobivamo približne vrijednosti broja s preciznošću na određeni broj decimala

Oblik rada: individualni rad, frontalni rad

Potrebni materijal: kalkulator za svakog učenika

Tijek aktivnosti:

- nastavnik na ploču ispiše nekoliko razlomaka koji imaju beskonačan decimalni zapis te daje učenicima zadatak da pomoću kalkulatora pretvore te razlomke u decimalne zapise
- učenici pomoću kalkulatora pretvaraju zadane razlomke u decimalne zapise te uočavaju (ne)pravilnosti



Beskonačni decimalni zapisi na kalkulatoru!

ZADATAK

Sljedeće razlomke pretvorite u decimalne zapise koristeći kalkulator: $\frac{5}{3}$, $\frac{16}{15}$, $\frac{25}{9}$.

RJEŠENJE

Ovisno o tome koliko znamenki prikazuju kalkulatori pomoću kojih učenici računaju, dobit ćemo različita rješenja:

a) Ako kalkulator prikazuje 10 znamenki, dobit ćemo sljedeće vrijednosti:

$$\frac{5}{3} = 1.666666667$$

$$\frac{25}{9} = 2.777777778$$

$$\frac{16}{15} = 1.066666667$$



Beskonačni decimalni zapisi na kalkulatoru!

RJEŠENJE

b) Ako kalkulator prikazuje 17 znamenki, dobit ćemo sljedeće vrijednosti:

$$\frac{5}{3} = 1.6666666666666667$$

$$\frac{25}{9} = 2.7777777777777778$$

$$\frac{16}{15} = 1.0666666666666667$$

c) Ako kalkulator prikazuje 22 znamenke, dobit ćemo sljedeće vrijednosti:

$$\frac{5}{3} = 1.6666666666666666666667$$

$$\frac{25}{9} = 2.7777777777777777777778$$

$$\frac{16}{15} = 1.0666666666666666666667$$



Beskonačni decimalni zapisi na kalkulatoru!

RJEŠENJE

$$\frac{5}{3} = 1.666666667$$

$$\frac{5}{3} = 1.6666666666666667$$

$$\frac{5}{3} = 1.666666666666666666666667$$

Ovo bi značilo da je

$$1.666666667 = 1.666666666666666667 \\ = 1.666666666666666666666667.$$

Je li to istinito?!

Naravno da nije!

Što primjećujete?

Kalkulator je na različitim mjestima zaokružio na 7.

Što je točnije/preciznije?

Precizniji je onaj kalkulator koji prikazuje više znamenaka.

Beskonačni decimalni zapisi na kalkulatoru!

RJEŠENJE

Provjerit ćemo točnost rezultata koje smo dobili računajući pomoću kalkulatora:

$$\frac{5}{3} = 5 : 3 = 1.666666...$$

\neq

$$\frac{5}{3} = 1.666666667$$

$$5 : 3 = 1.66666666 \dots$$

20

20

20

20

20

20

20

20

2 ...



Beskonačni decimalni zapisi na kalkulatoru!

RJEŠENJE

Provjerit ćemo točnost rezultata koje smo dobili računajući pomoću kalkulatora:

$$\boxed{\frac{25}{9} = 25 : 9 = 2.777777...} \neq \boxed{\frac{25}{9} = 2.7777777777777777777777777778}$$

$$25 : 9 = 2.77777777 \dots$$

70

70

70

70

70

70

70

70

7 ...



Beskonačni decimalni zapisi na kalkulatoru!

RJEŠENJE

Provjerit ćemo točnost rezultata koje smo dobili računajući pomoću kalkulatora:

$$\frac{16}{15} = 16 : 15 = 1.0666666...$$

\neq

$$\frac{16}{15} = 1.066666666666666667$$

$$16 : 15 = 1.0666666666 \dots$$

1

10

10

10

10

10

10

10

10 ...



Beskonačni decimalni zapisi na kalkulatoru!

Diskusija:

Kakve decimalne zapise imaju zadani razlomci?

Zadani razlomci imaju beskonačne decimalne zapise.

Kakve ste decimalne zapise zadanih razlomaka dobili računajući pomoću kalkulatora?

Dobili smo konačne decimalne zapise.

Zašto ste, računajući pomoću kalkulatora, dobili konačne decimalne zapise?

Kalkulator može prikazati samo konačan broj znamenaka pa je zadnju decimalu zaokružio.



Beskonačni decimalni zapisi na kalkulatoru!

Zaključak aktivnosti:

Ako razlomak koji ima beskonačan decimalni zapis pomoću kalkulatora pretvorimo u decimalni zapis, dobit ćemo približan konačan decimalni zapis s preciznošću na određeni broj decimala.



AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u skupinama, otkriti periodičnost beskonačnog decimalnog zapisa racionalnog broja

Oblik rada: suradničko-timski rad u četveročlanim timovima

Potrebni materijal: nastavni listići

Tijek aktivnosti:

- učenici ostaju u skupinama u kojima su bili u prethodnoj aktivnosti
- nastavnik im podijeli nastavne listiće na kojima se nalazi zadatak i pitanja koja potiču refleksivno mišljenje
- učenici u skupinama rješavaju zadatak i diskutiraju o dobivenim rješenjima



AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Zadatak.

Ispišite decimalne zapise brojeva koje ste u prethodnoj aktivnosti svrstali u treću grupu, odnosno nazvali ih beskonačnim decimalnim zapisima.

Promatrajte znamenke decimalnog dijela tih brojeva i uočite pravilnosti.

Pored svakog decimalnog zapisa ispišite sve znamenke koje se nalaze u njegovom decimalnom dijelu i zapišite koliko se puta koja znamenka pojavljuje u decimalnom dijelu tog zapisa.



AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Rješenje.

$1.\overset{\circ}{6}666\ldots \longrightarrow$ znamenka 6 je jedina znamenka u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, a pojavit će se beskonačno mnogo puta

$1.\overset{\circ}{0}\overset{\circ}{6}666\ldots \longrightarrow$ znamenke 0 i 6 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, 0 će se pojaviti jednom, a 6 beskonačno mnogo puta

$0.\overset{\circ}{6}\overset{\circ}{3}63\ldots \longrightarrow$ znamenke 6 i 3 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa i obje će se pojaviti beskonačno mnogo puta ponavljajući se u skupini znamenki **63**



AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Rješenje.

$1.\overline{83}33\dots$ \longrightarrow znamenke 8 i 3 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, 8 će se pojaviti jednom, a 3 beskonačno mnogo puta

$0.\overline{30}3030\dots$ \longrightarrow znamenke 3 i 0 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa i obje će se pojaviti beskonačno mnogo puta ponavljajući se u skupini znamenki **30**

$0.\overline{418}1818\dots$ \longrightarrow znamenke 4, 1 i 8 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, znamenka 4 će se pojaviti jednom, a znamenke 1 i 8 beskonačno mnogo puta ponavljajući se u skupini znamenki **18**



AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Rješenje.

$0.\overline{369}369369\dots \longrightarrow$ Znamenke 3, 6 i 9 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa i sve tri će se pojaviti beskonačno mnogo puta ponavljajući se kao niz znamenaka **369**.

$0.\overline{4}444\dots \longrightarrow$ Znamenka 4 je jedina znamenka koja se pojavljuje u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, a pojaviti će se beskonačno mnogo puta.

$0.\overline{86}666\dots \longrightarrow$ Znamenke 8 i 6 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa. Znamenka 8 će se pojaviti jednom, a znamenka 6 beskonačno mnogo puta.



AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Rješenje.

$0.\overline{53}333\dots \longrightarrow$ Znamenke 5 i 3 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, 5 će se pojaviti jednom, a 3 beskonačno mnogo puta.

$2.\overline{6}666\dots \longrightarrow$ Znamenka 6 je jedina znamenka koja se pojavljuje u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa, a pojaviti će se beskonačno mnogo puta.

$0.\overline{416}666\dots \longrightarrow$ Znamenke 4, 1 i 6 su znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu ovog decimalnog zapisa. Znamenke 4 i 1 će se pojaviti jednom, a znamenka 6 beskonačno mnogo puta.



AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Diskusija:

Jeste li uočili neke pravilnosti promatrajući decimalni dio ovih decimalnih zapisa? Koje?

Jesmo. U svakom od ovih zapisa postoje znamenke koje se ponavljaju beskonačno mnogo puta.

Kako se te znamenke u decimalnom dijelu ponavljaju?

Znamenke se ponavljaju u nedogled u nekom smislenom ravnomjernom redoslijedu, tj. ciklički se ponavljaju.

Ponavlja li se samo jedna znamenka u decimalnom zapisu tih brojeva?

Ne, negdje se ponavlja jedna znamenka, a negdje skupina znamenki uvijek istim redoslijedom znamenaka u skupini.

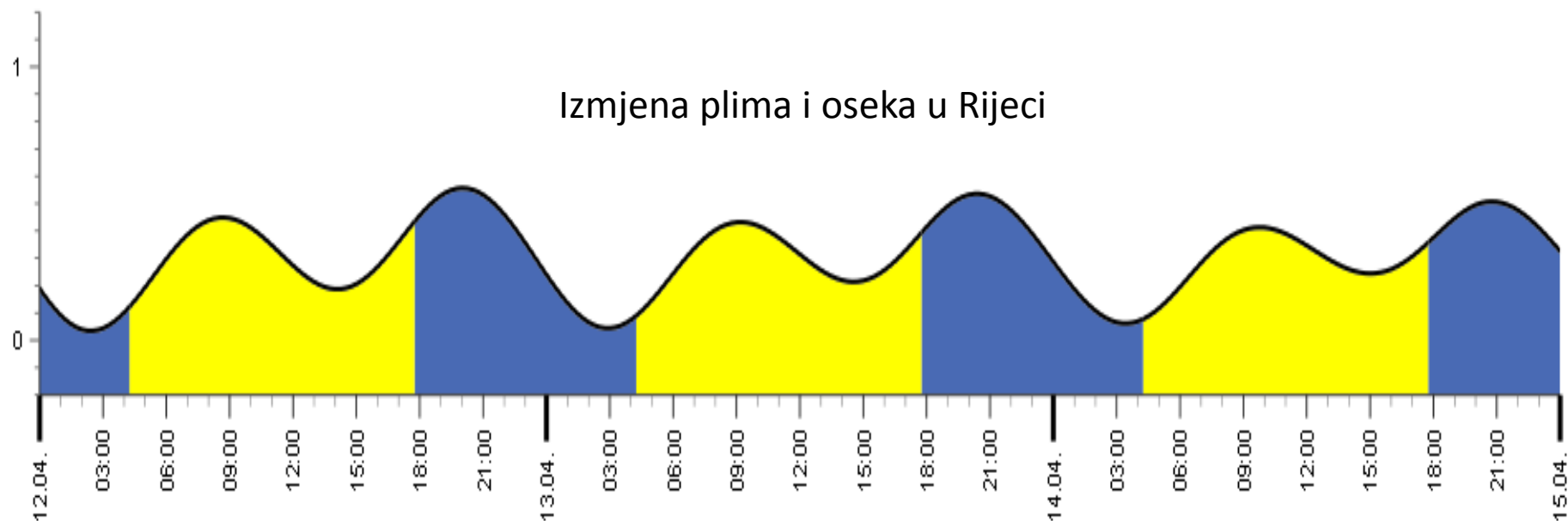
AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Diskusija:

Kako biste nazvali decimalne zapise koji imaju takav decimalni dio?



Izmjena plima i oseka u Rijeci



12.04.2013.

02:25 ↓
08:40 ↑
14:06 ↓
20:01 ↑

04:22 ☀️ ↑
17:45 ☀️ ↓
05:16 🌙 ↑
20:06 🌙 ↓

13.04.2013.

02:54 ↓
09:11 ↑
14:32 ↓
20:23 ↑

04:21 ☀️ ↑
17:46 ☀️ ↓
05:53 🌙 ↑
21:03 🌙 ↓

14.04.2013.

03:25 ↓
09:46 ↑
15:01 ↓
20:45 ↑

04:19 ☀️ ↑
17:47 ☀️ ↓
06:34 🌙 ↑
21:55 🌙 ↓

AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Diskusija:

Kako biste nazvali decimalne zapise koji imaju takav decimalni dio?

Nazvali bismo ih **periodičnim beskonačnim decimalnim** zapisima.

Kako biste nazvali dio (skup znamenki) decimalnog dijela koji se periodički ponavlja?

Nazvali bismo ga **period**.



AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Provjerimo za još neke razlomke (svaki učenik provjeri na nekom odabranom razlomku) ponavljaju li se znamenke ili skupine znamenki (istim redoslijedom) u decimalnim dijelovima njihovih beskonačnih decimalnih zapisa periodično!

$$\frac{17}{9} = 1.\textcircled{8}888888...$$

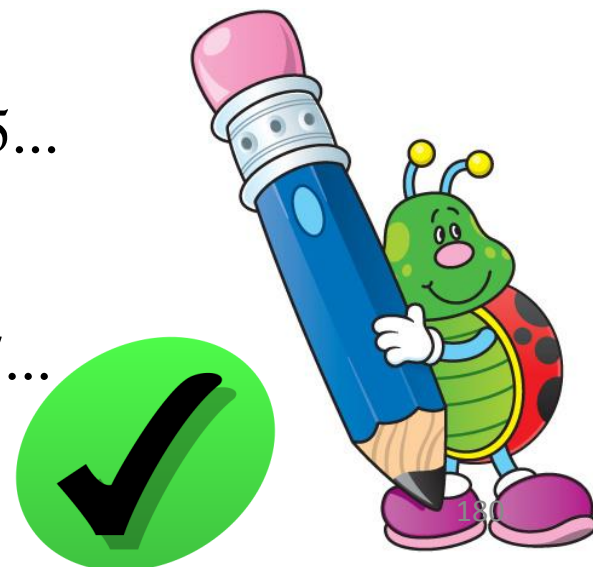
$$\frac{11}{12} = 0.91\textcircled{6}666666...$$

$$\frac{1}{6} = 0.1\textcircled{6}666666...$$

$$\frac{5}{27} = 0.\textcircled{185}185185...$$

$$\frac{27}{11} = 2.\textcircled{45}454545...$$

$$\frac{5}{22} = 0.2\textcircled{27}272727...$$



AKTIVNOST : *Beskonačni decimalni zapisi su periodični*

Zaključak aktivnosti:

Beskonačni decimalni
zapisi racionalnih
brojeva su periodični.



AKTIVNOST : *Čisti i mješoviti beskonačni periodični decimalni zapisi*

Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u skupinama, otkriti da beskonačne periodične decimalne zapise dijelimo na čiste i mješovite beskonačne periodične decimalne zapise

Oblik rada: suradničko-timski rad u četveročlanim timovima, frontalni rad

Potrebni materijal: kartice koje se nalaze na ploči svrstane u grupu pod nazivom “brojevi koji imaju beskonačni decimalni zapis”, selotejp



AKTIVNOST : *Čisti i mješoviti beskonačni periodični decimalni zapisi*

Tijek aktivnosti:

- učenici ostaju u timovima u kojima su već bili u prethodne dvije aktivnosti
- nastavnik daje učenicima zadatak da uoče svojstvo po kojem se brojevi koje su u prethodnoj aktivnosti svrstali u grupu pod nazivom “brojevi koji imaju beskonačni decimalni zapis” mogu razvrstati u dvije grupe uzimajući u obzir znamenke decimalnih dijelova njihovih decimalnih zapisa
- učenici izlaze na ploču i lijepe kartice na ploču ovisno o tome kako žele svrstati brojeve
- jedan tim razvrstava kartice, a drugi tim koji ima iste kartice ga kontrolira



**RACIONALNI BROJEVI KOJI
IMAJU BESKONAČAN
DECIMALNI ZAPIS**

$$\begin{array}{cc} \frac{5}{12} & \frac{23}{55} \\ \frac{7}{11} & \frac{16}{15} & \frac{10}{33} \\ \frac{11}{6} & \frac{5}{3} \end{array}$$

