

Prigušeno matematičko njihalo

Seminar iz klasične mehanike 1

Sadržaj

- Teorijska razmatranja:
 - Idealno matematičko njihalo
 - Prigušeno matematičko njihalo
 - Relacija za amplitudu pri malim kutovima
- Eksperiment:
 - Postav eksperimenta i metoda mjerenja
 - Softver za obradu i prikaz rezultata
 - Njihala
- Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka:
 - Valna funkcija pri manjem broju titraja
 - Određivanje konstante trenja pri malim kutovima
 - Određivanje ostalih konstanti namještanjem parametara
- Diskusija rezultata

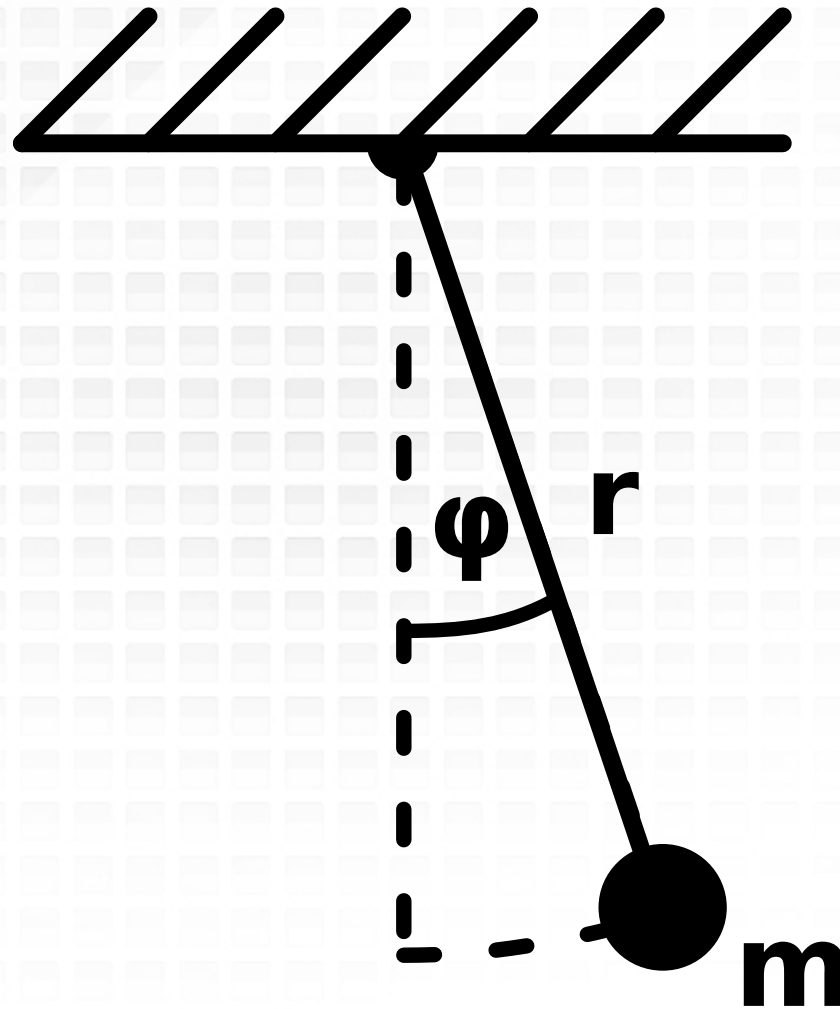
Teorijska razmatranja

Idealno matematičko njihalo

$$m \ddot{\varphi} r + m g \sin \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r} \sin \varphi$$

Simulacija



Teorijska razmatranja

Prigušeno matematičko njihalo

Ako dodamo disipativnu silu: $F_{tr} = -b \dot{\varphi} r$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{r} \sin \varphi - \frac{b}{m} \dot{\varphi}$$

Ako disipativna sila ovisi o više potencija brzine:

$$F_{tr} = -\sum_{i=1}^n b_i \dot{\varphi} |\dot{\varphi}^{i-1}| r^i$$

Simulacija

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{r} \sin \varphi - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n b_i \dot{\varphi} |\dot{\varphi}^{i-1}| r^{i-1}$$

Teorijska razmatranja

Relacija za amplitudu pri malim kutovima

Pretpostavke: - trenje ovisi samo o prvoj potenciji brzine pa je:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r} \sin \varphi - \frac{b}{m} \dot{\varphi}$$

- radi se o malim kutovima gdje vrijedi: $\sin \varphi \approx \varphi$

Tada je amplituda valne funkcije: $\varphi_{max} = A e^{\frac{-b}{2m}t}$,
gdje je A amplituda za t=0.

Ukoliko znamo: $A_1 = \varphi(t_1)$, $A_2 = \varphi(t_2)$
Možemo konstantu b izračunati po relaciji:

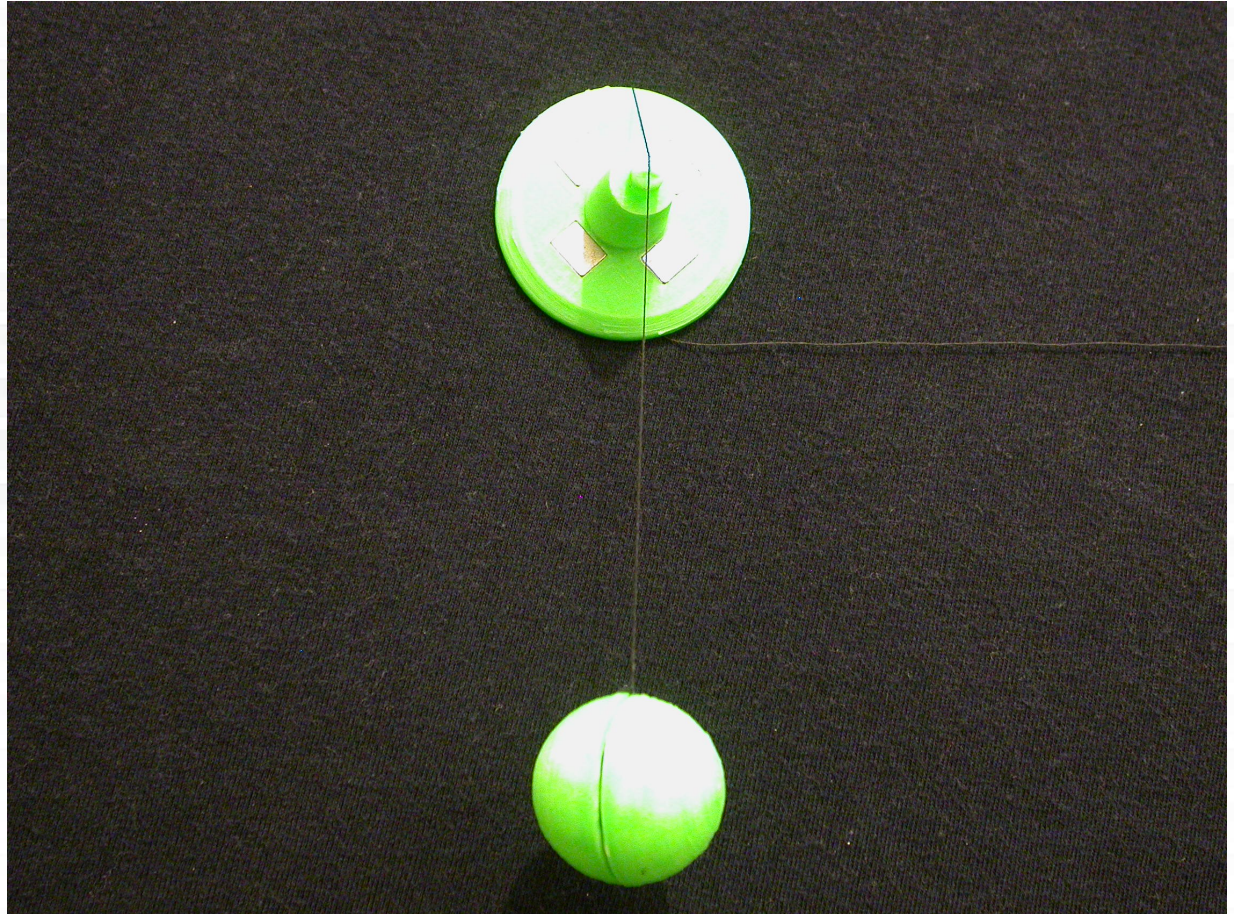
$$b = \frac{2m}{t_2 - t_1} \ln \frac{A_1}{A_2}$$

Eksperiment

Postav eksperimenta i metoda mjerenja

Pribor za eksperiment:

- tamna površina
- prihvat za njihalo
- njihala i konac
- USB kamera



Mjerenje se izvodi USB kamerom Playstation Eye na 320x240 pri 100fps.

