

# KULTURA PRAĆENJA I VREDNOVANJA UČENIKA U NASTAVI MATEMATIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI

prof. dr. sc. Aleksandra Čizmešija  
Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek  
Sveučilište u Zagrebu  
cizmesij@math.hr

## MATEMATIČKA KOMPETENCIJA

PREPORUKE EUROPSKOG PARLAMENTA I VIJEĆA  
o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje

(prosinac 2006.)

Europski referentni okvir navodi **osam ključnih kompetencija**:

- komunikacija na materinskom jeziku
- komunikacija na stranim jezicima
- **matematička kompetencija** i osnovne kompetencije u prirodoslovlju i tehnologiji
- digitalna kompetencija
- **kompetencija učiti kako učiti**
- socijalna i građanska kompetencija
- inicijativnost i poduzetništvo
- kulturna svijest i izražavanje

## MATEMATIČKA KOMPETENCIJA (2)

### DEFINICIJA

Matematička kompetencija je **sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja** kako bi se riješio **niz problema** u svakodnevnim situacijama.

Uz dobro vladanje brojevima (tzv. **numerička pismenost**), naglasak je na **procesu i aktivnosti**, kao i na **znanju**.

Matematička kompetencija uključuje, na različitim stupnjevima, **sposobnost i volju za korištenjem matematičkih načina mišljenja** (logičko i prostorno mišljenje) i **prikazivanja** (formule, modeli, konstrukcije, grafovi, grafikoni).

## MATEMATIČKA KOMPETENCIJA (3)

**TEMELJNA ZNANJA, VJEŠTINE I STAVOVI** povezani s ovom kompetencijom:

- **Potrebno znanje** u matematici uključuje čvrsto znanje brojeva, mjera i struktura, osnovnih operacija i osnovnih matematičkih prikaza, razumijevanje matematičkih izraza i pojmova, te svijest o pitanjima na koje matematika može dati odgovore.
- Osoba bi trebala moći **primijeniti matematička načela i procese** u svakodnevnom kontekstu kod kuće i na poslu, te moći slijediti i vrednovati nizove argumenata. Osoba bi trebala biti sposobna **matematički rasuđivati, razumjeti matematičke dokaze i komunicirati** na matematičkom jeziku, te **koristiti primjerena pomagala**.
- **Pozitivan stav u matematici** zasnovan je na poštivanju istine, te volji za traženjem razloga i procjeni njihove valjanosti.

## MATEMATIČKA PISMENOST (OECD/PISA)

OECD/PISA definira matematičku pismenost kao:

Sposobnost pojedinca za:

- prepoznavanje matematičkih problema,
- razumijevanje i angažman u matematici,
- stvaranje dobro utemeljenih prosudbi o ulozi matematike.

Ta je sposobnost potrebna u:

- sadašnjem i budućem privatnom, poslovnom i društvenom životu s vršnjacima i članovima obitelji
- životu kao konstruktivnog, zainteresiranog i promišljajućeg građanina.

## MATEMATIČKA PISMENOST (OECD/PISA) (2)

Tri dimenzije matematičke pismenosti:

- matematički procesi
- matematički sadržaj
- matematičke situacije i konteksti

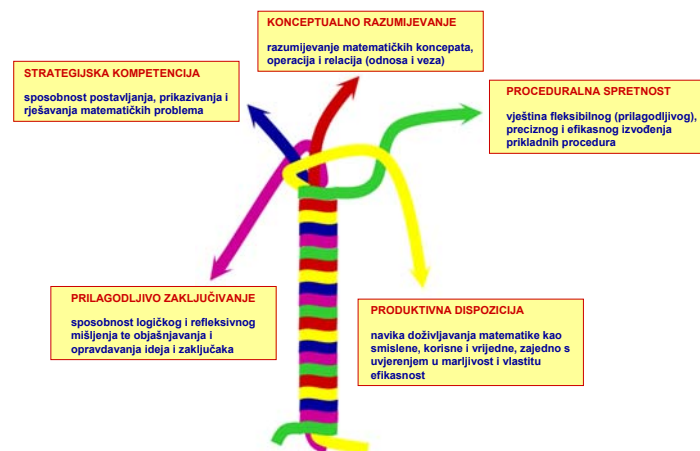
## MATEMATIČKA PISMENOST (OECD/PISA) (3)

MATEMATIČKI PROCESI (prema PISA-i)

1. Matematičko mišljenje i zaključivanje
2. Matematičko argumentiranje
3. Matematička komunikacija
4. Modeliranje
5. Postavljanje i rješavanje problema
6. Prikazivanje
7. Korištenje simboličkog, formalnog i tehničkog jezika i operacija
8. Korištenje pomagala i alata

## PET STANDARDA MATEMATIČKE KOMPETENCIJE (SAD)

Prema: *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*, 2001.



## OPĆI CILJEVI MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA U NOK-u

### Učenici će:

- usvojiti temeljna matematička znanja, vještine i procese, te uspostaviti i razumjeti matematičke odnose i veze
- biti osposobljeni za rješavanje matematičkih problema i primjenu matematike u različitim kontekstima, uključujući i svijet rada
- razviti pozitivan odnos prema matematici, odgovornost za svoj uspjeh i napredak te svijest o svojim matematičkim postignućima
- prepoznati i razumjeti povijesnu i društvenu ulogu matematike u znanosti, kulturi, umjetnosti i tehnologiji, kao i njezin potencijal za budućnost društva
- biti osposobljeni za apstraktno i prostorno mišljenje te logičko zaključivanje
- učinkovito komunicirati matematička znanja, ideje i rezultate radeći raznovrsne prikaze
- učinkovito primjenjivati tehnologiju
- steći čvrste temelje za cjeloživotno učenje i nastavak obrazovanja.