PRVA GRUPA

$$\frac{7}{11} \quad \frac{10}{33} \quad \frac{5}{3}$$

DRUGA GRUPA

$$\frac{5}{12} \quad \frac{23}{55} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{11}{6}$$

**RACIONALNI BROJEVI KOJI
IMAJU BESKONAČAN
DECIMALNI ZAPIS**

$$\begin{array}{cc} \frac{4}{9} & \frac{8}{3} \\ \frac{13}{6} & \frac{41}{111} & \frac{13}{15} \\ \frac{7}{6} & \frac{8}{15} \end{array}$$

PRVA GRUPA

$$\frac{4}{9} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{41}{111}$$

DRUGA GRUPA

$$\frac{13}{6} \quad \frac{13}{15} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{8}{15}$$

**RACIONALNI BROJEVI KOJI
IMAJU BESKONAČAN
DECIMALNI ZAPIS**

$$\begin{array}{cc} \frac{6}{11} & \frac{7}{12} \\ \frac{23}{111} & \frac{14}{3} & \frac{4}{15} \\ \frac{15}{22} & \frac{19}{24} \end{array}$$

PRVA GRUPA

$$\frac{6}{11} \quad \frac{23}{111} \quad \frac{14}{3}$$

DRUGA GRUPA

$$\frac{7}{12} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{15}{22} \quad \frac{19}{24}$$

AKTIVNOST : Čisti i mješoviti beskonačni periodični decimalni zapisi

Diskusija:

Na koji ste način razvrstali zadane brojeve u dvije grupe? Po kojem kriteriju?

Zadane brojeve razvrstali smo u dvije grupe s obzirom na znamenke koje se pojavljuju u decimalnom dijelu decimalnih zapisa tih brojeva te s obzirom na broj pojavljivanja tih znamenki u decimalnom dijelu decimalnih zapisa tih brojeva.

Kakve brojeve ste svrstali u prvu grupu?

U prvu grupu stavili smo brojeve kod kojih se svaka znamenka u decimalnom dijelu decimalnog zapisa pojavljuje beskonačno mnogo puta.



AKTIVNOST : Čisti i mješoviti beskonačni periodični decimalni zapisi

Diskusija:

Npr.

$$\frac{5}{3} = 1.666666... \longrightarrow \text{znamenka 6 se ponavlja beskonačno mnogo puta}$$

$$\frac{6}{11} = 0.54545454... \longrightarrow \text{skupina znamenki 5 i 4 se ciklički ponavlja beskonačno mnogo puta kao niz znamenki } \mathbf{54}$$

$$\frac{23}{111} = 0.207207207... \longrightarrow \text{skupina znamenki 2, 0 i 7 se ciklički ponavlja beskonačno mnogo puta kao niz znamenki } \mathbf{207}$$



AKTIVNOST : Čisti i mješoviti beskonačni periodični decimalni zapisi

Diskusija:

Kakve brojeve ste svrstali u drugu grupu?

U drugu grupu stavili smo brojeve kod kojih decimalni dio decimalnog zapisa osim znamenaka koje se ponavljaju beskonačno mnogo puta sadrži i neke znamenke koje se pojavljuju samo konačno mnogo puta.

Gdje se nalaze takve znamenke?

Takve se znamenke nalaze odmah iza decimalne točke, ispred perioda.

Kako biste nazvali takve znamenke ili niz znamenki?

Nazvali bi ih **pretperiod**.



AKTIVNOST : Čisti i mješoviti beskonačni periodični decimalni zapisi

Diskusija:

Npr.

$$\frac{11}{6} = 1.833333... \longrightarrow \text{znamenka 8 se pojavljuje jednom a znamenka 3 se ponavlja beskonačno mnogo puta}$$

$$\frac{7}{12} = 0.58333333... \longrightarrow \text{znamenke 5 i 8 se pojavljuju jednom, a znamenka 3 se ponavlja beskonačno mnogo puta}$$

$$\frac{19}{24} = 0.7916666666... \longrightarrow \text{znamenke 7, 9 i 1 se pojavljuju jednom, a znamenka 6 se ponavlja beskonačno mnogo puta}$$



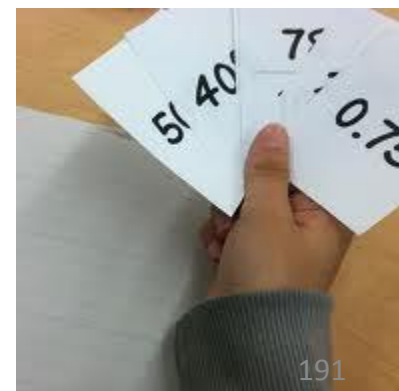
AKTIVNOST : Čisti i mješoviti beskonačni periodični decimalni zapisi

Diskusija:

Uočimo!!!

0.6266666...

Iako se znamenka 6 ponavlja beskonačno mnogo puta, niz znamenki **62** u pretperiodu se pojavljuje samo jednom, odnosno konačno mnogo puta.



AKTIVNOST : Čisti i mješoviti beskonačni periodični decimalni zapisi

Diskusija:

Kako biste nazvali decimalne zapise koji u svom decimalnom dijelu imaju znamenke koje se ponavljaju periodički beskonačno mnogo puta i znamenke koje se ne ponavljaju?

Složeni, pomiješani, mješoviti periodični beskonačni decimalni zapisi.

Kako biste nazvali brojeve koji u svom decimalnom dijelu nemaju znamenke koje se **ne** ponavljaju nego samo znamenke koje se ponavljaju periodički beskonačno mnogo puta?

Jednostavni, nemješoviti, čisto periodični beskonačni decimalni zapisi.

ČISTO
PERIODIČNI
PRVA
BESKONAČNI
GRUPA
DECIMALNI
ZAPISI

$\frac{6}{11}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{41}{111}$
	$\frac{23}{111}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{3}$

MJEŠOVITI
PERIODIČNI
BESKONAČNI
GRUPA
DECIMALNI
ZAPISI

$\frac{15}{22}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{8}{15}$
$\frac{13}{15}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{23}{55}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{11}{6}$

AKTIVNOST : Čisti i mješoviti beskonačni periodični decimalni zapisi

Zaključak aktivnosti:

Beskonačne decimalne zapise
čisto periodične i mješovito periodične
decimalne zapise nazivamo periodične.
Čisto periodični beskonačni decimalni
decimalni zapisi su oni zapisi kod kojih se
nakon nekog prvog znamenaka u
znamenaka ili skupina znamenaka
decimalnom dijelu jedna znamenka ili
ponavljaju odmah poslije decimalne
skupina znamenaka počinju periodički
točke
ponavljati.



Kako ćemo zapisati
beskonačni periodični
decimalni zapis?



40 ...

Beskonačni decimalni zapis mogli bismo zapisati kao $\frac{7}{11} = 0.63$ ako bismo na neki način označili da se znamenke 6 i 3, kao skupina **63**, pojavljuju periodički beskonačno mnogo puta.