Eksperiment

Softver za obradu i prikaz rezultata

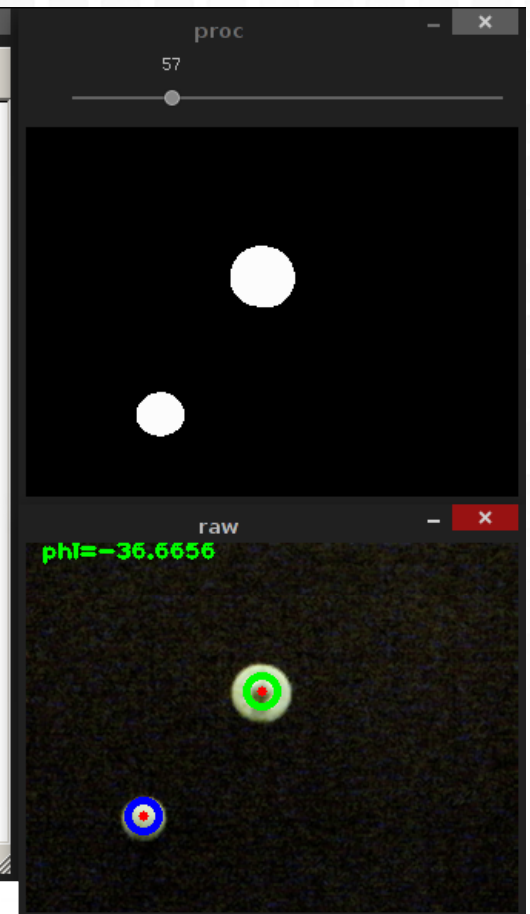
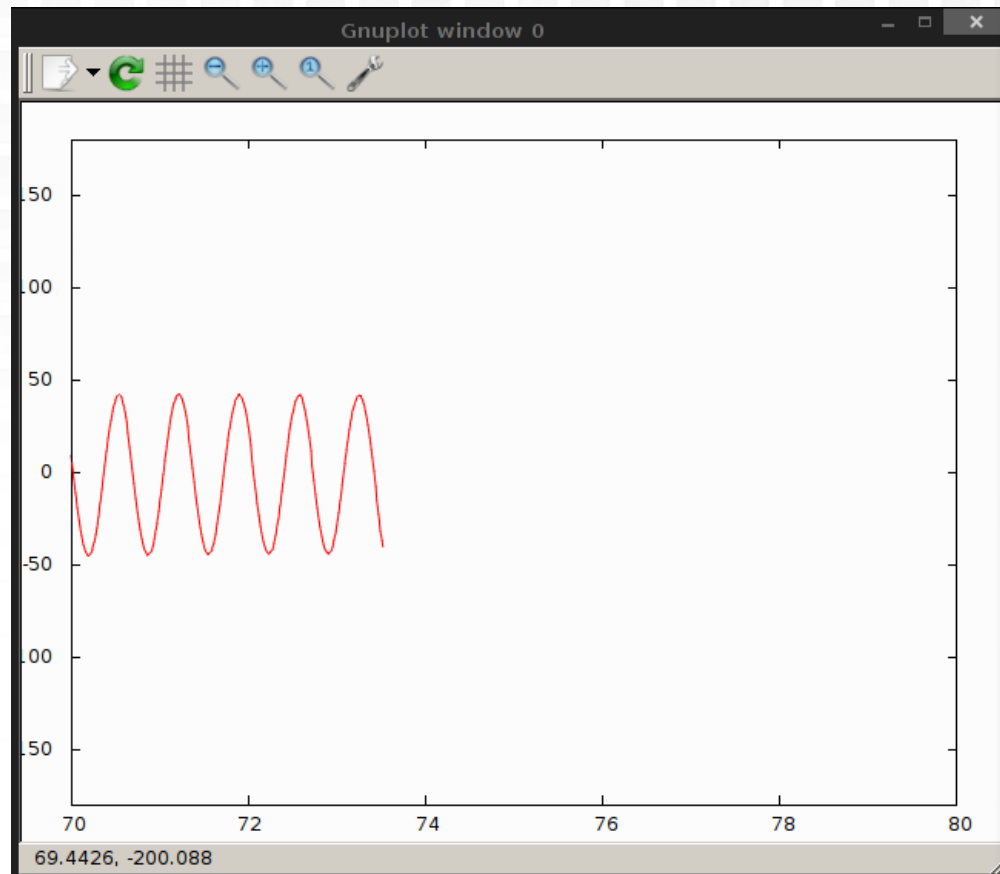
- Program:
- obrađuje sliku u realnom vremenu i pri 100fps
 - daje izmjereni kut svakih 10ms
 - u realnom vremenu plota ϕ -t graf
 - može spremiti izmjerene podatke na disk

Program

Kod

Podaci

Prikaz



Eksperiment

Njihala

Za mjerenje koristimo četiri njihala:

-Njihalo 1 (kugla)

$$m_1 = 0.0054 \text{ kg}$$

-Njihalo 2 (kugla)

$$m_2 = 0.0321 \text{ kg}$$

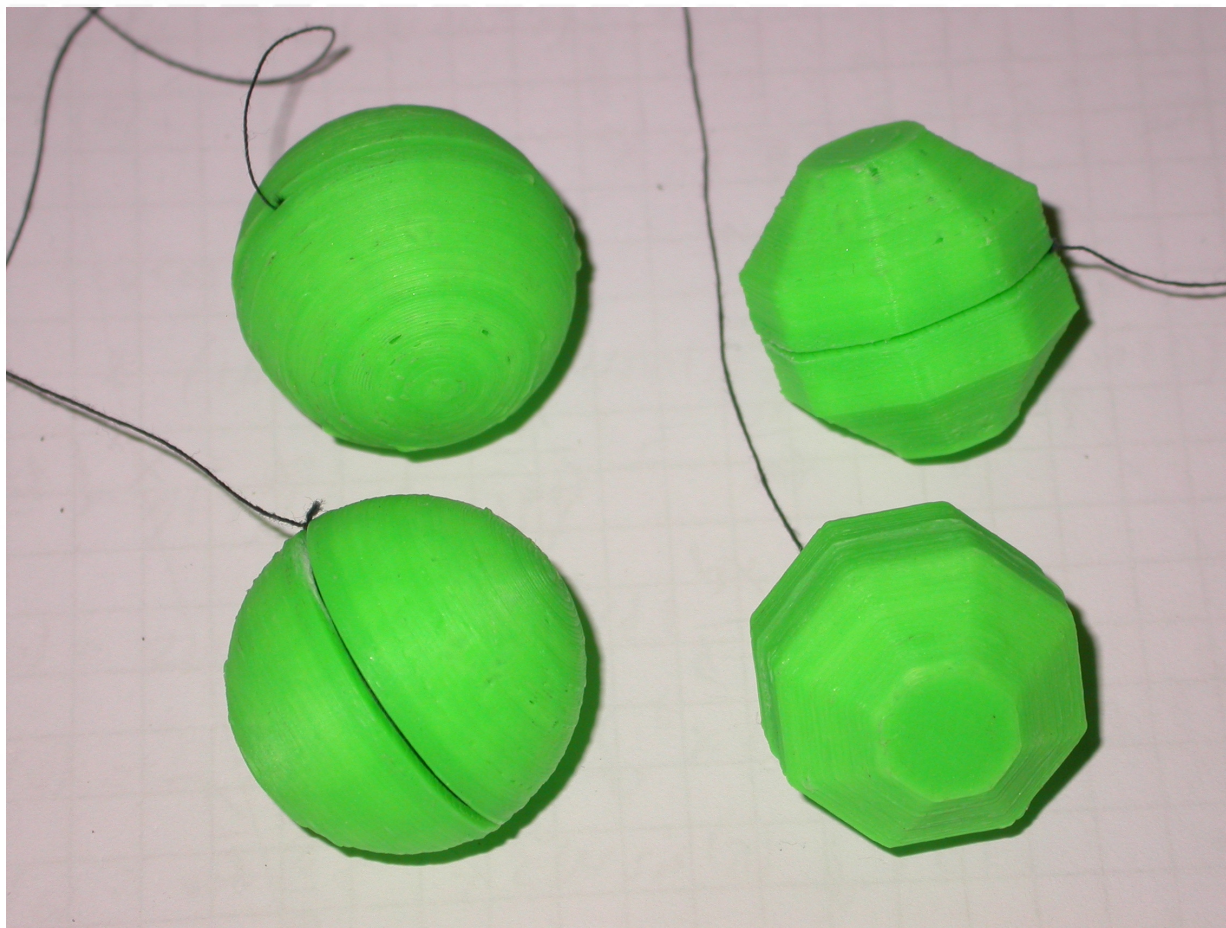
-Njihalo 3 (kugla niske
Rezolucije)