## RAZRADA OPĆIH CILJEVA

### Dvije istaknute dimenzije matematičkog obrazovanja:

- matematički procesi
- matematički koncepti

## MATEMATIČKI PROCESI

### Matematički procesi:

- prikazivanje i komunikacija
- povezivanje
- logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje
- rješavanje problema i matematičko modeliranje
- primjena tehnologije

## MATEMATIČKI KONCEPTI

### Matematički koncepti:

- brojevi
- algebra i funkcije
- oblik i prostor
- mjerenje
- podatci
- infinitezimalni račun

## UČENIČKA POSTIGNUĆA

UČENIČKA POSTIGNUĆA (odgojno-obrazovni ishodi, ishodi učenja)

= **jasno i precizno** napisane izjave o tome što bi učenik trebao:

- znati,
- razumjeti,
- moći napraviti (demonstrirati, pokazati)
- vrednovati...

kao rezultat procesa učenja.

- **odnose se na učenika**, a ne na nastavnika
- **moraju biti provjeriva – mjeriva (koncepti) ili opaziva (procesi)**

## O POJMU PRAĆENJA, VREDNOVANJA I OCJENJIVANJA

PROCJENJIVANJE UČENIKA U NASTAVI (eng. assessment)

= **PRAĆENJE, VREDNOVANJE I OCJENJIVANJE UČENIČKIH POSTIGNUĆA**

= **proces prikupljanja dokaza o učenikovom znanju matematike, sposobnosti upotrebe matematike i stavovima prema matematici, te korištenja tih dokaza u različite svrhe**

- ne sastoji se samo od ocjenjivanja kratkih i duljih pisanih provjera na kraju neke nastavne teme, s ciljem provjere (ne)postizanja programom propisanih ishoda učenja – **sumativno procjenjivanje**
- treba biti dio svakodnevne nastave – **formativno procjenjivanje**
- ograničimo li ga samo na pisane provjere učeničkog matematičkog znanja i vještina istog tipa, propuštamo vidjeti kako procjenjivanje može dati bitne informacije za proces poučavanja i pomoći učenikom napredovanju

## SVRHA PROCJENJIVANJA UČENIKA NASTAVI

Tri različite, no usko povezane svrhe procjenjivanja u nastavi:

### 1. Procjenjivanje kao preduvjet učenja (procjenjivanje za učenje)

- učitelju pruža informaciju kako prilagoditi i diferencirati poučavanje i učeničke aktivnosti (aktivnosti učenja)
- uvažava da svaki učenik uči na sebi svojstven način, no prepoznaje da postoje predvidivi obrasci i putovi koje slijedi mnogo učenika
- iziskuje pažljivi učiteljev dizajn kako bi mu prikupljene informacije mogle poslužiti ne samo za utvrđivanje što učenici znaju, već i za stjecanje dubljeg uvida u to kako, kada i da li uopće učenici primjenjuju ono što znaju

## SVRHA PROCJENJIVANJA UČENIKA NASTAVI

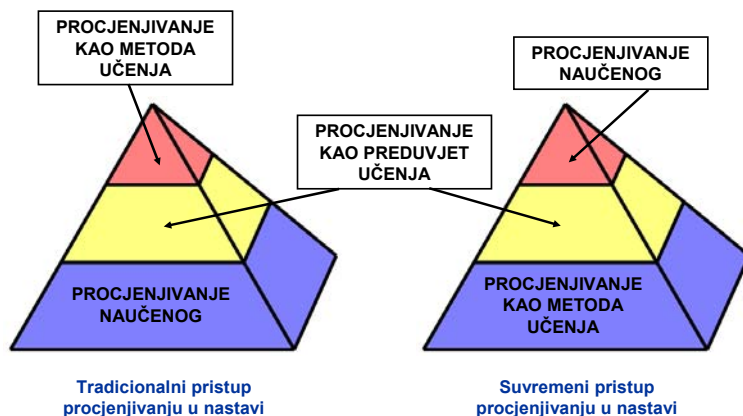
### 2. Procjenjivanje kao metoda učenja

- proces razvoja i podupiranja učeničke metakognicije
- učenici prate, nadziru i reguliraju svoje učenje
- učitelj učenicima treba pomoći razviti, uvježbati i "udomačiti" refleksiju i kritičko mišljenje o vlastitom učenju

### 3. Procjenjivanje naučenog

- po prirodi je sumativnog karaktera
- koristi se kao potvrda jesu li učenici postigli kurikulumom postavljene ishode učenja
- služi i međusobnoj usporedbi učenika

## URAVNOTEŽENA SVRHA PROCJENJIVANJA UČENIKA



## ŠTO PROCJENJUJEMO U NASTAVI?

### PROCJENJUJEMO (PRATIMO I VREDNUJEMO):

- **matematičko znanje** (koncepti i postupci)
- **matematičke procese**
  - primjenu znanja i rješavanje problema
    - odabir odgovarajuće metode, strategije, postupka, algoritma...
    - korištenje matematičkih prikaza
    - matematičko modeliranje
    - primjena matematičkih operacija
    - rješavanje rutinskih problema
  - matematičko zaključivanje
    - analiza, generalizacija, sinteza, vrednovanje, rješavanje nerutinskih problema
- **produktivnu dispoziciju** (povjerenje u vlastite matematičke sposobnosti)

## PRIMJERI PROCJENJIVANJA KAO PREDUVJETA ZA USPJEŠNO UČENJE

### PRIMJER. Razlomci

Prije započinjanja poučavanja i učenja operacija zbrajanja i oduzimanja razlomaka, nužno je procijeniti što svaki učenik razumije o razlomcima, koje su "rupe" u njegovom razumijevanju razlomaka i koji su njegovi misaoni procesi kad radi s razlomcima.