To ćemo učiniti tako što ćemo iznad svake znamenke koja se pojavljuje na takav način staviti dogovoreni znak.

$$\frac{7}{11} = 0.\overline{63}$$



$$0.\overline{6}$$



$$2.435\overline{27}$$

$$0.\overline{4125}$$



Možemo i ovako:

$$0.\dot{6}$$

$$0.\ddot{6}\ddot{3}$$

$$2.435\dot{2}\dot{7}$$

$$0.\dot{4}\dot{1}\dot{2}\dot{5}$$



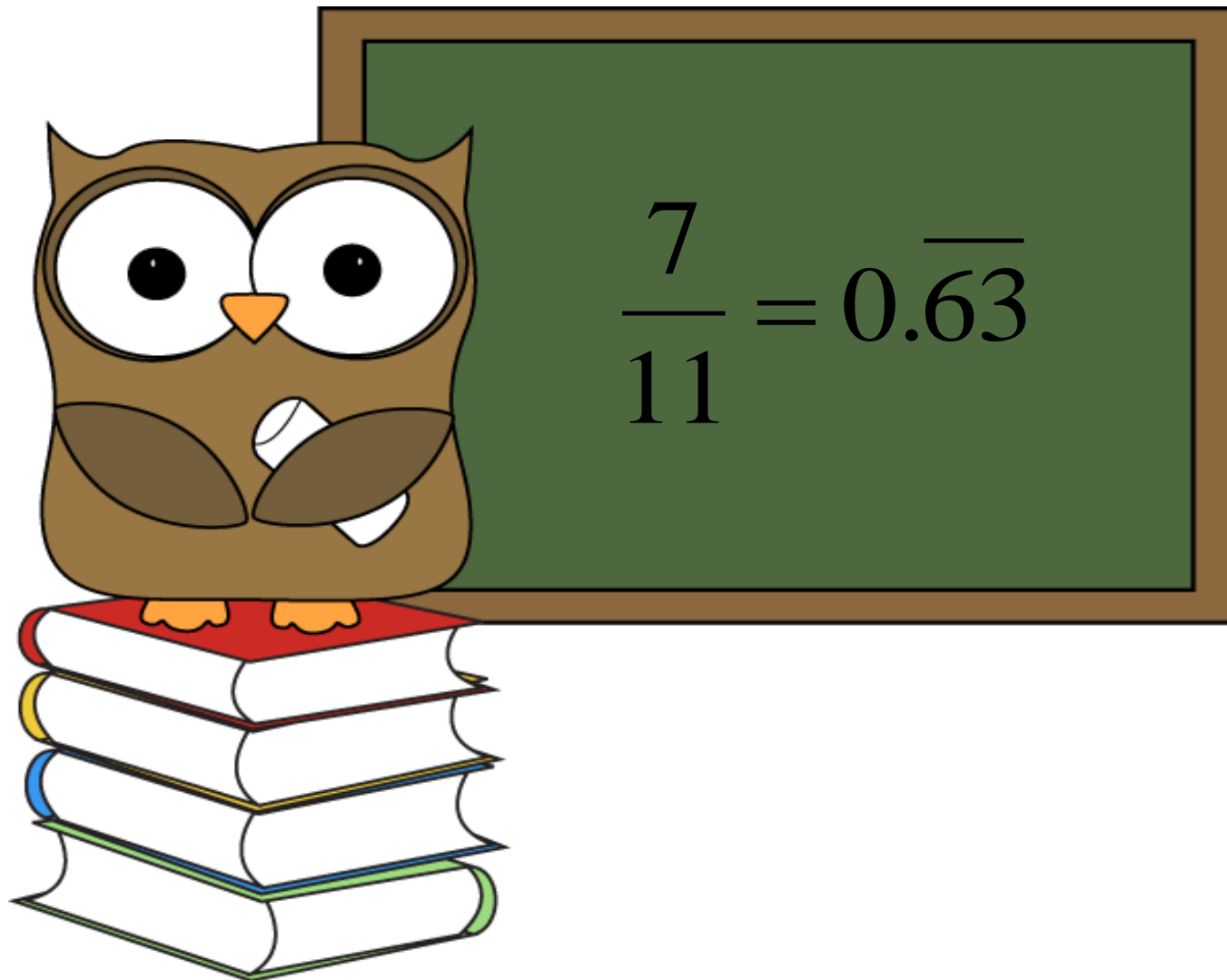
Ali ovako NE zapisujemo

$$0.\dot{\dot{\dot{\dot{4}}}}\dot{\dot{\dot{\dot{1}}}}\dot{\dot{\dot{\dot{2}}}}\dot{\dot{\dot{\dot{5}}}}$$

$$2.\dot{\dot{\dot{\dot{4}}}}\dot{\dot{\dot{\dot{3}}}}\dot{\dot{\dot{\dot{5}}}}\dot{\dot{\dot{\dot{2}}}}\dot{\dot{\dot{\dot{7}}}}$$



Iz praktičnih razloga, beskončne periodične zapise na ploči zapisujemo ovako:



AKTIVNOST : *Izračunajmo!*

Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u paru, ponoviti pojmove beskonačnog periodičnog decimalnog zapisa i pravilnosti vezane uz njih

Oblik rada: suradnički rad u paru

Potrebni materijal: nastavni listići



Tijek aktivnosti:

- nastavnik podijeli učenicima nastavne listiće
- učenici u paru rješavaju zadatke s nastavnih listića

AKTIVNOST : *Izračunajmo!*

ZADATAK. Odredi 100. decimalu u decimalnom zapisu razlomaka: $\frac{5}{3}, \frac{1}{11}, \frac{72}{55}$.

RJEŠENJE:

Učenici prvo svaki razlomak prikazuju u decimalnom obliku:

$$\frac{5}{3} = 5 : 3 = 1.66\ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{3} = 1.\overline{6}$$

$\begin{matrix} 20 \\ 20 \\ 2 \end{matrix} \dots$

Ponavlja se samo jedna znamenka, znamenka 6.

Kako je svaka decimala broj 6, učenici lako zaključuju da je 100. decimala također znamenka 6.



AKTIVNOST : *Izračunajmo!*

$$\frac{1}{11} = 1:11 = 0.0909... \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{11} = 0.\overline{09}$$

$\begin{matrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \\ 10000 \\ 1 \dots \end{matrix}$

Ponavljaju se znamenke 0 i 9, tj. svaka od njih ponavlja se istim redoslijedom.

Popunite tablicu:

Cijeli dio	.	Decimalni dio											
		1.decimala	2.decimala	3.decimala	4.decimala	5.decimala	6.decimala	7.decimala	8.decimala	9.decimala	10.decimala	11.decimala	12.decimala
0	.	0	9	0	9	0	9	0	9	0	9	0	9

AKTIVNOST : *Izračunajmo!*

Jeste li uočili neku pravilost?

Na kojim se decimalnim mjestima nalazi znamenka 0?

Na neparnim decimalnim mjestima.

Na kojim se decimalnim mjestima nalazi znamenka 9?

Na parnim decimalnim mjestima.

Koja je 100. decimala?

Znamenka 9 je 100. decimala jer je redni broj 100. decimale, 100, paran broj.

Povežimo to s dijeljenjem!

AKTIVNOST : *Izračunajmo!*

$$\frac{1}{11} = 0.\overline{09}$$

Iz decimalnog zapisa vidimo da period čine znamenke 0 i 9, odnosno duljina perioda je 2.

Podijelimo 100 duljinom perioda, tj. s 2:

$$100 : 2 = 50 \quad \Rightarrow \quad \text{100. znamenka je znamenka 9 jer je}$$

ostatak pri dijeljenju 0!



AKTIVNOST : *Izračunajmo!*

$$\frac{72}{55} = 72 : 55 = 1.30909... = 1.\overline{309}$$

$\begin{array}{r} 170 \\ 50 \\ 500 \\ 500 \\ 500 \\ 5 \dots \end{array}$

Iz decimalnog zapisa vidimo da period čine znamenke 0 i 9, odnosno duljina perioda je 2.

Također vidimo da postoji pretperiod koji čini znamenka 3, odnosno duljina pretperioda je 1.

Popunite tablicu:

Cijeli dio	.	Decimalni dio											
		1.decimala	2.decimala	3.decimala	4.decimala	5.decimala	6.decimala	7.decimala	8.decimala	9.decimala	10.decimala	11.decimala	12.decimala
1	.	3	0	9	0	9	0	9	0	9	0	9	0

AKTIVNOST : *Izračunajmo!*

Jeste li uočili neku pravilost?

Koja se znamenka nalazi na prvoj decimali?

Na prvoj decimali se nalazi pretperiod, odnosno znamenka 3.

Na kojim se decimalnim mjestima nalazi znamenka 0?

Na parnim decimalnim mjestima.

Na kojim se decimalnim mjestima nalazi znamenka 9?

Na neparnim decimalnim mjestima.

Koja je 100. decimala?

Stota decimala je znamenka 0 jer je redni broj 100. decimale, 100, paran broj.

Povežimo to sa dijeljenjem!

AKTIVNOST : *Izračunajmo!*

$$\frac{72}{55} = 1.3\overline{09}$$

Zanima nas koja je 100. decimala, 0 ili 9?