$$m_3 = 0.0041 \text{ kg}$$

-Njihalo 4 (kugla niske
Rezolucije)

$$m_4 = 0.0310 \text{ kg}$$

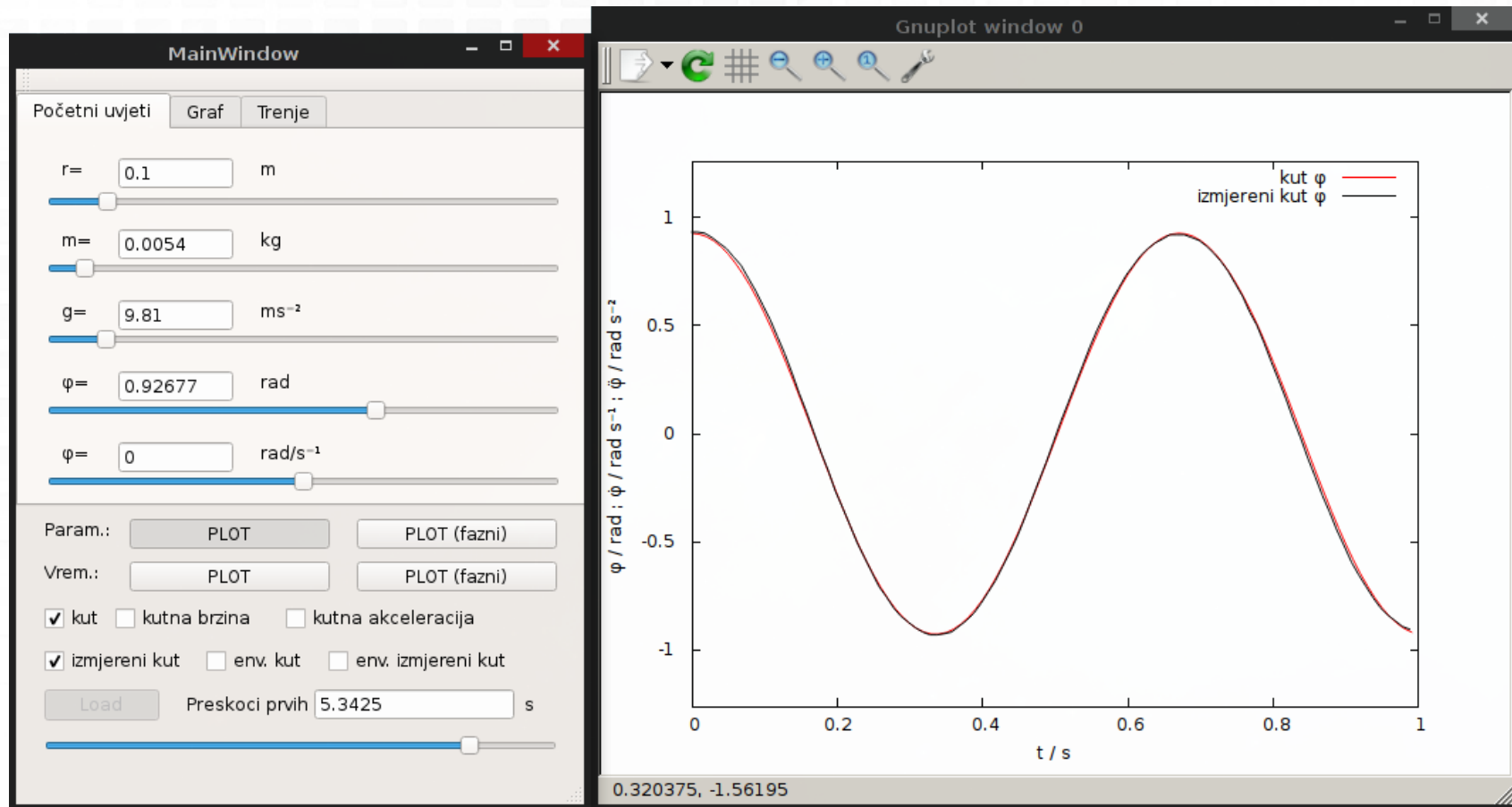
Pri radijusu: $r = 0.1 \text{ m}$



Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Valna funkcija pri manjem broju titraja

Budući da je prigušenje malo, unutar manjeg broja titraja je promjena amplitude i perioda malena pa možemo usporediti taj dio izmjerenih podataka s simuliranim. Npr. za njihalo 1:

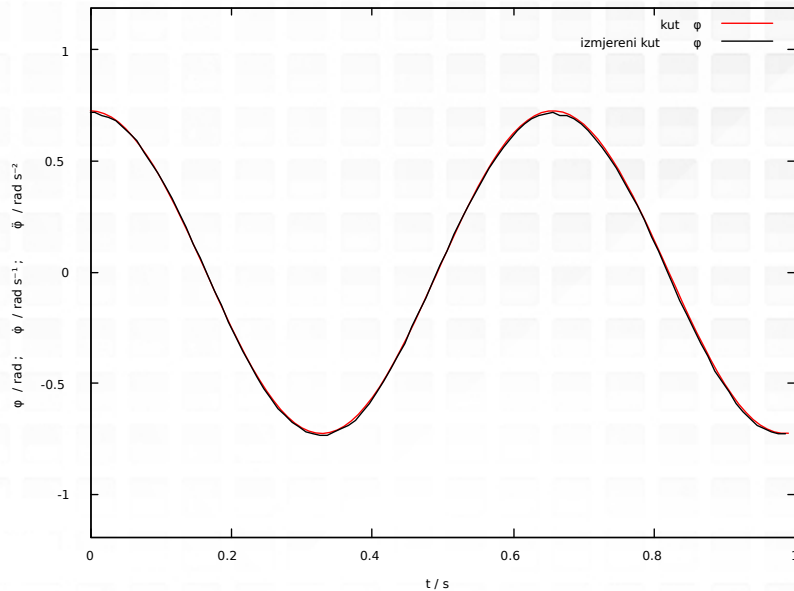


Uz stvarnu duljinu njihala i gravitacijsko ubrzanje te podudarajući početni kut simulirana krivulja (crveno) skoro se savršeno poklapa s izmjerenom (crno).

Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

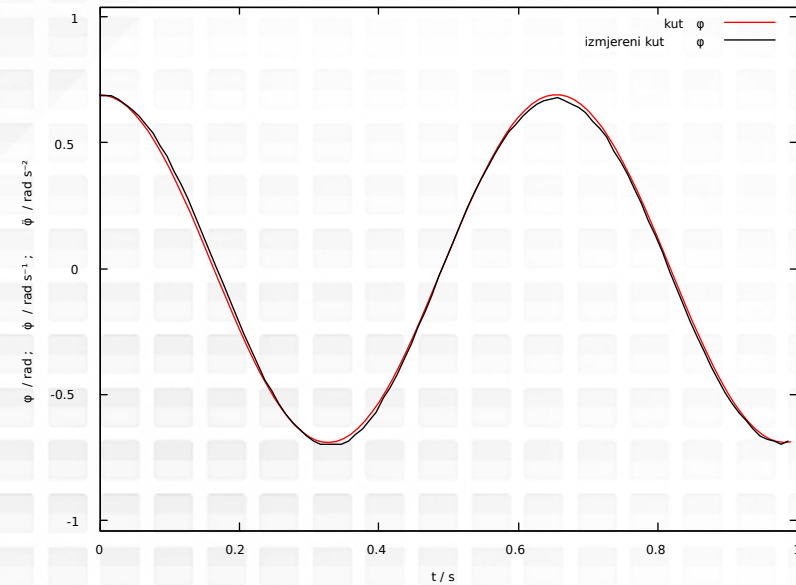
Valna funkcija pri manjem broju titraja

Analogno za ostala tri njihala:

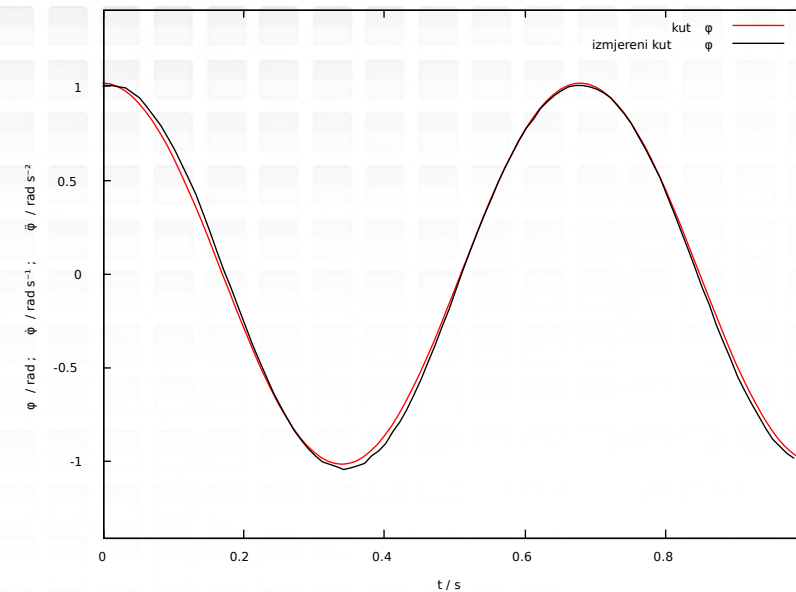


Njihalo 4

Demonstracija



Njihalo 2

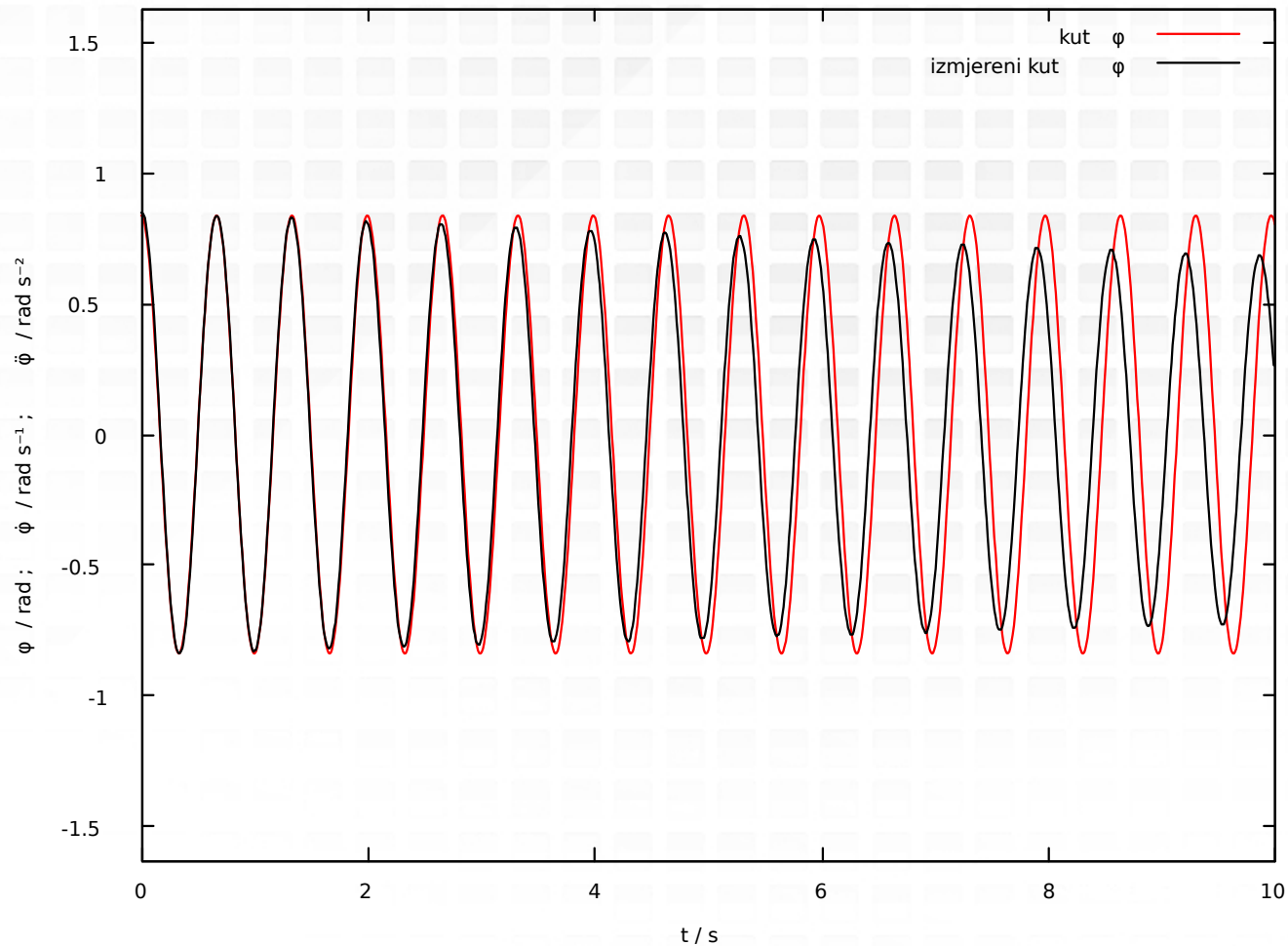


Njihalo 3

Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Valna funkcija pri manjem broju titraja

Prigušenje pri većem broju titraja vidljivo: usporedba s idealnim (crveno) i izmjerenim (crno).



Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

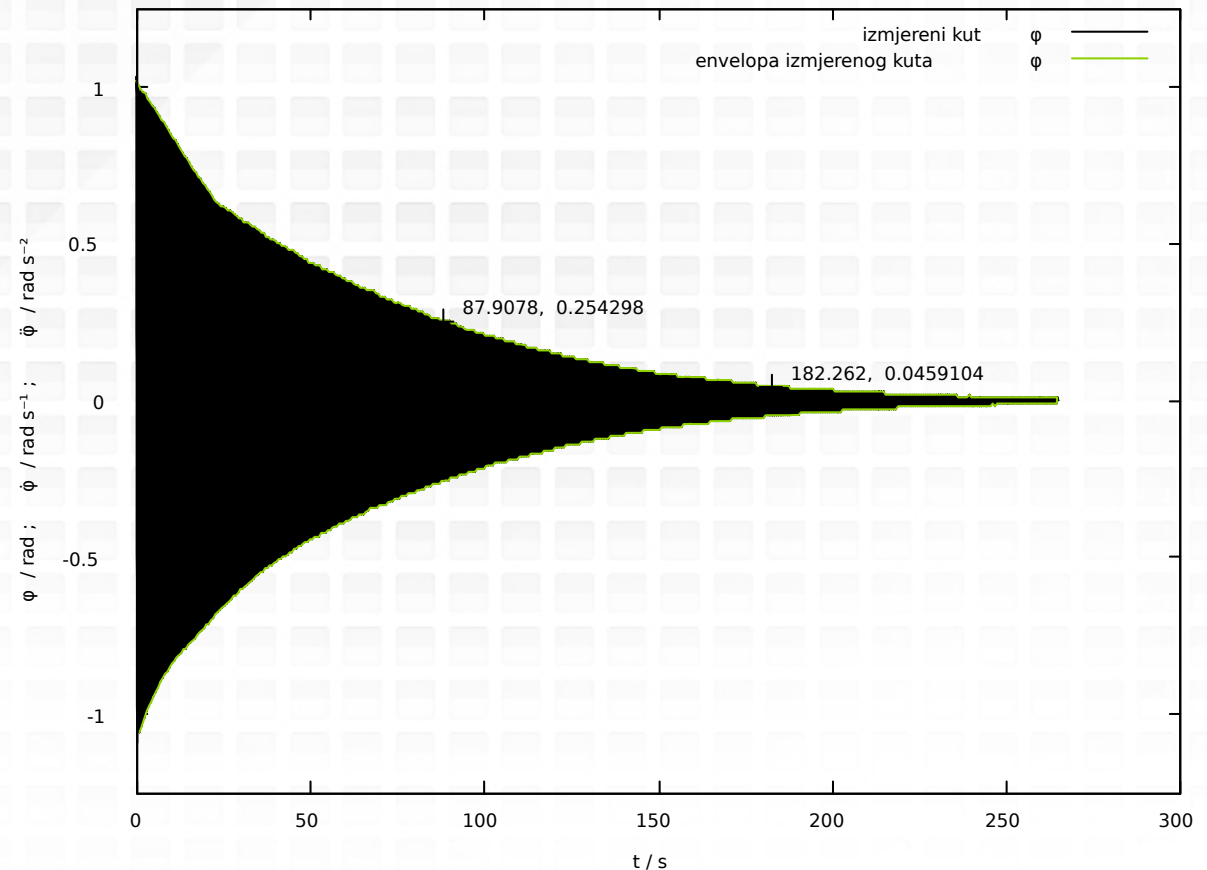
Određivanje konstante trenja pri malim kutovima

Pretpostavljamo da trenje ovisi samo o prvoj potenciji brzine. Tada konstantu b računamo po već izvedenoj relaciji:

$$b = \frac{2m}{t_2 - t_1} \ln \frac{A_1}{A_2}$$

uzimajući u obzir samo male kutove.