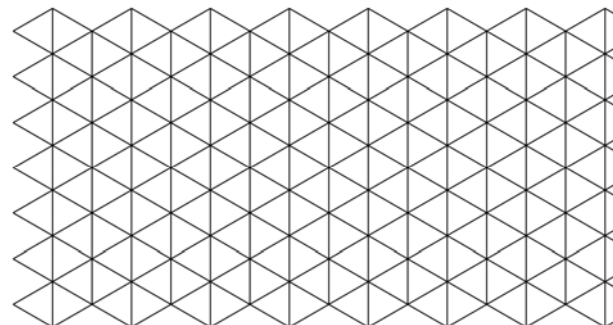
Preciznije, **treba prikupiti informacije o učeničkom vezanom uz sljedeće ishode učenja iz prethodnih odgojno-obrazovnih razdoblja:**

- **osnovni koncepti i prikaz razlomka:** prikazuje razlomke pomoću konkretnih modela (stvarnih objekata prikladnih oblika), grafički (slikovni), riječima i simbolički te s lakoćom prelazi iz jednog prikaza u drugi
- **redanje razlomaka po veličini:** samostalno po veličini reda niz razlomaka koji u sebi sadrži različite kombinacije uvjeta
- **ekvivalentni razlomci:** za dani razlomak može pronaći i iskazati cijeli niz njemu ekvivalentnih razlomaka
- **komuniciranje matematičkog mišljenja vezanog uz razlomke:** prikazuje svoj rad s jasnim i potpunim objašnjenjima; precizno uporebljava matematički jezik

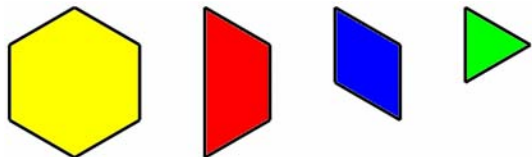
### Pogledajmo primjer kako se to moglo učiniti.

Učenici su na raspolaganju, na koji su god način željeli, imali:

- ravnalo
- papire s trokutastom mrežom



- komplet "razlomačkih pločica" koji sadrži i pločice ovih oblika:

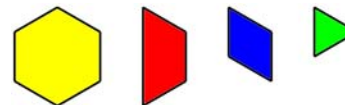


**Bilo im je zadano šest zadataka, svaki na svom radnom listu.**

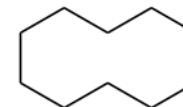
- Za svaki zadatak na radnom listu trebali su prikazati misaone procese kojima su došli do njegova rješenja, što su mogli učiniti crtanjem, pisanjem ili na oba načina.
- Prvi zadatak mogli su riješiti zajednički, radeći u skupinama.**
- Preostalih pet zadataka svaki je učenik trebao riješiti samostalno, no kasnije je svoje objašnjenje podijelio s drugim učenikom, raspravljajući u paru.

#### Zadaci:

- Ovaj zadatak možeš rješavati radeći u skupini. Trebat će ti sljedeće razlomačke pločice.



Pretpostavi da sljedeći oblik predstavlja jedno cijelo.



Postavljanjem razlomačkih pločica na ovaj oblik, na što je moguće više različitih načina prikaži jedan ili više sljedećih razlomaka:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}.$$

Nacrtaj svaki pronađeni ekvivalentni razlomak i zapiši ga simbolima.

- Koji je razlomak veći:  $\frac{1}{6}$  ili  $\frac{1}{5}$ ? Prikaži ili objasni svoje mišljenje.

- Zamijeni znak "?" brojem kako bi sljedeća jednakost bila istinita:  $\frac{18}{24} = \frac{6}{?}$ .

- Sljedeće razlomke poredaj po veličini, od najmanjega do najvećeg:

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{5}.$$

- Suzana ima 11 kolačića i želi ih ravnomjerno podijeliti sa svoje troje prijatelja. Koliko će kolačića dobiti Suzana i svako od njenih prijatelja? Pokaži dijagramom svoje zaključivanje.
- (a) Andrea i Alen imaju istu vrstu čokoladnog prutića. Andrei je ostalo još  $\frac{3}{4}$  njenog prutića, a Alenu još  $\frac{7}{12}$  njegovog. Kome je od njih ostalo više čokolade? Pokaži dijagramom svoje zaključivanje.
- (b) Koliko još zajedno čokolade imaju Andrea i Alen?

**Na kraju rada na zadacima, učenici su zamoljeni da još jednom promotre svoje radne listove i razdvoje ih u dvije grupe:**

- u prvu grupu stavljaju radne listove sa zadacima za koje smatraju da su ih razumjeli i svaki takav radni list označe znakom "+"
- u drugu grupu razvrstavaju zadatke za koje misle da nisu u potpunosti razumjeli ili nisu znali kako postupiti te ih označavaju znakom "?"

Učiteljica je pregledala sve učeničke radove i vratila ih učenicima na početku sljedećeg sata.

**Učenici su potom u parovima jedno drugome opisali svoje zaključivanje i postupke rješavanja zadataka.**

Zadatak svakog člana para bio je tražiti od partnera što je moguće više informacija i pojašnjenja o njegovom načinu zaključivanja u pojedinom zadatku.

**Za vrijeme ove razmjene mišljenja i iskustava, učiteljica je obilazila učenike, pratila njihov razgovor i pisala zabilješke o njihovom razumijevanju, "rupama" u razumijevanju i miskoncepcijama.**

**Rad na zadacima nastavljen je razrednom diskusijom u kojoj je učiteljica postavila sljedeća pitanja i na njih dobila ove odgovore.**

*Učiteljica:* Započnimo drugim zadatkom. Sabrina, koji je razlomak veći:  $1/6$  ili  $1/5$ ?

Kako to znaš?

*Sabrina:*  $1/5$  je veća. Znam, zato što sam nacrtala dva jednaka kruga i jedan od njih podijelila na 5 jednakih dijelova, a drugi na 6. Kad ih pogledamo, kriška koja predstavlja  $1/5$  je veća. Da je pizza, radije bih ju dijelila na 5 nego na 6 dijelova. Tako dobijem više.

*Učiteljica:* Ivane, slažeš li se?

*Ivan:* Da, slažem se. Ako se cijela stvar podijeli na 5 dijelova, onda su ti dijelovi veći nego ako se podijeli na 6 dijelova.

*Učiteljica:* Dakle,  $1/5$  je veća od  $1/6$  iako je 6 veće od 5. Marko, je li to istina?

*Marko:* Da, iako se čini čudnim. No, ako pogledamo na sliku, možemo to vidjeti. Kad je dijelova manje, broj na dnu razlomka je manji a dijelovi su veći.

*Učiteljica:* Ana, što misliš o trećem zadatku? Čime treba zamijeniti "?" ?

*Ana:* Nisam baš sigurna. Mogao bi biti 8. Pokušala sam razmišljati o 24 bombona. Ako od njih oduzmem 18, to je 18 od 24. Dakle, ako imam 6 bombona od njih nekoliko, i ako je to isto, onda bi moglo biti od 8, ali imala bih samo 6 bombona. Ne znam. Zbunjujuće je.