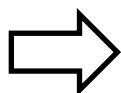
Od 100 decimala, promatramo 99, i to od 2. do 100. jer je prva decimala pretperiod 3.

$$100 - 1 = 99.$$

Podijelimo broj 99 duljinom perioda:

$$99 : 2 = 49 \text{ i ostatak } 1$$

Ostatak pri dijeljenju nam govori koji je broj na 100. decimali.



100. znamenka je znamenka 0 jer je
ostatak pri dijeljenju 1!

AKTIVNOST : *Izračunajmo!*

ZADATAK. Odredi 2574. decimalu u decimalnom zapisu razlomka $\frac{23}{14}$.

Rješenje:

$$\frac{23}{14} = 23 : 14 = 1.6428571 \dots \quad \Rightarrow \quad \frac{23}{14} = 1.\overline{6428571}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ 60 \\ 40 \\ 120 \\ 80 \\ 100 \\ 20 \\ 6 \dots \end{array}$$

Iz decimalnog zapisa vidimo da period čine redom znamenke 4, 2, 8, 5, 7, 1, odnosno duljina perioda je 6. Također vidimo da postoji pretperiod koji čini znamenka 6, odnosno duljina pretperioda je 1.

Znamo: 1. decimala je znamenka 6.

Podijelimo broj sljedećih 2573 decimala duljinom perioda: $2573 : 6 = 428$ i ostatak 5.

\Rightarrow 2574. znamenka je znamenka 7 jer je ostatak pri dijeljenju 5.

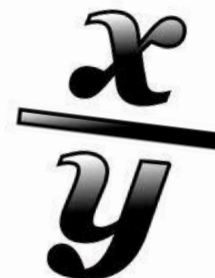


AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u skupinama i dijeljenjem brojnika nazivnikom, otkriti da tip decimalnog zapisa potpuno skraćenog razlomka ovisi o prostim faktorima njegovog nazivnika.

Oblik rada: suradnički rad u četveročlanim skupinama

Potrebni materijal: nastavni listić



Tijek aktivnosti:

- nastavnik svakoj skupini učenika podijeli nastavni listić na kojem je tablica sa zadacima koje učenici moraju riješiti
- nakon što svaka skupina riješi zadatke, slijedi diskusija u kojoj nastavnik i učenici komentiraju dobivena rješenja

NASTAVNI LISTIĆ (1):

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{5}{8}$				
$\frac{5}{3}$				
$\frac{16}{15}$				
$\frac{3}{2}$				
$\frac{7}{11}$				
$\frac{11}{6}$				

NASTAVNI LISTIĆ (2):

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{2}{5}$				
$\frac{12}{13}$				
$\frac{23}{55}$				
$\frac{7}{20}$				
$\frac{15}{14}$				
$\frac{10}{33}$				

NASTAVNI LISTIĆ (3):

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{33}{50}$				
$\frac{21}{125}$				
$\frac{202}{999}$				
$\frac{7}{30}$				
$\frac{25}{22}$				
$\frac{55}{7}$				

Rješenje (1):

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{5}{8}$	5	2	0.625	konačan
$\frac{5}{3}$	5	3	$1.\overline{6}$	čisto periodičan
$\frac{16}{15}$	2	3,5	$1.0\overline{6}$	mješovito periodičan
$\frac{3}{2}$	3	2	1.5	konačan
$\frac{7}{11}$	7	11	$1.\overline{63}$	čisto periodičan
$\frac{11}{6}$	11	2,3	$1.8\overline{3}$	mješovito periodičan

Rješenje (2):

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{2}{5}$	2	5	0.4	konačan
$\frac{12}{13}$	2,3	13	0. $\overline{923076}$	čisto periodičan
$\frac{23}{55}$	23	5,11	0.4 $\overline{18}$	mješovito periodičan
$\frac{7}{20}$	7	2,5	0.35	konačan
$\frac{15}{14}$	3,5	2,7	1.071428 $\overline{5}$	mješovito periodičan
$\frac{10}{33}$	2,5	3,11	0.3 $\overline{0}$	čisto periodičan

Rješenje (3):

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{33}{50}$	3,11	2,5	0.66	konačan
$\frac{21}{125}$	3,7	5	0.168	konačan
$\frac{202}{999}$	2,101	3,37	$0.\overline{04}$	čisto periodičan
$\frac{7}{30}$	7	2,3,5	$0.2\overline{3}$	mješovito periodičan
$\frac{25}{22}$	5	2,11	$1.1\overline{36}$	mješovito periodičan
$\frac{55}{7}$	5,11	7	$7.\overline{857142}$	čisto periodičan

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Diskusija:

Jeste li uočili neku pravilnost?

Što možete reći o prostim faktorima brojnika i prostim faktorima nazivnika razlomaka?

Koji od danih razlomaka imaju konačan decimalni zapis?

Učenici: Razlomci kojima su prosti faktori nazivnika samo 2 i/ili 5 imaju konačan decimalni zapis.

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{33}{50}$	33	2,5	0.66	konačan
$\frac{21}{125}$	3,7	5	0.168	konačan
$\frac{2}{5}$	2	5	0.4	konačan
$\frac{7}{20}$	7	2,5	0.35	konačan
$\frac{5}{8}$	5	2	0.625	konačan
$\frac{3}{2}$	3	2	1.5	konačan

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Diskusija:

Kakvi razlomci imaju čisto periodičan decimalni zapis?

Učenici: Razlomci kojima su prosti faktori nazivnika bilo koji prosti faktori, različiti od 2 i 5, imaju čisto periodičan decimalni zapis.

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{5}{3}$	5	3	$1.\overline{6}$	čisto periodičan
$\frac{7}{11}$	7	11	$1.\overline{63}$	čisto periodičan
$\frac{12}{13}$	2,3	13	$1.\overline{923076}$	čisto periodičan
$\frac{10}{33}$	2,5	3,11	$0.\overline{30}$	čisto periodičan
$\frac{202}{999}$	2,101	3,37	$1.\overline{202}$	čisto periodičan
$\frac{55}{7}$	5,11	7	$0.\overline{925}$	čisto periodičan

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Diskusija:

Kakvi razlomci imaju mješovito periodičan decimalni zapis?

Učenici: Razlomci kojima su prosti faktori nazivnika 2 i/ili 5 i još neki drugi prosti brojevi imaju mješovito periodičan decimalni zapis.

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{16}{15}$	2	3,5	$1.0\overline{6}$	mješovito periodičan
$\frac{11}{6}$	11	2,3	$1.8\overline{3}$	mješovito periodičan
$\frac{23}{55}$	23	5,11	$0.4\overline{18}$	mješovito periodičan
$\frac{15}{14}$	3,5	2,7	$1.0\overline{714285}$	mješovito periodičan
$\frac{7}{30}$	7	2,3,5	$0.2\overline{3}$	mješovito periodičan
$\frac{25}{22}$	5	2,11	$1.1\overline{36}$	mješovito periodičan

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Diskusija:

Provjerimo za još za neke razlomke!

Na primjer: $\frac{45}{12}, \frac{20}{15}, \frac{21}{35}$.

Ispunimo tablicu:

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{45}{12}$	3,5	2,3	3.75	konačan
$\frac{20}{15}$	2,5	3,5	$1.\bar{3}$	čisto periodičan
$\frac{21}{35}$	3,7	5,7	0.6	konačan

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Diskusija:

Što ste uočili?

Učenici: Razlomci $\frac{45}{12}$ i $\frac{21}{35}$ imaju konačne decimalne zapise, no prosti faktori njihovih nazivnika govore da ti razlomci imaju mješovito periodični decimalni zapis.

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{45}{12}$	3, 5	2, 3	3.75	Konačan
$\frac{21}{35}$	3, 7	5, 7	0.6	Konačan



AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalan zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{45}{12}$	3,5	2,3	3.75	konačan

$$\frac{45}{12} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

Možemo li u rastavu nazivnika razlomka $\frac{45}{12}$ dobiti samo faktore 2?

Učenici: Možemo! Skraćivanjem brojnika i nazivnika brojem 3!

Možemo li razlomak skratiti još kojim brojem?

Učenici: Ne. Razlomak $\frac{15}{4}$ je potpuno skraćen.