Npr. za njihalo 1; uzmimo proizvoljne dvije točke na envelopi i pomoću njih izračunajmo konstantu b :



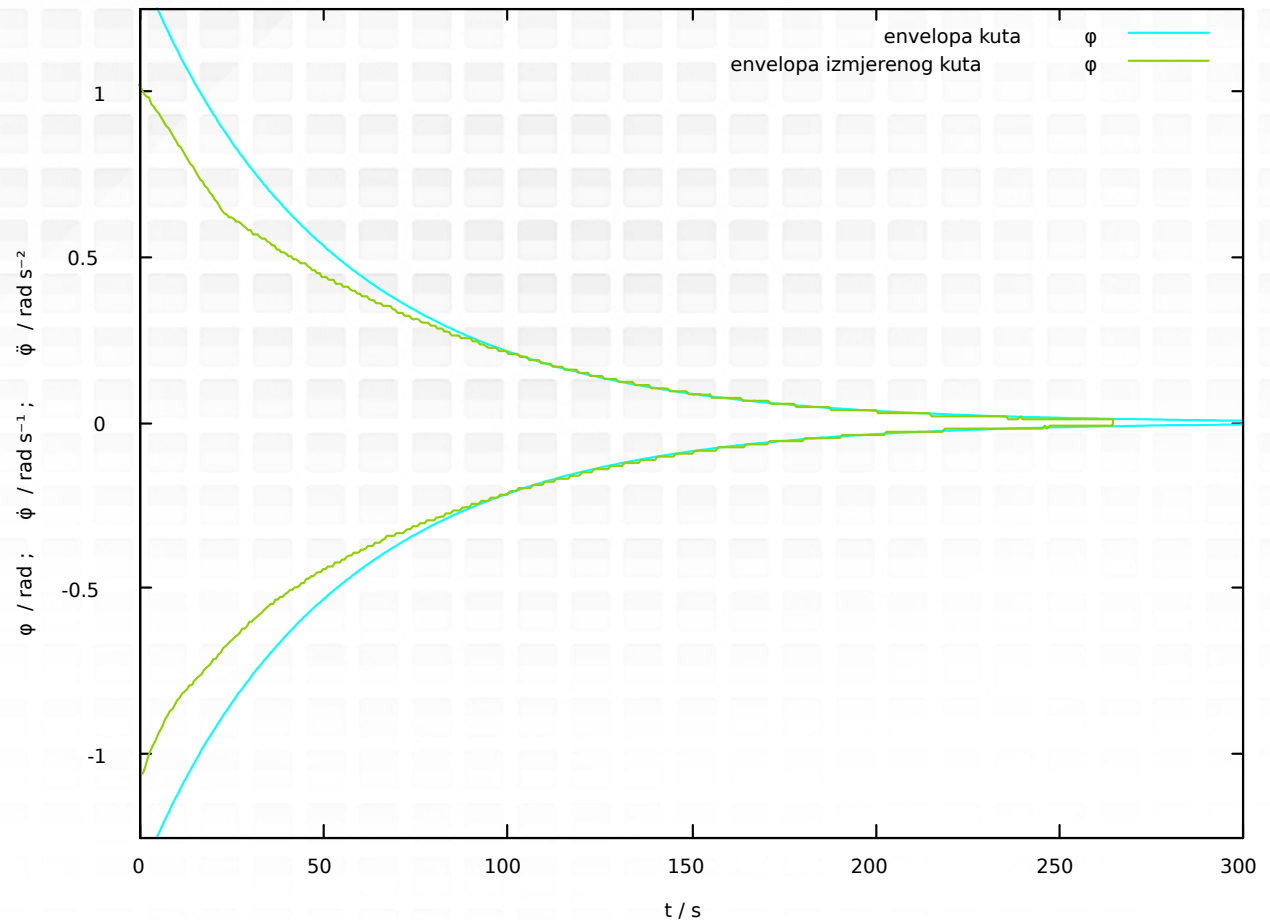
$$b = \frac{2 \cdot 0.0054 \text{ kg}}{182.262 \text{ s} - 87.9078 \text{ s}} \ln \frac{0.254298}{0.0459104} = 0.0001959 \text{ kg s}^{-1}$$

Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Određivanje konstante trenja pri malim kutovima

Uvrštavanjem mase i radijusa njihala, te izračunate konstante b uz početni kut takav da simulirana krivulja prolazi kroz dvije točke preko kojih smo računali konstantu b dobivamo graf:

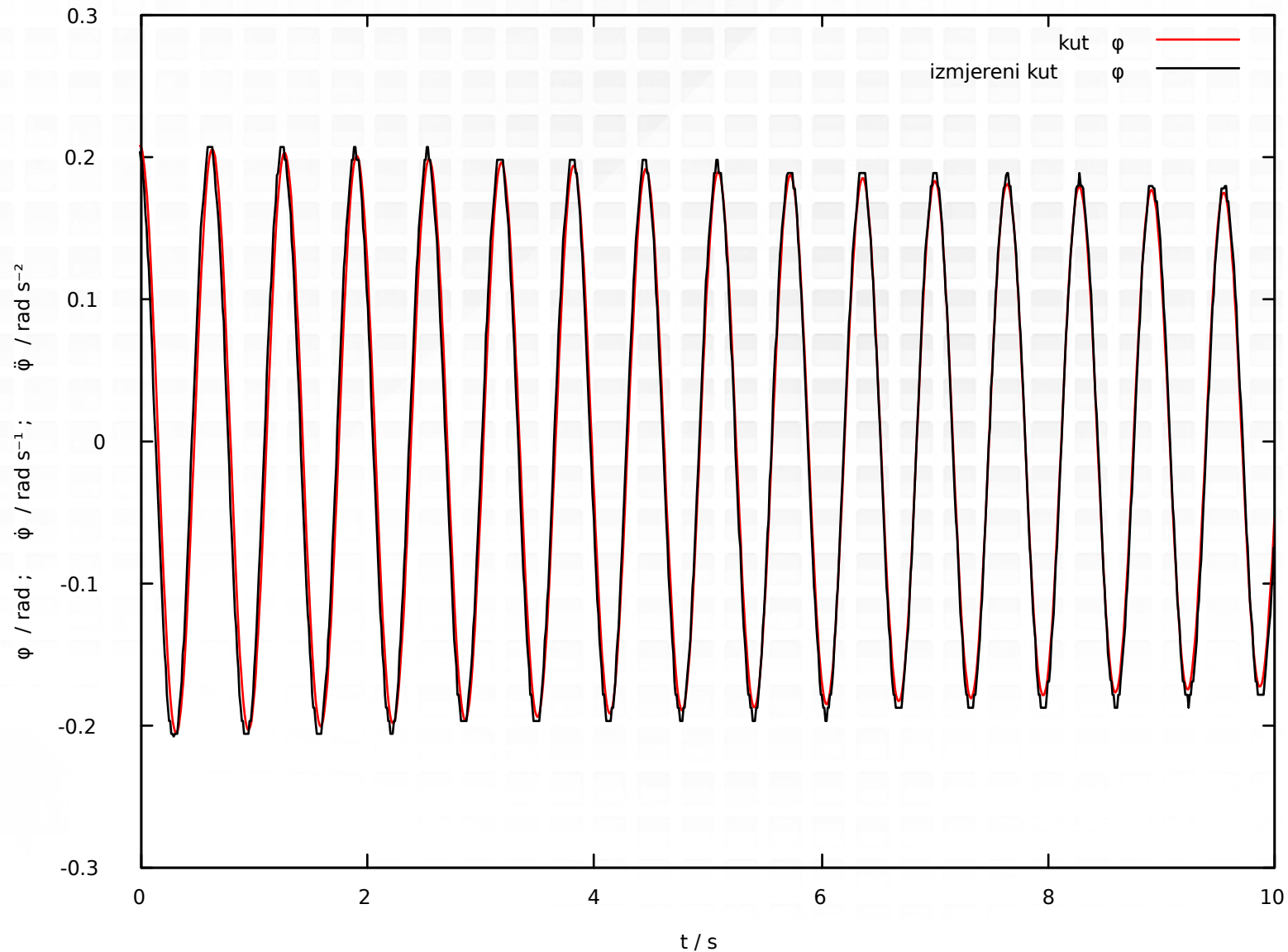
Vidljivo je da se na kutovima iznad oko 15° krivulje ne poklapaju.



Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Određivanje konstante trenja pri malim kutovima

Povećani dio krivulje za manji broj titraja:



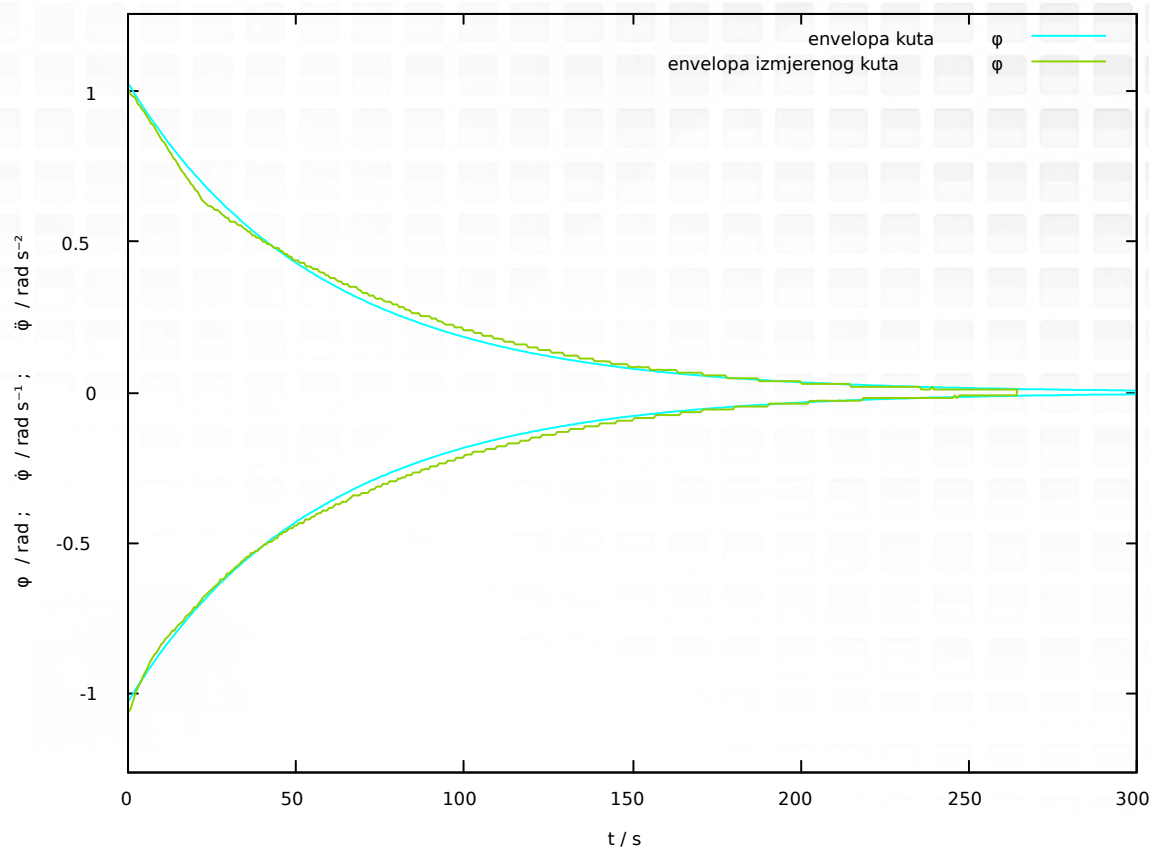
Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Određivanje konstante trenja pri malim kutovima

Ukoliko isti postupak ponovimo tako da uzmemo prvu točku s početka grafa kad $t_1=0$ dobivamo konstantu b:

$$b=0.0001837 \text{ kg s}^{-1}$$

Ako simuliramo s tom konstantom tako da su početni kutovi obje krivulje jednaki dobivamo:



Dobivene krivulje se lošije poklapaju na srednjim djelovima. Moguće je da trenje ovisi i o većim potencijama brzine budući da se i prošla krivulja najbolje poklapala u području malih brzina, a umnožak dvaju ili više malih brzina daje još manju brzinu pa bi pri malim brzinama više potencije tih brzina isčezavale.

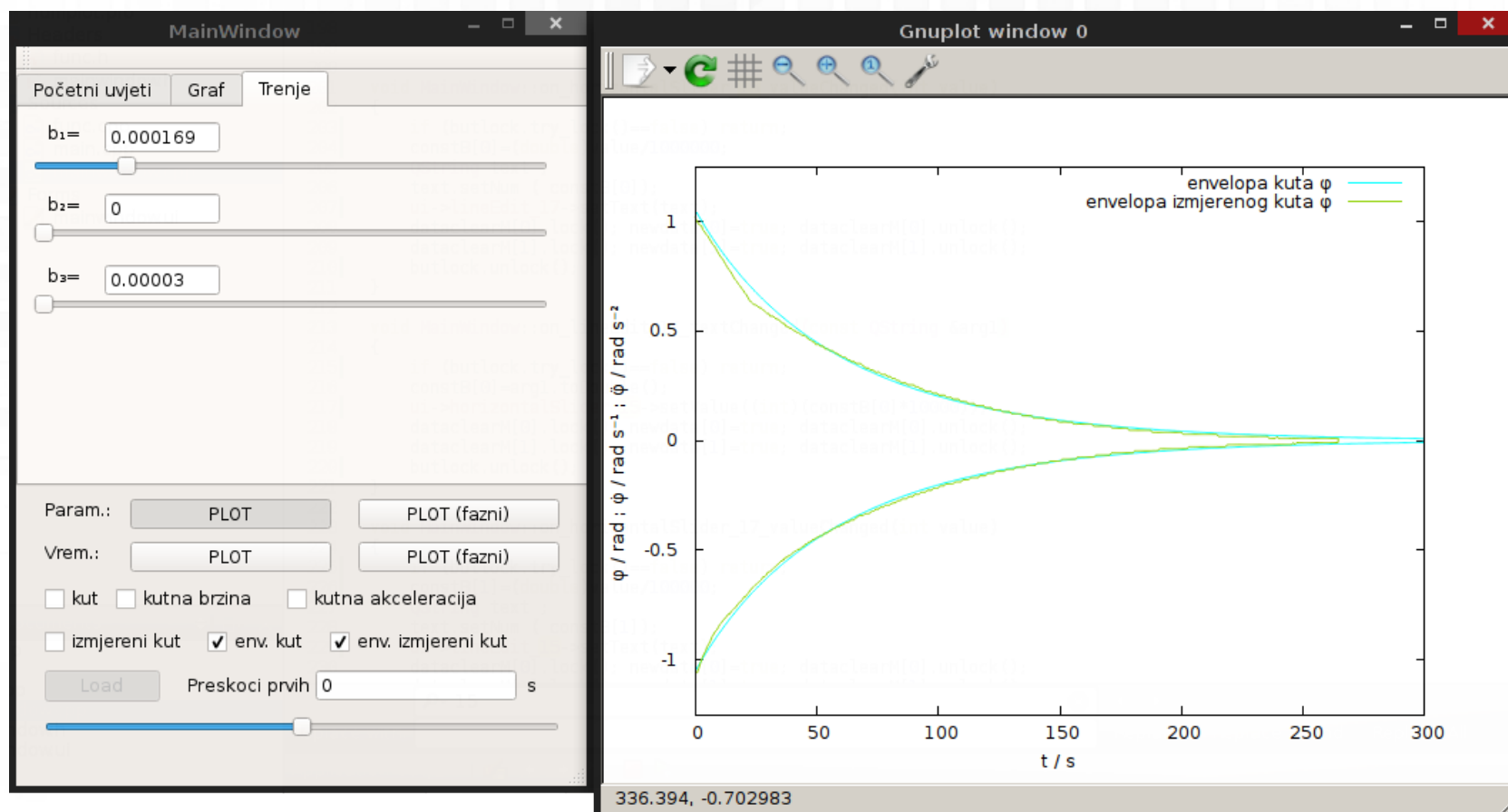
Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Određivanje ostalih konstanti namještanjem parametara

Kako bi odredili konstante b_1, b_2, b_3 za prve tri potencije brzine namještamo ih dok se izmjereni podatci što bolje ne poklope s simuliranim.