*Učiteljica:* Jesi li ti razmišljala o tome, Sonja?

*Sonja:* Da,  $18/24$  je  $3/4$ , a  $6/8$  je isto  $3/4$ . Dakle, Ana je u pravu. Umjesto "?" treba pisati 8.

*Učiteljica:* Pogledajmo četvrti zadatak. Svene, koji je po tebi najveći razlomak i zašto?

*Sven:* Najveći su  $4/3$  i  $7/6$  jer su veći od 1.  $4/3$  je isto što i  $8/6$ , što je veće od  $7/6$ . Dakle,  $4/3$  je najveći razlomak.

**Na temelju zapažanja za vrijeme učeničkog grupnog i individualnog rada na zadacima, njihovog objašnjavanja svog zaključivanja učeniku u paru, pregleda ispunjenih radnih listova i postavljanja pitanja u razredu, učiteljica je sastavila sažetak svojih zapažanja.**

SAŽETAK ZAPAŽANJA Predznanje razlomaka		
UČENIK/CA	RAZUMIJEVANJE	ZAPAŽANJE, IDEJE I NASTAVAK RADA
Sven Katić	Spretno prikazuje razlomke pomoću konkretnih modela (oblika), grafički (slikovno) i simbolički te prelazi iz jednog prikaza u drugi. Ima dobar osjećaj za ekvivalentne razlomke u različitim prikazima. Korektno slaže čitave nizove ekvivalentnih razlomaka. Koristi matematički jezik. Obrazlaže jasno i precizno u usmenom i pisanom obliku. Razumije sva pitanja, uključujući i osnovni zadatak sa zbrajanjem razlomaka.	Spreman je za zbrajanje i oduzimanje razlomaka. Za njega treba pripremiti izazovne situacije u kojima će primjenjivati razlomke i njihove složene prikaze.
Ana Marić	Spremno je i s lakoćom radila s danim konkretnim modelima (oblicima) i pronašla je nekoliko ekvivalentnih razlomaka. Dala je korektan odgovor na pitanje s jednadžbom $18/24 = 6/?$ , no bila je vrlo nesigurna kada je svoje zaključivanje opisivala drugom učeniku. Samo je djelomično riješila zadatke i stavila je znak upitnika na sve svoje radne listove.	Pogrešno sam pretpostavila da Ana ima bolje razumijevanje nego što je to bila u stanju pokazati. Čini se da ima nekih privatnih problema. S njom trebam individualno raditi kako bih vidjela što ju zbunjuje i osigurati joj mnogo prilika za vježbu i konsolidiranje učenja.

UČENIK/CA	RAZUMIJEVANJE	ZAPAŽANJE, IDEJE I NASTAVAK RADA
Marko Živić	Brzo je i precizno riješio zadatak s razlomačkim pločicama i krenuo se igrati s alternativnim konfiguracijama. Pri dogovaranju s drugim učenikom nije upotrijebio jezik razlomaka niti matematički jezik, nego je jednostavno rekao: "Ovo ide ovako, a ovo ovako." Kad je upitan kako to zna, odgovorio je: "Pa to je očito!". Ipak, mogao bi artikulirati svoje misaoone procese pozivajući se na slike. Na satu nije riješio zadatak s redanjem razlomaka po veličini jer je razlomke prvo trebao vizualizirati slikom, no zadatke koje je riješio, riješio je korektno.	Izgleda da dobro razumije kako razlomci "funkcioniraju", no treba naučiti matematički jezik (npr. izraze "brojnik" i "nazivnik") i napredovati od konkretnih prema apstraktnim prikazima matematičkih koncepata. Ima poteškoća u primjeni koncepata u situacijama drukčijima od površine, moguće zato što ih ne može vizualizirati.
Sonja Komin	Ima solidno poimanje pojma razlomka. Ustrajala je na stavu da je $1/2$ jedini "pravi" zapis za polovinu objekta. Shvatila je da su joj ostali razlomci ekvivalentni, no po njenom su mišljenju oni "pogrešni". Isto je zaključivanje vidljivo i u njenom pisanom radu. Pronašla je odgovore na postavljena pitanja i korektno ih prikazala simbolima (brojevima), ali ne i grafički. Željela je saznati "pravila" za rješavanje zadataka, što je ograničilo njenu spremnost za eksperimentiranje s različitim konfiguracijama u prvom zadatku.	Ima dobro razumijevanje i spremna je za složenije zadatke, no zapela je za "pravila". S više iskustva s konkretnim modelima (objektima i oblicima) za prikaz razlomaka mogla bi prepoznati da je pronalaženje alternativa važna strategija pri rješavanju problema i da često ima i drugih "pravih" odgovora. Bit će izazov uvjeriti ju da je korištenje konkretnih modela prihvatljiv način rješavanja problema.

UČENIK/CA	RAZUMIJEVANJE	ZAPAZANJE, IDEJE I NASTAVAK RADA
Ivan Juričić	Iako nije obilježio odgovarajućim znakom svoje radne listove s prvim i drugim zadatkom, bio je u stanju drugom učeniku govoriti o razlomljenim dijelovima cjeline i ekvivalentnim razlomcima. Započeo je raditi na zadacima 3 – 6, no nije dao nikakvih pisanih objašnjenja.	Dobro napreduje prema svom individualiziranom programu. Trebalo nastaviti raditi s konkretnim modelima kako bi učvrstio svoje razumijevanje ekvivalentnih razlomaka i redanje razlomaka po veličini. Uskoro bi trebao biti spreman uz pomoć krenuti na zbrajanje i oduzimanje razlomaka.
Elvis Oršoš	Korektno je riješio sve zadatke služeći se dijagramima. Nema razvijen matematički jezik, što nije iznenađujuće, budući da je njegovo znanje hrvatskog jezika još uvijek vrlo ograničeno. U radu u grupi i paru efikasno je koristio slike i gestikulaciju te su drugi učenici mogli razumjeti njegovo zaključivanje i prevesti ga na matematički jezik.	Trebalo raditi na matematičkom jeziku i na sigurnosti u ono što zna. Spreman je i za zahtjevniji rad s razlomcima. Kontaktirat ću Elvisove roditelje kako bih ih obavijestila o Elvisovom radu budući da su izrazili zabrinutost za njegov napredak.
Lidija Vrbanić	Prvi je zadatak bio osmišljen imajući u vidu baš Lidiju. Nakon što su joj drugi učenici iz grupe pokazali kako prikazati jednostavne razlomke pomoću pločica i oblika ( $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ ), Lidija je dani oblik (jedno cijelo) popunjavala različitim konfiguracijama. Svo je vrijeme rada bila tiha. Budući da nije uspjela artikulirati svoje misao procese tijekom rješavanja zadataka, nisam uspjela baš precizno odrediti dubinu njenog razumijevanja.	Uzevši u obzir individualizirani program, nadala sam se da će mi prvi zadatak pomoći vidjeti što Lidija razumije. Nažalost, nisam uspjela. Nastavit ću pokušavati raditi individualno s njom kako bih stekla osjećaj kako postupati dalje.