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalan zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{21}{35}$	3,7	5,7	0.6	konačan

$$\frac{21}{35} = \frac{3 \cancel{7}}{5 \cancel{7}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Možemo li u rastavu nazivnika razlomka $\frac{21}{35}$ dobiti samo faktor 5?

Učenici: Možemo! Skraćivanjem brojnika i nazivnika brojem 7!

Možemo li razlomak skratiti još kojim brojem?


Učenici: Ne. Razlomak $\frac{3}{5}$ je potpuno skraćen.

AKTIVNOST : Nazivnik je glavni krivac!



Promotrimo razlomak $\frac{20}{15}$. Što primjećujete?

Učenici: Prosti faktori nazivnika su 3 i 5, što znači da taj razlomak ima mješovito periodičan decimalni zapis, no dijeljenjem smo utvrdili da zapravo ima čisto periodičan decimalni zapis.

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
 $\frac{45}{12}$	3,5	2,3	3.75	konačan
$\frac{20}{15}$	2,5	3,5	$1.\bar{3}$	čisto periodičan
 $\frac{21}{35}$	3,7	5,7	0.6	konačan

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalan zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{20}{15}$	2,5	3,5	$1.\bar{3}$	čisto periodičan

$$\frac{20}{15} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3} = 1.\bar{3}$$

Možemo li u rastavu nazivnika razlomka $\frac{20}{15}$ dobiti samo faktor 3?

Učenici: Možemo! Skraćivanjem brojnika i nazivnika brojem 5!

Možemo li razlomak skratiti još kojim brojem?

Učenici: Ne. Razlomak $\frac{4}{3}$ je potpuno skraćen.

AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Diskusija:

ZAKLJUČAK: Tip decimalnog zapisa potpuno skraćenog razlomka ovisi o prostim faktorima njegovog nazivnika.

Prisjetimo se početne aktivnosti i razlomaka kojima smo određivali decimalne zapise!



Rješenje nastavnog listića (1):

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{5}{8}$	5	2	0.625	konačan
$\frac{5}{3}$	5	3	$1.\overline{6}$	čisto periodičan
$\frac{16}{15}$	2	3,5	$1.0\overline{6}$	mješovito periodičan
$\frac{3}{2}$	3	2	1.5	konačan
$\frac{7}{11}$	7	11	$1.\overline{63}$	čisto periodičan
$\frac{11}{6}$	11	2,3	$1.8\overline{3}$	mješovito periodičan

POTPUNO SKRAĆENI RAZLOMCI!



Rješenje nastavnog listića (2):

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{2}{5}$	2	5	0.4	konačan
$\frac{12}{13}$	2,3	13	0. $\overline{923076}$	čisto periodičan
$\frac{23}{55}$	23	5,11	0.4 $\overline{18}$	mješovito periodičan
$\frac{7}{20}$	7	2,5	0.35	konačan
$\frac{15}{14}$	3,5	2,7	1.0714285	mješovito periodičan
$\frac{10}{33}$	2,5	3,11	0.3 $\overline{0}$	čisto periodičan

POTPUNO SKRAĆENI RAZLOMCI!



Rješenje nastavnog listića (3):

Razlomak	Prosti faktori brojnika	Prosti faktori nazivnika	Decimalni zapis	Tip decimalnog zapisa
$\frac{33}{50}$	3,11	2,5	0.66	Konačan
$\frac{21}{125}$	3,7	5	0.168	Konačan
$\frac{202}{999}$	2,101	3,37	$0.0\overline{4}$	čisto periodičan
$\frac{7}{30}$	7	2,3,5	$0.2\overline{3}$	mješovito periodičan
$\frac{25}{22}$	5	2,11	$1.1\overline{36}$	mješovito periodičan
$\frac{55}{7}$	5,11	7	$7.\overline{857142}$	čisto periodičan

POTPUNO SKRAĆENI RAZLOMCI!



AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Iskažite kriterij po kojemu razlomak ima konačan decimalni zapis!

Učenici: Ako nazivnik do kraja skraćenog razlomka u svom rastavu na proste faktore sadrži samo brojeve 2 i/ili 5, onda taj razlomak ima konačan decimalni zapis.



AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Iskažite kriterij po kojemu razlomak ima čisto periodični decimalni zapis!

Učenici: Ako nazivnik do kraja skraćenog razlomka u svom rastavu na proste faktore ne sadrži faktor 2 ni faktor 5, onda taj razlomak ima čisto periodični decimalni zapis.



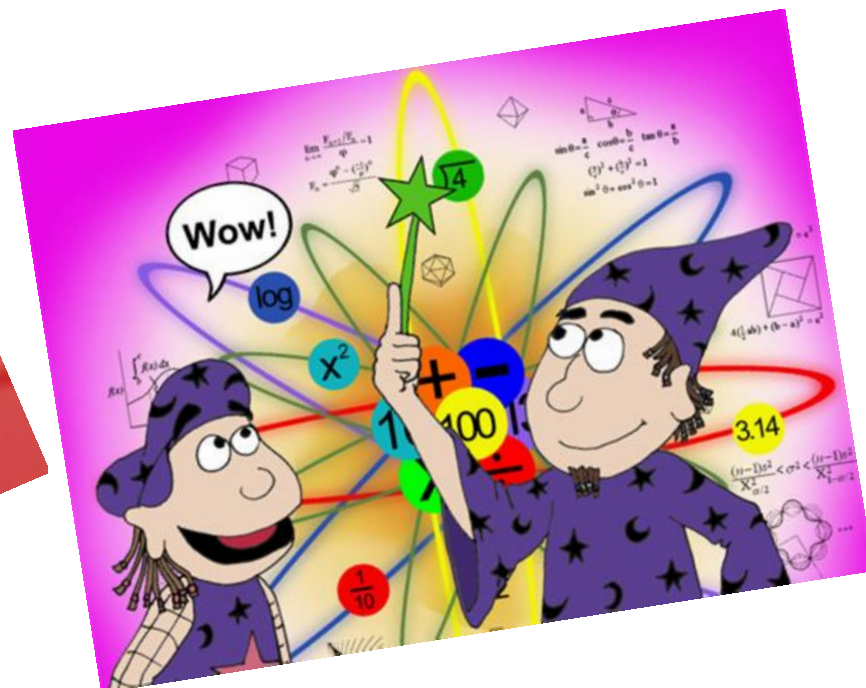
AKTIVNOST : *Nazivnik je glavni krivac!*

Iskažite kriterij po kojemu razlomak ima mješoviti periodični decimalni zapis!

Učenici: Ako nazivnik do kraja skraćenog razlomka u rastavu na proste faktore sadrži 2 i/ili 5 i još neke druge proste faktore, onda taj razlomak ima mješovito periodični decimalni zapis.



Provjerimo što smo naučili!



AKTIVNOST : *Ponovimo!*

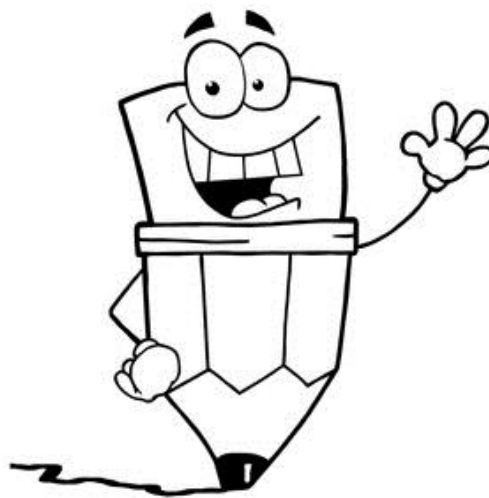
Cilj aktivnosti: učenici će, radeći u paru, uvježbati kriterije pomoću kojih određuju kakav je zapis racionalnih brojeva u decimalnom obliku

Oblik rada: suradnički rad u paru

Potreban materijal: nastavni listić

Tijek aktivnosti:

- nastavnik podijeli učenicima nastavne listiće
- učenici u paru rješavaju zadane zadatke na nastavnom listiću, određuju bez računa kakav je decimalni zapis racionalnog broja te odgovaraju na pitanja koja potiču refleksivno mišljenje