Tako npr. za njihalo 1:

$$b_1 = 0.000169 \text{ kg s}^{-1} \quad b_2 = 0 \quad b_3 = 0.00003 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-3}$$

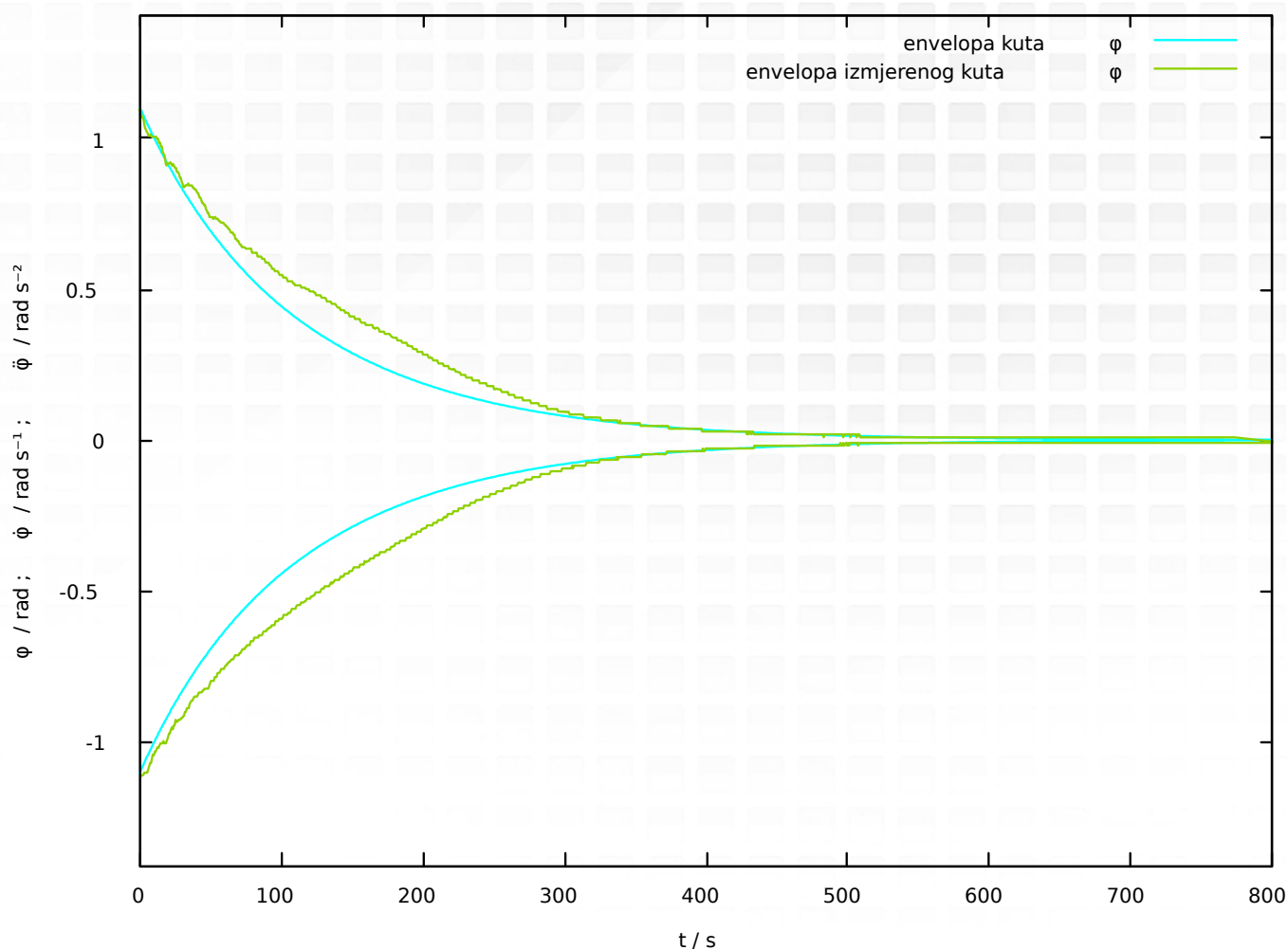


Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Određivanje ostalih konstanti namještanjem parametara

Njihalo 2: $b_1 = 0.000552 \text{ kg s}^{-1}$ $b_2 = 0$ $b_3 = 0$

Povećavanjem konstanti za 2. i 3. potenciju brzine u ovom slučaju još više smanjuje poklapanje grafa.

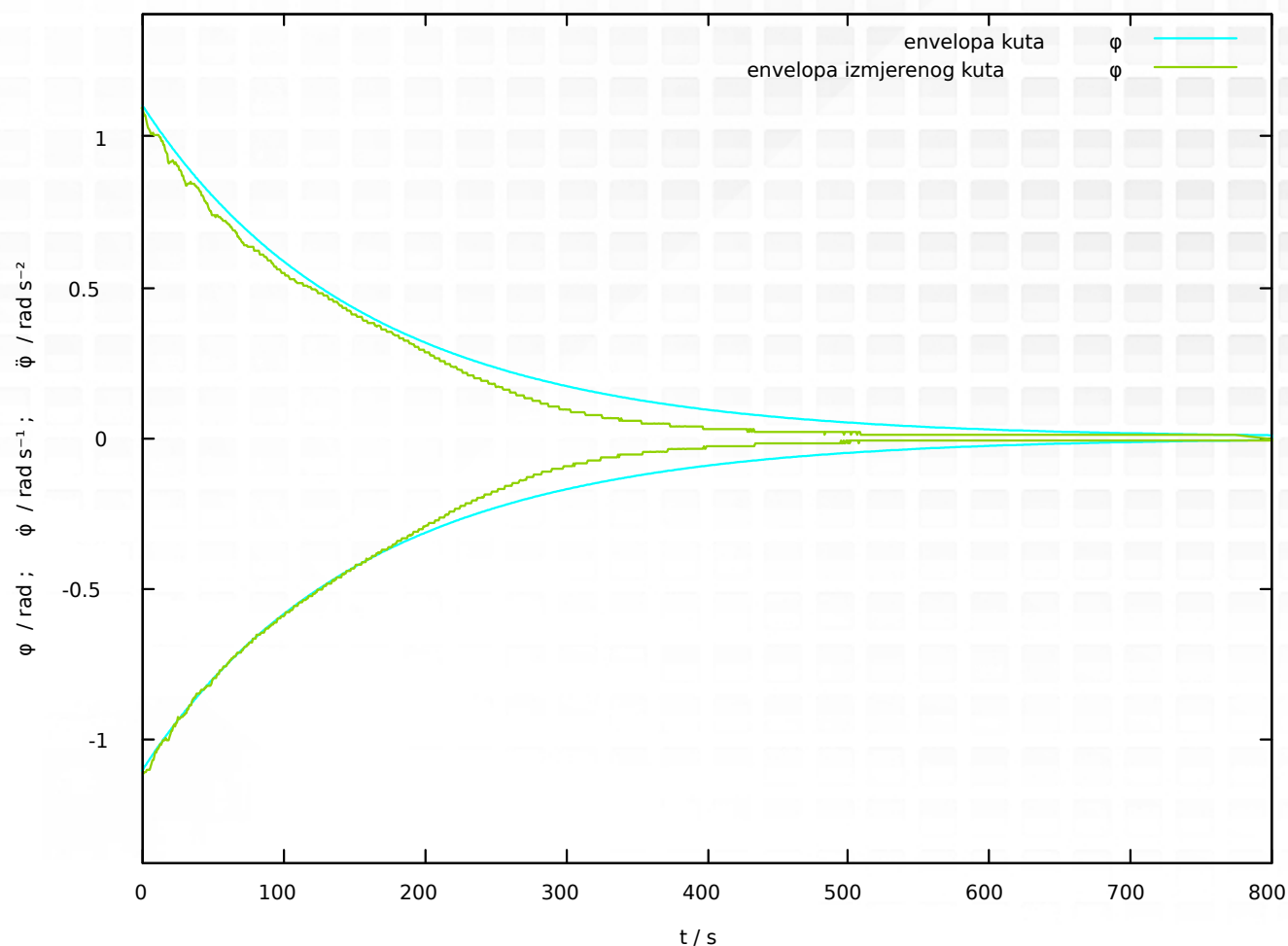


Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Određivanje ostalih konstanti namještanjem parametara

Njihalo 2: $b_1 = 0.000399 \text{ kg s}^{-1}$ $b_2 = 0$ $b_3 = 0$

Očito je da kod njihala 2 trenje moralo ovisiti i o potenciji brzine <1 , npr. o korijenu brzine kako bi se podatci slagali.