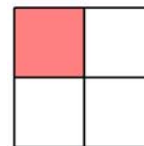
## PRIMJERI PROCJENJIVANJA KAO PREDUVJETA ZA USPJEŠNO UČENJE (2)

### PRIMJER. Razlomci II

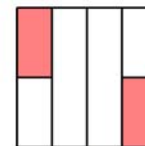
Za stjecanje uvida u učeničko razumijevanje koncepta razlomka dobro je postaviti i ovakav zadatak.

#### Zadatak.

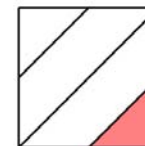
Na kojim je slikama osjenčana  $\frac{1}{4}$ ?



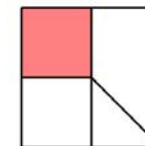
A



B



C

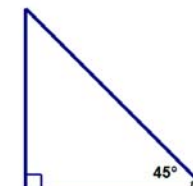
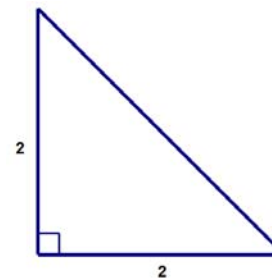


D

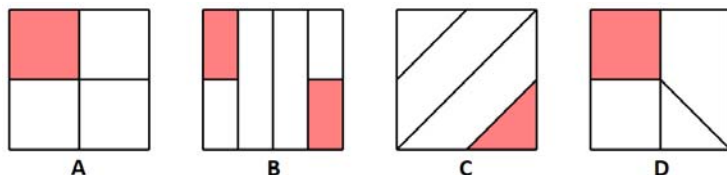
## PRIMJERI PROCJENJIVANJA KAO PREDUVJETA ZA USPJEŠNO UČENJE (3)

### PRIMJER. Trokuti

Reci sve što znaš o trokutima na slici.



Problemski zadatak otvorenog tipa!



- Neprepoznavanje četvrtine na slici B ukazuje na miskoncepciju da se slikovni prikaz razlomka mora sastojati od samo jednog dijela.
- Pogrešno prepoznavanje četvrtine na slici C ukazuje na miskoncepciju da je svaka podjela slike na 4 dijela njena podjela na četvrtine.
- Neprepoznavanje četvrtine na slici D ukazuje na miskoncepciju da podjela mora biti na sukladne dijelove.



## RUBRIKE I INDIKATORI POSTIZANJA RAZINE

Problemske zadatke možemo iskoristiti za stjecanje dubljeg uvida u učenikovo znanje i način razmišljanja.

Učenička rješenja analiziramo usporedbom s unaprijed postavljenim kriterijima, opisanim pomoću **INDIKATORA**.

### RUBRIKA

= jedno ili višedimenzionalna tablica kriterija postavljenih na nekoliko razina

## JEDNOSTAVNE BODOVNE RUBRIKE

### JEDNOSTAVNA ČETVERORAZINSKA BODOVNA RUBRIKA

NA CILJU JE ILI BLIZU NJEGA	4	<b>IZVRŠNO: POTPUNO ISPUNJENJE ZAHTJEVA</b> Strategija i njena primjena zadovoljavaju sadržajne, procesne i kvalitativne zahtjeve zadatka. Komunikacija je efikasna, što ne znači da mora biti opširna. Moguće su minorne pogreške.
	3	<b>VRLO DOBRO: ZADOVOLJAVAJUĆE ISPUNJENJE ZAHTJEVA</b> Uz minimalnu podršku može doći do potpunog ispunjenja zahtjeva. Pogreške su minorne pa je učitelj siguran da je razumijevanje dovoljno za ispunjenje cilja.
NIJE JOŠ NI BLIZU	2	<b>MARGINALNO: DJELOMIČNO ISPUNJENJE ZAHTJEVA</b> Riješen je dio zadatka, no nedostaje dokaza razumijevanja ili nerazumijevanja. Potrebna je direktna pomoć ili dodatno poučavanje.
	1	<b>NEDOVOLJNO: ZANEMARIVO POSTIGNUĆE</b> Pokušano je riješiti zadatak i uložen je neki matematički trud. Mogu postojati malo ili nimalo uspješni fragmenti ispunjenja zahtjeva.
???	0	<b>NIKAKVO: NEPOSTOJEĆE POSTIGNUĆE</b> Nije dokumentiran niti pokušaj rješavanja zadatka.

## JEDNOSTAVNE BODOVNE RUBRIKE

### JEDNOSTAVNA TRORAZINSKA BODOVNA RUBRIKA

3	<b>IZNAD I ISPRED</b> Pokazuje jasno razumijevanje. Komunicira koncept u različitim prikazima. Primjenjuje primjerene metode. Dokumentira svoju ideju bez da ga/ju se upozori na to. Pokazuje kreativnost. Nadilazi okvire zadanog problema.
2	<b>IDE U DOBROM SMJERU</b> Pokazuje razumijevanje ili dobro napreduje u njegovom razvoju. Koristi zadane modele. Zadatak rješava s prisutnim samo malim pogreškama. Koristi uspješne pristupe.
1	<b>NIJE JOŠ NI BLIZU</b> Pokazuje nejasnoće ili nerazumijevanje. Ideju modelira samo uz pomoć. Čini značajne pogreške ili omaške. Koristi neuspješne pristupe.
0	<b>???</b> Nije dokumentiran niti pokušaj rješavanja zadatka.