Razlomci	Tip decimalnog zapisa	Zašto?
$\frac{43}{5}$		
$1\frac{8}{15}$		
$\frac{23}{2}$		
$\frac{8}{11}$		
$2\frac{1}{3}$		

Razlomci	Tip decimalnog zapisa	Zašto?
$\frac{56}{11}$		
$4\frac{1}{2}$		
$\frac{75}{5}$		
$\frac{17}{18}$		
$\frac{126}{100}$		

Razlomci	Tip decimalnog zapisa	Zašto?
$\frac{43}{5}$	konačan decimalni zapis	njegov nazivnik sadrži samo faktor 5
$4\frac{8}{15}$	mješovit periodički decimalni zapis	nazivnik rastavljen na proste faktore ima faktore 3 i 5
$\frac{23}{2}$	konačan decimalni zapis	njegov nazivnik sadrži samo faktor 2
$\frac{8}{11}$	čisto periodički decimalni zapis	njegov nazivnik ne sadrži ni faktor 2 ni 5
$2\frac{13}{3}$	čisto periodički decimalni zapis	njegov nazivnik ne sadrži ni faktor 2 ni 5

Razlomci	Tip decimalnog zapisa	Zašto?
$\frac{56}{11}$	čisto periodički decimalni zapis	njegov nazivnik ne sadrži ni faktor 2 ni 5
$6\frac{7}{2}$	konačan decimalni zapis	njegov nazivnik sadrži samo faktor 2
$\frac{75}{5}$	cijeli broj	njegov nazivnik sadrži samo faktor 5
$\frac{17}{18}$	mješoviti periodički decimalni zapis	nazivnik rastavljen na proste faktore ima faktore 3 i 2 ($18=3 \cdot 3 \cdot 2$)
$\frac{126}{100}$	konačni decimalni zapis	njegov nazivnik sadrži samo faktore 2 i 5 ($10=2 \cdot 5$)

4.4. IRACIONALNI BROJEVI

І К У С І О Л І А Н Г І А І

242

Ponovimo!



Kako možemo prikazati svaki racionalan broj?

Svaki racionalan broj možemo prikazati u obliku decimalnog zapisa.

Kakav sve decimalni zapis može imati racionalan broj?

Decimalni zapis racionalnog broja može biti konačan ili beskonačan.

Kakav beskonačan decimalni zapis može imati neki racionalan broj?

Neki racionalan broj može imati čisto periodički ili mješovito periodički decimalni zapis.

Ponovimo!



Napišite tri racionalna broja koja imaju konačan decimalni zapis.

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

Napišite tri racionalna broja koja imaju beskonačan čisto periodički decimalni zapis.

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

$$\frac{7}{11} = 0.\overline{63}$$

$$\frac{10}{33} = 0.\overline{30}$$

Napišite tri racionalna broja koja imaju beskonačan mješovito periodički decimalni zapis.

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

$$\frac{2}{15} = 0.1\overline{3}$$

$$\frac{3}{55} = 0.0\overline{54}$$

AKTIVNOST : *Iracionalni brojevi!*

Cilj aktivnosti: učenici će, zapisujući vlastite primjere neperiodičnih beskonačnih decimalnih zapisa, otkriti pojam iracionalnih brojeva

Oblik rada: individualni rad, frontalni rad

Potreban materijal: olovka, bilježnica

Tijek aktivnosti:

- nastavnik zadaje učenicima zadatak da svaki od njih napiše jedan beskonačan NEperiodičan decimalni zapis
- učenici smišljaju i zapisuju takve decimalne zapise te diskutiraju o njima međusobno i s nastavnikom



AKTIVNOST : *Iracionalni brojevi!*

ZADATAK: Napišite barem tri decimalna zapisa koji imaju beskonačno mnogo decimala koje se NE ponavljaju periodično. Objasnite na koji način ste dobili takav zapis i zašto on zadovoljava zadane uvjete.

RJEŠENJE:

0.1234567891011121314151617...



Znamenke decimalnog dijela ovog decimalnog zapisa su redom zapisani uzastopni prirodni brojevi. Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo i svi su međusobno različiti pa je ovaj decimalni zapis beskonačan **neperiodičan**.

AKTIVNOST : *Iracionalni brojevi!*

1.102030405060708090100110120130...



Znamenke decimalnog dijela ovog decimalnog zapisa su redom zapisani uzastopni prirodni brojevi, ali na način da smo između svaka dva uzastopna prirodna broja zapisali nulu. Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo i svi su međusobno različiti pa je ovaj decimalni zapis beskonačan **neperiodičan**.

AKTIVNOST : *Iracionalni brojevi!*

0.24681012141618202224...



Znamenke decimalnog dijela ovog decimalnog zapisa su redom zapisani uzastopni parni prirodni brojevi. Parnih prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo i svi su međusobno različiti pa je ovaj decimalni zapis beskonačan **neperiodičan**.

AKTIVNOST : *Iracionalni brojevi!*

3.1357911131517192123...



Znamenke decimalnog dijela ovog decimalnog zapisa su redom zapisani uzastopni neparni prirodni brojevi.

Neparnih prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo i svi su međusobno različiti pa je ovaj decimalni zapis beskonačan **n**eperiodičan.

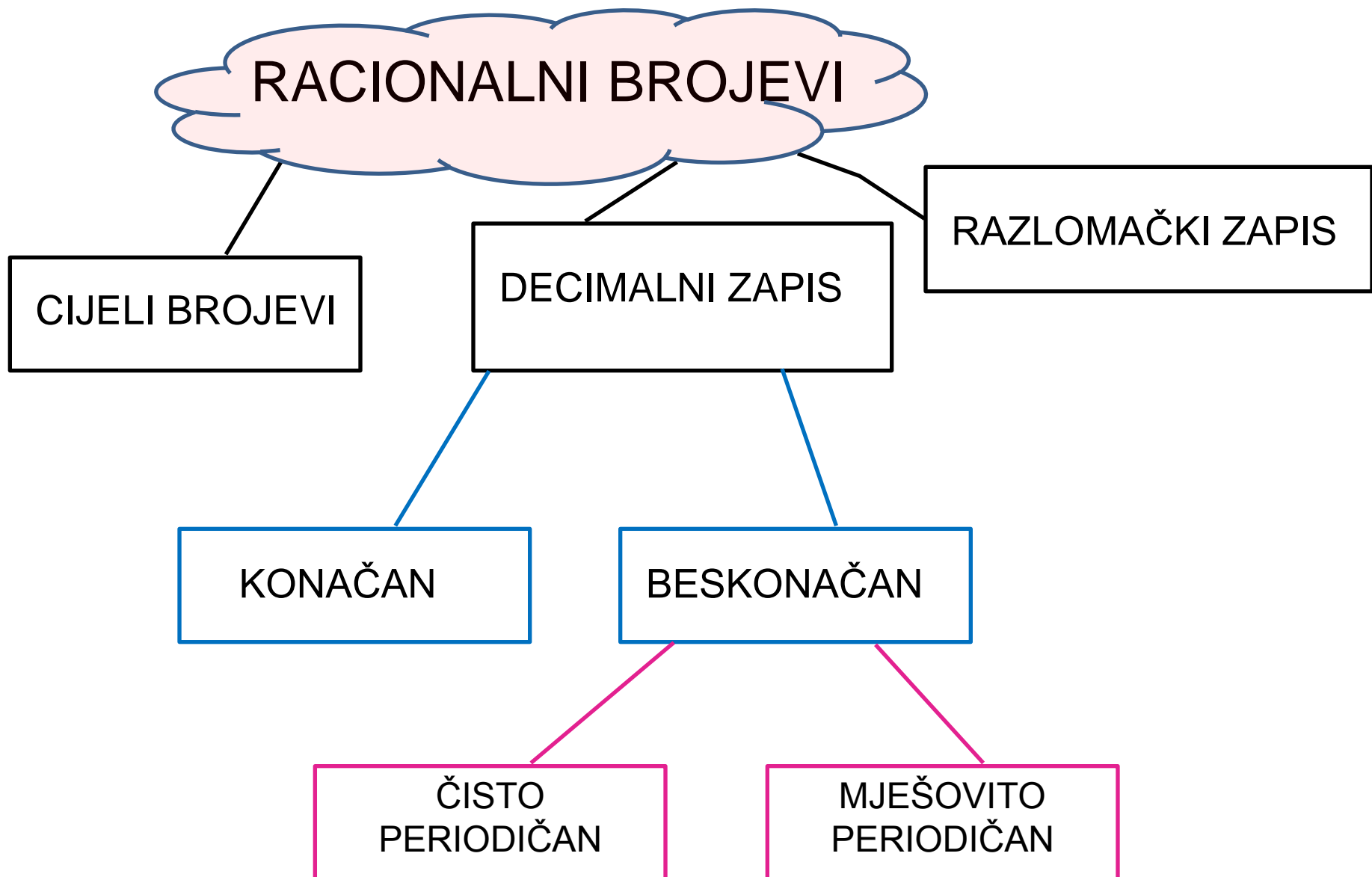
AKTIVNOST : *Iracionalni brojevi!*

7.1020030004000050000060000007...