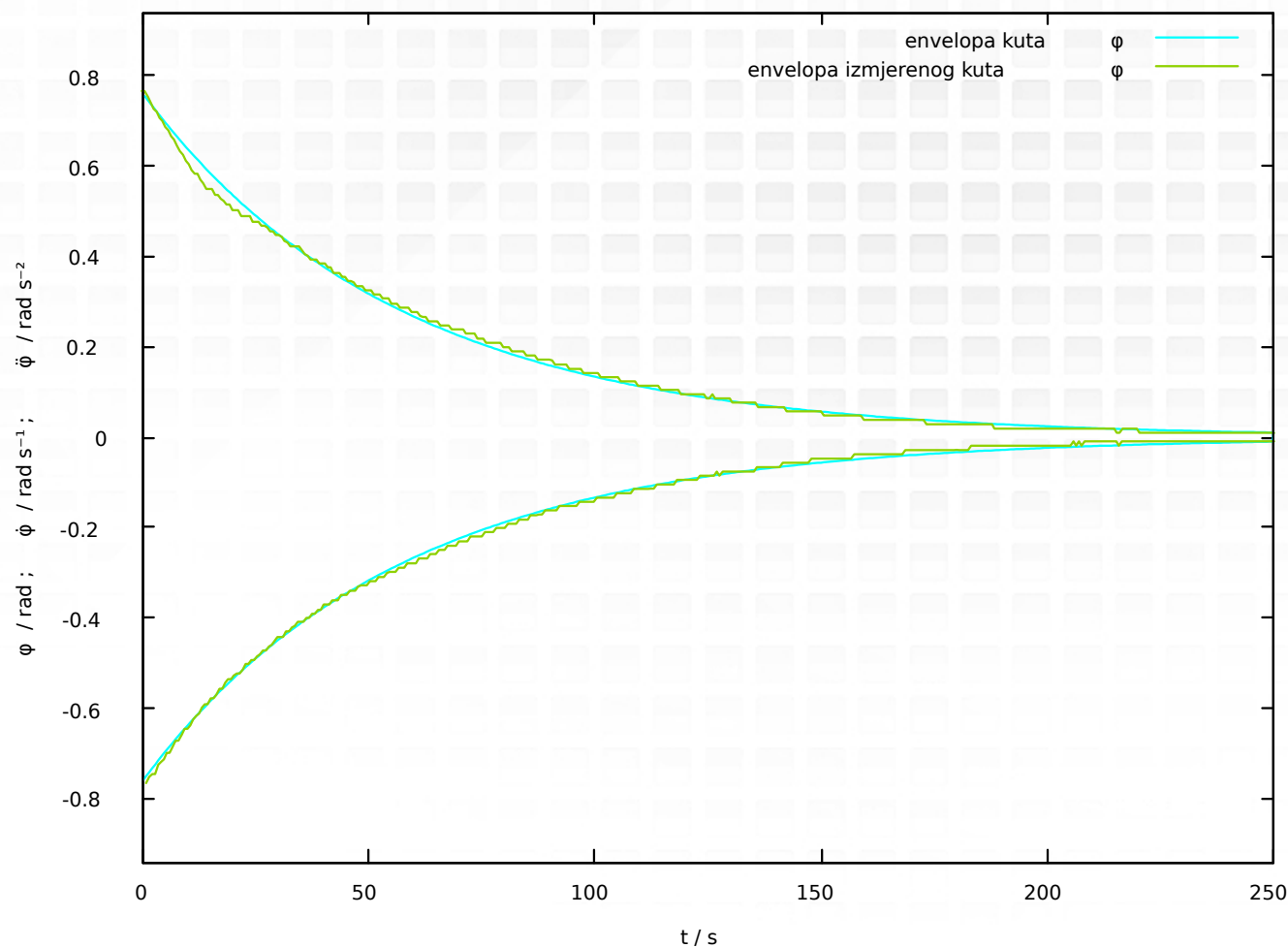
Budući da je jedina razlika između njihala 1 i njihala 2 njihova masa, a dobiveni faktori su veoma različiti zaključujem da većina trenja nije uzrokovanu trenjem s zrakom.

Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Određivanje ostalih konstanti namještanjem parametara

Njihalo 3: $b_1 = 0.000142 \text{ kg s}^{-1}$ $b_2 = 0$ $b_3 = 0$

Kod ovog njihala, koje se od njihala 1 razlikuje uglavnom po obliku površine i nešto manjoj masi trenje ovisi samo o prvoj potenciji brzine.

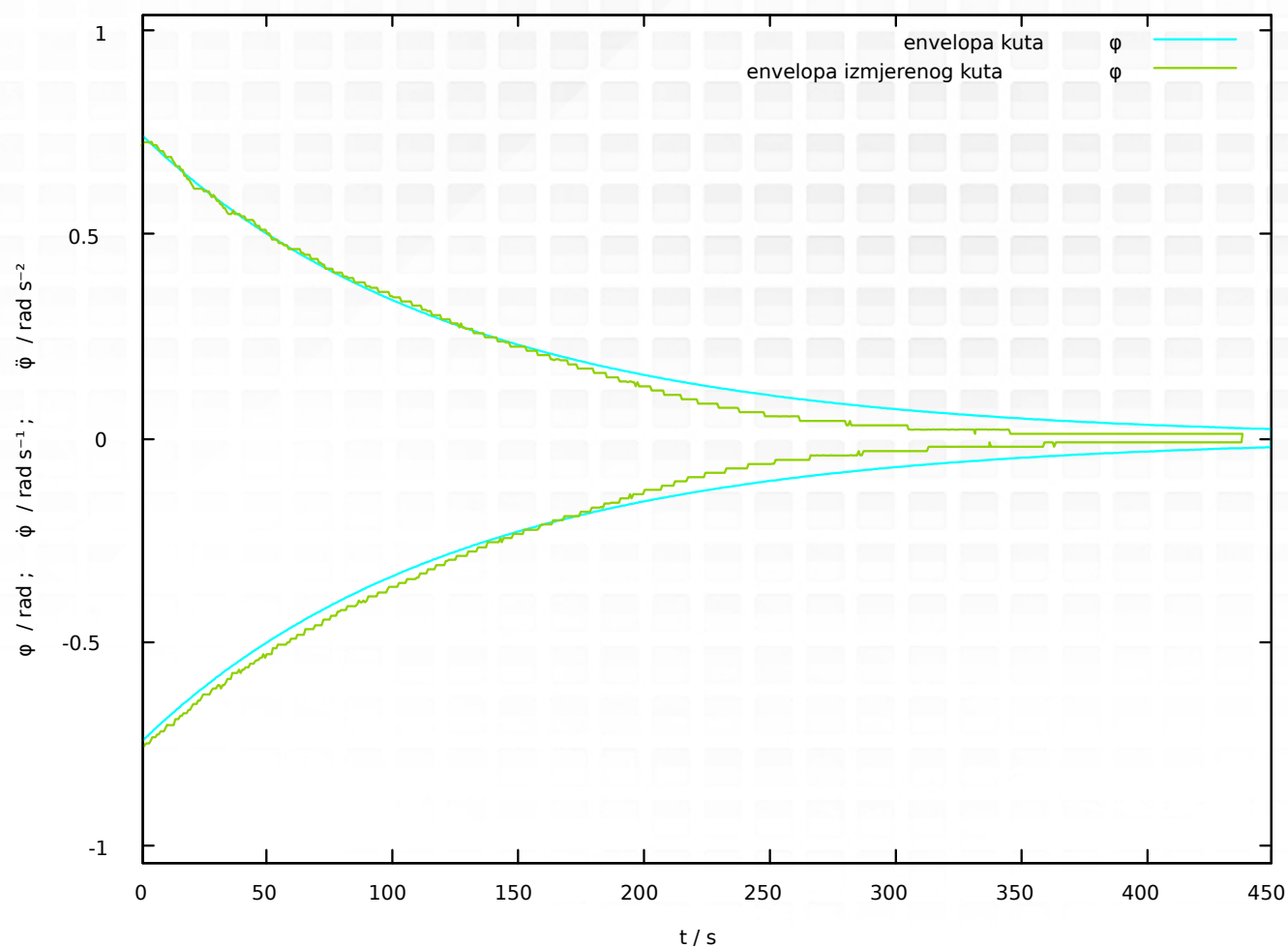


Usporedba teorije i eksperimentalno dobivenih podataka

Određivanje ostalih konstanti namještanjem parametara

Njihalo 4: $b_1 = 0.000483 \text{ kg s}^{-1}$ $b_2 = 0$ $b_3 = 0$

Kod ovog njihala su rezultati jako slični onima za njihalo 2.



Diskusija rezultata

Uspoređujući rezultate za njihala 1 i 3 sa onima za njihala 2 i 4 možemo doći do zaključka da trenje mora ovisiti o napetosti niti budući da je jedina značajna razlika otprilike 6 puta veća masa.

Sila napetosti niti bila bi jednaka superpoziciji sile teže i centripetalne sile pa bi time ovisila i o kutu i o kutnoj brzini.

Tako bi pri većim kutovima sila napetosti bila manja a time i trenje manje.

Uzimajući to u obzir kod grafa njihala 2 i 4 ipak nebi bilo moguće namjestiti poklapanje bez korištenja potencije brzine manje od 1.