## SLOŽENIJE BODOVNE RUBRIKE

Za jasniju i precizniju procjenu matematičkih procesa pri rješavanju problemskih zadataka koriste se **višedimenzionalne bodovne rubrike**.

U široj je primjeni tzv. **trodimenzionalna četverorazinska bodovna rubrika**.

Njene dimenzije su:

- matematičko znanje:** znanje matematičkih koncepata, principa i postupaka koji vode korektnom rješenju problemskog zadatka. *Zna li učenik/ca riješiti zadatak?*
- strateško znanje:** prepoznavanje i primjena strategija rješavanja problemskog zadatka, tj. prepoznavanje i primjena važnih elemenata problemskog zadatka kojima se prikazuju i povezuju koncepti koji vode njegovom rješenju (npr. modeli, dijagrami, simboli, algoritmi). *Kako učenik/ca planira rješavanje zadatka?*
- obrazloženje:** pisano obrazloženje plana i koraka procesa rješavanja problemskog zadatka, pri čemu je potrebno argumentirano obrazložiti svaki provedeni korak. Iako su važni, duljina odgovora, pravopis i gramatika nisu kritični elementi ove dimenzije. *Može li učenik/ca objasniti svoj postupak rješavanja?*

### TRODIMENZIONALNA BODOVNA RUBRIKA – dimenzija MATEMATIČKO ZNANJE

BODOVNA RAZINA	MATEMATIČKO ZNANJE
4	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•pokazao/la potpuno razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka te informacija potrebnih za njegovo rješavanje</li> <li>•upotrijebio/la prikladni i precizni matematički jezik, nazivlje i oznake, uključujući i označavanje, odnosno isticanje odgovora (npr. na danoj slici) ako je potrebno</li> <li>•u cijelosti i korektno izvršio/la algoritamske i računske postupke.</li> </ul>
3	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•pokazao/la gotovo potpuno razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka te informacija potrebnih za njegovo rješavanje</li> <li>•upotrijebio/la uglavnom korektni matematički jezik, nazivlje i oznake</li> <li>•u cijelosti izvršio/la algoritamske postupke; općenito korektno, uz moguće manje pogreške, izvršio/la računske postupke.</li> </ul>

### TRODIMENZIONALNA BODOVNA RUBRIKA – dimenzija MATEMATIČKO ZNANJE

BODOVNA RAZINA	MATEMATIČKO ZNANJE
2	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•pokazao/la barem neko, ali djelomično razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka te informacija potrebnih za njegovo rješavanje</li> <li>•upotrijebio/la barem neko korektni matematički jezik, nazivlje i oznake</li> <li>•možda učinio/la velike algoritamske i/ili računske pogreške.</li> </ul>
1	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•pokazao/la vrlo ograničeno ili nikakvo razumijevanje i sposobnost primjene matematičkih koncepata, principa i postupaka te informacija potrebnih za njegovo rješavanje</li> <li>•možda pogrešno upotrijebio/la matematički jezik, nazivlje i oznake ili ih uopće nije upotrijebio/la</li> <li>•pokazao/la barem pokušaj rješavanja zadatka.</li> </ul>
0	<p>Učenik/ca:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•nije niti pokušao/la riješiti zadatak.</li> </ul>

### TRODIMENZIONALNA BODOVNA RUBRIKA – dimenzija STRATEŠKO ZNANJE

BODOVNA RAZINA	STRATEŠKO ZNANJE
4	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•prepoznao/la sve važne elemente zadatka i pokazao/la potpuno razumijevanje njihovih međusobnih veza i odnosa</li> <li>•potpuno dokumentirao/la prikladnu strategiju i prikaze koji vode korektnom rješenju zadatka.</li> </ul>
3	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•prepoznao/la većinu važnih elemenata zadatka i pokazao/la općenito razumijevanje njihovih međusobnih veza i odnosa</li> <li>•gotovo potpuno dokumentirao/la prikladnu strategiju i prikaze koji vode korektnom rješenju zadatka.</li> </ul>

### TRODIMENZIONALNA BODOVNA RUBRIKA – dimenzija STRATEŠKO ZNANJE

BODOVNA RAZINA	STRATEŠKO ZNANJE
2	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•prepoznao/la neke važne elemente zadatka, ali je pokazao/la vrlo ograničeno razumijevanje njihovih međusobnih veza i odnosa</li> <li>•dao/la barem neku naznaku strategije i/ili prikaza koji vode korektnom rješenju zadatka.</li> </ul>
1	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•preveliku pažnju posvetio/la elementima koji ne vode rješenju zadatka ili nije prepoznao/la važne elemente zadatka</li> <li>•prikazao/la ili naznačio/la neprimjerenu i/ili pogrešnu strategiju i/ili prikaz za rješavanje ovog problema, koje je možda i teško razabrati.</li> </ul>
0	<p>Učenik/ca:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•nije prikazao/la nikakvu strategiju rješavanja zadatka.</li> </ul>

## TRODIMENZIONALNA BODOVNA RUBRIKA – dimenzija OBRAZLOŽENJE

BODOVNA RAZINA	OBRAZLOŽENJE
4	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•dao/la cjelovito i detaljno pisano obrazloženje procesa rješavanja zadatka; jasno i matematički precizno objasnio/la <b>što</b> je i <b>zašto</b> napravio/la</li> <li>•možda nacrtao/la dijagram s potpunim objašnjenjem svih njegovih elemenata.</li> </ul>
3	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•dao/la gotovo cjelovito pisano obrazloženje procesa rješavanja zadatka; jasno i matematički precizno objasnio/la <b>što</b> je napravio/la i započeo/la obrazlagati <b>zašto</b> je to napravio/la</li> <li>•možda nacrtao/la dijagram s objašnjenjem većine njegovih elemenata.</li> </ul>