Znamenke decimalnog dijela ovog decimalnog zapisa su redom zapisani uzastopni prirodni brojevi, ali na način da smo između prva dva uzastopna prirodna broja zapisali nulu, a zatim smo broj zapisanih nula između svaka sljedeća dva uzastopna prirodna broja povećavali za jedan. Prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo i svi su međusobno različiti pa je ovaj decimalni zapis beskonačan **neperiodičan**.

PRISJETIMO SE!



AKTIVNOST : *Iracionalni brojevi*

Diskusija:

Nalaze li se ti brojevi u skupu racionalnih brojeva? Zašto?

Ne, to nisu racionalni brojevi .

Znamo da je racionalan broj ili cijeli broj ili decimalni broj ili ima beskonačan periodičan decimalni zapis, a navedeni brojevi ne zadovoljavaju ništa od toga.

Kako biste nazvali takve brojeve?

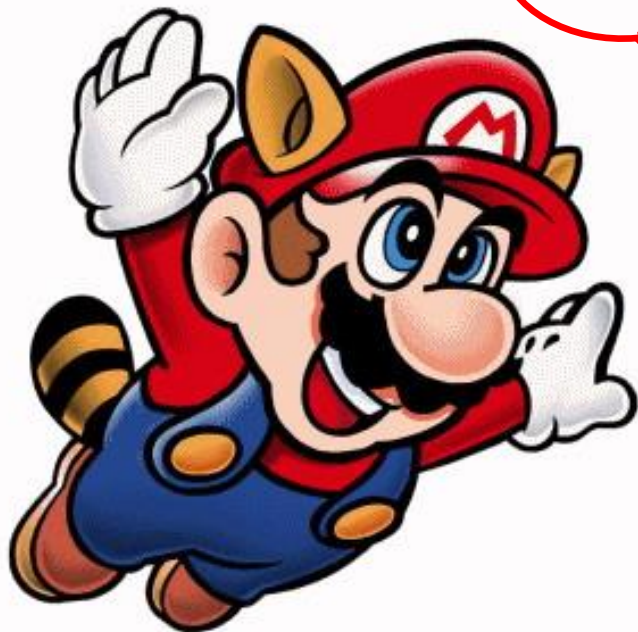
Brojevi koji imaju neperiodičan decimalni zapis, neracionalni brojevi, iracionalni brojevi.



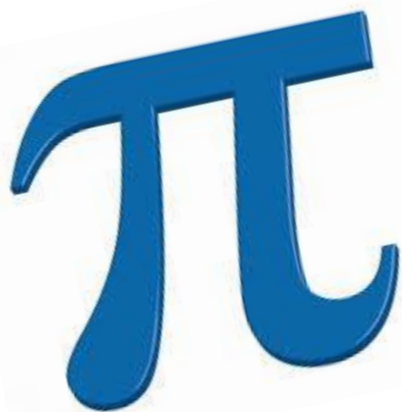
AKTIVNOST : *Iracionalni brojevi*

Zaključak aktivnosti:

Brojeve koji u decimalnom zapisu imaju beskonačno mnogo decimala koje se ne ponavljaju periodično nazivamo **IRACIONALNI BROJEVI.**



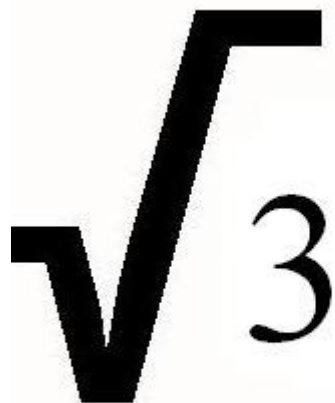
Poznajete li otprije neke brojeve koje biste
svrstali u skup iracionalnih
brojeva??



A blue, three-dimensional pi symbol (π) with a slight shadow, set against a light gray square background.



A black square root symbol followed by the number 2 ($\sqrt{2}$), set against a light gray square background.



A black square root symbol followed by the number 3 ($\sqrt{3}$), set against a light gray square background.

$$\pi$$

Prisjetimo se omjera opsega i promjera kružnice, kojeg smo označili s π . Bio je beskonačan:

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795 \dots$$

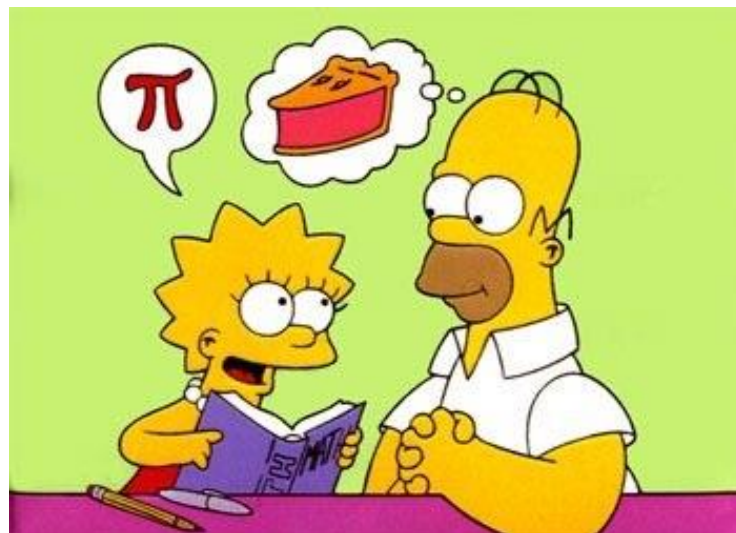
i nije periodičan pa zaključujemo, prema onom što smo dosad naučili, da je iracionalan.

$$\begin{array}{l} \pi = 3.1415 \\ 92653589793 \\ 238462643383 \\ 279502884197169 \\ 39937510582097494 \\ 4592307816406286208998 \end{array}$$



π

- ❖ Osim u formuli za opseg i površinu kruga, on se pojavljuje i u formulama i izračunima na još mnogo mjesta u geometriji, posebice trigonometriji, ali i u drugim prirodnim znanostima kao što su statistika, mehanika, kozmologija i slične.
- ❖ To ga čini najpoznatijom matematičkom konstantom, široko poznatom i van matematičkih krugova.
- ❖ Zovu ga još i Arhimedova konstanta i Ludolfov broj.



π

- ❖ 14.3. se obilježava njegov dan (trenutak u toku dana koji je posebno značajan je u 1 sat i 59 minuta (ili ujutro ili popodne) jer približna vrijednost broja π zaokruženog na 5 decimala izgleda ovako: 3.14 1 59). Nezasitni ljubitelji otišli su i korak dalje pa 28. lipnja slave dan 2π .
- ❖ Najveći broj znamenaka koji je neka osoba uspjela zapamtiti je čak 67 890, a zapamtio ih je Lu Chao i trebalo mu je nešto više od 24 sata da ih izrecitira. Navodno je Akira Hagahuchi izrecitirao 100 000 znamenki, ali bez potvrde Guinnessovaca.
- ❖ Neke aproksimacije broja π razlomcima:

$$\frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{52163}{16604}, \frac{103993}{33102}$$