## TRODIMENZIONALNA BODOVNA RUBRIKA – dimenzija OBRAZLOŽENJE

BODOVNA RAZINA	OBRAZLOŽENJE
2	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•dao/la neko pisano obrazloženje procesa rješavanja zadatka; ili je objasnio/la <b>što</b> je napravio/la ili je napomenuo/la <b>zašto</b> je to napravio/la, ali ne i oboje</li> <li>•dao/la objašnjenje koje je nejasno, teško za interpretaciju ili ne odgovara potpuno prikazanom procesu rješavanja</li> <li>•možda nacrtao/la dijagram s objašnjenjem nekih njegovih elemenata.</li> </ul>
1	<p>U svom rješenju zadatka, učenik/ca je:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•dao/la minimalno pisano obrazloženje procesa rješavanja zadatka; možda uopće nije objasnio/la <b>što</b> je i <b>zašto</b> napravio/la</li> <li>•dao/la objašnjenje koje ne odgovara prikazanom procesu rješavanja</li> <li>•možda nacrtao/la dijagram s minimalnom diskusijom nekih njegovih elemenata; nejasno objasnio/la važne elemente dijagrama.</li> </ul>
0	<p>Učenik/ca:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•nije podastrijeo/la nikakvo pisano objašnjenje procesa rješavanja zadatka.</li> </ul>

## TRODIMENZIONALNA BODOVNA RUBRIKA - PRIMJER

### ZADATAK.

Branko je prodavao ulaznice za rukometnu utakmicu. Prodao je ukupno 50 ulaznica i time zaadio 1 800 kn. Cijena jedne ulaznice za odrasle je 50 kn, a cijena jedne studentske ulaznice 30 kn.

Koliko je Branko prodao ulaznica za odrasle, a koliko studentskih ulaznica?

Prikaži cijeli svoj rad. Riječima objasni **kako** si došao/la do odgovora i **zašto** si napravio/la pojedini korak u postupu rješavanja zadatka.

### Rješenje.

Prikazat ćemo učenička rješenja i bodovati ih prema trodimenzionalnoj četverorazinskoj rubrici.

### Učeničko rješenje 1.

50 ulaznica  
 $O = 50, S = 30$

$$\begin{aligned} 50x + 30y &= 1800 \\ x + y &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -50x - 30y &= -1800 \\ \hline 50x + 50y &= 2500 \\ \hline 20y &= 700 \\ y &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50x + 30y &= 1800 \\ -30x - 30y &= -1500 \\ \hline 20x &= 300 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 750 + 1050 &= 1800 \\ 15 + 35 &= 50 \end{aligned}$$

Ulaznice za odrasle = 15  
 Studentske ulaznice = 35

Kako sam pogledao na zadatak, vidio sam da sadrži dvije nepoznanice  $x$  i  $y$  koje predstavljaju ulaznice za odrasle i studentske ulaznice. Zato sam postavio dvije jednačbe, jednu koja se odnosi na ukupnu cijenu ulaznica, a druga na njihov ukupni broj. Nakon što sam dobio jednačbe, primijenio sam metodu suprotnih koeficijenata i odredio  $x$  i  $y$ . Pomnožio sam prvu jednačbu s  $-1$  i drugu s  $50$  te ih zbrojio i dobio  $2y = 700$ . Podijelio sam jednačbu s  $2$  i dobio  $y = 35$ . Isti sam postupak primijenio na  $x$  i dobio  $20x = 300$  i podijelio sam jednačbu s  $20$  i dobio  $x = 15$ .

MATEMATIČKO ZNANJE	STRATEŠKO ZNANJE	OBRAZLOŽENJE
4 U odgovoru je vidljivo potpuno razumijevanje matematičkih koncepata i principa povezanih sa zadanim problemom. Zapisan je i korektan odgovor o broju od prodanih 15 ulaznica za odrasle i 35 studentskih ulaznica.	4 Odgovor odražava sustavnu strategiju (sustav dviju linearnih jednačbi s dvjema nepoznicama), koja uključuje sve važne elemente postavljenog problema.	4 Odgovor adresira i što je rađeno i zašto je rađeno (metoda suprotnih koeficijenata). Učinjena je i provjera dobivenog rješenja.

## Učeničko rješenje 2.

$$50 \text{ ulaznica} = 1800 \text{ kn}$$

$$18 \cdot 50 = 900$$

$$30 \cdot 30 = 900$$

$$48 = 1800 \text{ kn}$$

$$\begin{array}{r} 2 \text{ više!} \quad 20 \\ \underline{50} \\ 1000 \end{array}$$

$$20 \cdot 50 = 1000$$

$$30 \cdot 30 = 900$$

$$50 = 1900 \text{ kn}$$

$$\begin{array}{r} 15 \cdot 50 = 750 \\ \underline{35 + 30 = 1050} \\ 50 = 1800 \text{ kn} \end{array}$$

Prvo sam znao da imam 50 ulaznica za 1800 kn. Onda sam podijelio 1800 s 2 jer sam mislio da će biti jednako mnogo ulaznica za odrasle i studentskih ulaznica.  $1800 : 2 = 900$  pa sam podijelio 900 s 50 i dobio 18. Zatim sam pomnožio 3 sa 30 i dobio 900. Jedino mi nije odgovaralo što je  $18 + 30 = 38$ . Zato sam znao da moram povećati broj ulaznica za 2. Uzeo sam brojeve 20 i 30 jer je njihov zbroj 50.  $20 \times 50 = 1000$  i  $30 \times 30 = 900$  i  $1000 + 900 = 1900$ , što je previše. Zaključio sam da moram smanjiti broj ulaznica od 50 kn i povećati broj ulaznica od 30 kn. Uzeo sam brojeve 15 i 35 jer je 15 manje od 20, a 35 veće od 30. Dobio sam  $15 + 35 = 50$  ulaznica,  $15 \times 50 = 750$ ,  $35 \times 30 = 1050$ ,  $750 + 1050 = 1800$ . Prema tome, koristio sam ukupno 15 ulaznica za 50 kn i 35 ulaznica za 30 kn.

MATEMATIČKO ZNANJE	STRATEŠKO ZNANJE	OBRAZLOŽENJE
4 U odgovoru je vidljivo potpuno razumijevanje matematičkih koncepata i principa povezanih sa zadanim problemom. Zapisan je i korektan odgovor o broju od prodanih 15 ulaznica za odrasle i 35 studentskih ulaznica.	4 Odgovor odražava sustavnu strategiju (metoda pokušaja i promašaja višekratnicima od 50 kn i 30 kn), koja uključuje sve važne elemente postavljenog problema.	4 Odgovor adresira i što je rađeno i zašto je rađeno ("... Jedino mi nije odgovaralo što je $18 + 30 = 38$ . Zato sam znao da moram povećati broj ulaznica za 2. Uzeo sam brojeve 20 i 30 jer je njihov zbroj 50...").

## Učeničko rješenje 3.

Korak I. U zadatku piše da je prodano 50 ulaznica. Ulaznica za odrasle košta 50 kn, a za studente 30 kn. Prvo ću pogledati koliko puta 50 ide u 1800 bez da premašim 50.

$$\begin{array}{r} 1800 : 50 = 180 : 5 = 36 \\ 30 \\ 0 \end{array}$$

Korak II. 50 u 1800 ide 36 puta, no to je onda samo 36 ulaznica. Sada dijelimo 1800 na 30,  $1800 : 30 = 60$

Korak III. 30 u 1800 ide 60 puta, što je previše. Zato ću oduzeti 6 ulaznica od 50 kn od 36 ulaznica. Sada je to  $30 \times 50 = 1500$  kn.

Korak IV. Sada oduzimam  $1800 - 1500$  kn i dobijem 300. To je djeljivo s 30.  $300 : 30 = 10$

Odgovor: Došao sam do 10 što dokazuje da je prodano 30 ulaznica za odrasle i 10 za studente.

MATEMATIČKO ZNANJE	STRATEŠKO ZNANJE	OBRAZLOŽENJE
2 U odgovoru je vidljivo neko razumijevanje matematičkih koncepata i principa povezanih sa zadanim problemom. Zapisan je i pogrešan odgovor o broju od prodanih 30 ulaznica za odrasle i 10 studentskih ulaznica.	3 U odgovoru je prepoznata većina važnih elemenata postavljenog problema i proces rješavanja je gotovo potpun (ukupna cijena dijeljena je s 50 i 30 i nakon toga je vršeno podešavanje).	4 Odgovor adresira i što je rađeno i zašto je rađeno ("...Prvo ću pogledati koliko puta 50 ide u 1800 bez da premašim 50... 30 u 1800 ide 60 puta, što je previše. Zato ću oduzeti 6 ulaznica od 50 kn od 36 ulaznica...").

## ALATI ZA PRAĆENJE I EFIKASNO BILJEŽENJE ZAPAŽANJA

Za neposredno i brzo bilježenje zapažanja možemo koristiti i neke od sljedećih **alata**:

- **anegdotalne zabilješke**
- **rubrike zapažanja**
- **kontrolne popise i rubrike za svakog učenika**
- **kontrolne popise zapažanja za cijeli razredni odjel**

## RUBRIKA ZAPAŽANJA

RUBRIKA ZAPAŽANJA Sastavljanje cijelog od razlomaka		
<b>IZNAD I ISPRED</b> Jasno razumijevanje. Komunicira koncept u različitim prikazima. Dokumentira svoju ideju bez da ga/ju se upozori na to. Sastavlja cijelo od razlomaka prikazanih na štapićima i skupovima objekata.	Marija Karlo Ilan	Vesna
<b>IDE U DOBROM SMJERU</b> Pokazuje razumijevanje ili dobro napreduje u njegovom razvoju. Koristi zadane modele. Može sastaviti cijelo ili od razlomaka prikazanih na štapićima ili skupovima objekata. Oklijeva. Treba pomoć pri prepoznavanju jediničnog razlomka (odgovarajućeg razlomka s brojnikom 1).	Fran (štapić) Jakov (štapić) Ivana (skup) Milena (skup)	Koraljka (štapić) Dean (skup) Davor (štapić)
<b>NIJE JOŠ NI BLIZU</b> Nejasnoće ili nerazumijevanje. Ideju modelira samo uz pomoć. Treba pomoć pri izvođenju ove aktivnosti. Nema samopouzdanja.	Mirko Slavko Nina	

## KONTROLNI POPIS I RUBRIKA za svakog učenika

IME I PREZIME UČENIKA/CE: Ante Antić				
RAZLOMCI	NIJE JOŠ NI BLIZU	IDE U DOBROM SMJERU	IZNAD I ISPRED	KOMENTARI
razumije brojnik/nazivnik		+		
modeli površine		+		Upotrijebio je razlomačke pločice za prikaz 2/3 i 3/6.
modeli skupova	+			
koristi razlomke u realnom kontekstu	+			
procjenjuje vrijednosti razlomaka		+		Smislenije procjenjuje.
RJEŠAVANJE PROBLEMSKIH ZADATAKA				
razumije problem prije početka rada na njemu		+		Iskazao je problem svojim riječima
orvarena je preuzimanju rizika	+			Odupire se upotrebi apstraktnih modela.
provjerava i opravdava rezultate				

## KONTROLNI POPIS ZAPAŽANJA za cijeli razredni odjel

TEMA: Zbrajanje prirodnih brojeva misaonim računom	NIJE JOŠ NI BLIZU Ne može zbrajati napamet.	IDE U DOBROM SMJERU Ima barem jednu strategiju.	IZNAD I ISPRED Koristi različite metode s različitim brojevima.	KOMENTARI
IMENA UČENIKA				
Ivan Juričić		+	25.09.2011. 28.09.2011.	
Sven Katić	+	+	22.09.2011. 25.09.2011.	Poteškoće sa zadacima u kojima treba pregrupirati pribrojнике.
Ana Marić			+	22.09.2011. Koristi fleksibilne pristupe.
Elvis Oršoš		+		Prebrojava dekadске jedinice, a onda pribraja jedinice.
Lidija Vrban	+			Počinje zbrajati dekadске jedinice.
Marko Živić		+		Koristi tablicu zbrajanja.