# Geometrijske konstrukcije

Sanja Rukavina
sanjar@math.uniri.hr

D. Palman: Geometrijske konstrukcije, Element, Zagreb, 1996.

“Pod imenom *Geometrijske konstrukcije* razumijevamo onaj dio geometrije u ravnini (planimetrije) koji planimetrijske probleme rješava konstruktivnom metodom, o čemu će ovdje biti riječi.”

- **GEOMETRIJSKA FIGURA** – bilo koji podskup točaka promatrane ravnine

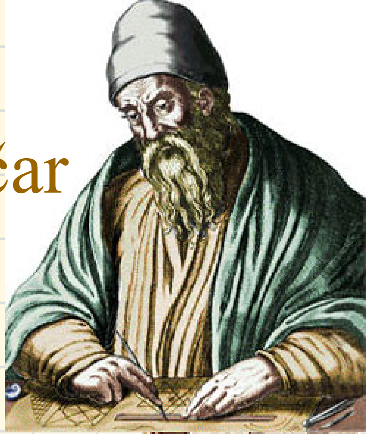
- **KONSTRUKTIVNI ZADATAK** – zadatak koji se sastoji u tome da se konstruira neka figura odabranim dopuštenim spravama, ako je dana neka druga figura i izvjesni odnosi između dane i tražene figure
  - svaki rješivi konstruktivni zadatak može se riješiti izvođenjem niza temeljnih konstrukcija

- Euklidske konstrukcije
- Hilbertove konstrukcije
- Mohr-Mascheronijeve konstrukcije
- Poncelet-Steinerove konstrukcije

# Euklidske konstrukcije

- jednobridno **ravnalo** (ravnalo kojemu možemo upotrebljavati samo jedan od dva međusobno paralelna brida) i **šestar** (s promjenjivim po volji velikim rasponom)

# Euklid (330 – 275 g.p.K.), starogrčki matematičar



- Euklid, Elementi I-VI, Kruzak, Zagreb, 1999.
  - **Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.**
  - **I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.**
  - **I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.**
  - I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.
  - I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Dopuštenom uporabom ravnala i šestara moguće je izvesti sljedeće operacije.

- Konstrukcija pravca koji sadrži dvije dane točke
- Konstrukcija sjecišta dvaju danih neparalelnih pravaca
- Konstrukcija kružnice sa središtem u danoj točki koja sadrži drugu danu točku
- Konstrukcija dvaju sjecišta dane kružnice i pravca, konstrukcija dvaju sjecišta danog pravca i kružnice
- Konstrukcija sjecišta dane kružnice i još jedne kružnice

# Temeljne konstrukcije:

- Prijenos dužina
- Prijenos kutova
- Konstrukcija simetrale i polovišta dužine
- Konstrukcija simetrale kuta i polovišta luka
- Konstrukcija pravca koji sadrži danu točku i koji je paralelan s danim pravcem
- Konstrukcija okomice iz dane točke na dani pravac
- Dijeljenje dužine na jednake dijelove i u danom omjeru
- Konstrukcija trokuta ako su mu poznate sve tri stranice
- Konstrukcija kružnog luka iz čijih se točaka vidi neka dužina pod danim kutom

# Hilbertove konstrukcije

- jednobridno **ravnalo** (ravnalo kojemu možemo upotrebljavati samo jedan od dva međusobno paralelna brida) i **prenositelj jedinične dužine** (šestar s nepromjenjivim rasponom)

# David Hilbert (1862 – 1942), njemački matematičar

- Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1930.
  - Iz danih točaka mogu se konstruirati sve one točke čija egzistencija proizlazi na osnovi četiri grupe aksioma euklidske geometrije: aksiomi veze, aksiomi uređaja, aksiomi kongruencije i aksiomi o paralelama
  - Aksiomi neprekinutosti čine petu grupu; uzimanjem u obzir tih aksioma dobili bismo euklidske konstrukcije

# Temeljne Hilbertove konstrukcije

- Konstruirati spojnicu dviju točaka, konstruirati sjecište neparalelnih pravaca
- Zadanom točkom konstruirati pravac koji je paralelan sa zadanim pravcem
- Konstruirati polovište dužine
- Konstruirati pravac okomit na zadani pravac
- Konstruirati simetralu kuta
- Danu dužinu nanijeti na dani pravac od dane točke
- Dani kut nanijeti na dani pravac od dane točke
- Za dane dužine s mjernim brojevima *a* i *b* konstruirati dužinu čiji je mjerni broj $x = a \cdot b$
- Za dane dužine s mjernim brojevima *a* i *b* konstruirati dužinu čiji je mjerni broj $x = a : b$
- Za dane dužine s mjernim brojevima *a* i *b* konstruirati dužinu čiji je mjerni broj $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Pomoću ravnala i prenositelja jedinične dužine možemo konstruirati sve one dužine čiji su mjerni brojevi izrazi koje dobijemo iz mjernih brojeva danih dužina pomoću zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i kvadratnog korijenovanja.

# Mohr – Mascheronijeve konstrukcije

- **šestar** (s promjenjivim po volji velikim rasponom)

# Georg Mohr (1640 – 1697), nizozemski matematičar

- Euclides Danicus, Amsterdam, 1672
  - Kopenhagen, 1928

- Euclides curiosus

# Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800), talijanski matematičar

- Geometria del compasso, Pavia, 1797.

Sve konstrukcije koje se mogu izvesti ravnalom i šestarom mogu se izvesti i samo šestarom.

Sve konstrukcije koje se mogu izvesti ravnalom i šestarom mogu se izvesti i samo šestarom.

- Samo pomoću šestara odrediti odrediti sjecište kružnice i pravca (zadanog dvjema točkama)

- Samo pomoću šestara odrediti sjecište dva pravca (zadanih  s po dvije točke)

# Poncelet – Steinerove kontrukcije

- jednobridno **ravnalo** (ravnalo kojemu možemo upotrebljavati samo jedan od dva međusobno paralelna brida)

- linearne konstrukcije

# Jean Victor Poncelet (1788 – 1867), francuski matematičar

- Traite des proprietes projectives des figures, Paris, 1822.
  - G. Mohr

# Jacob Steiner (1796 – 1862), švicarski matematičar

- Die geometrischen Konstruktionen ausgefuehrt mittes der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin, 1833.

Svaku geometrijsku konstrukciju koja se dade izvesti ravnalom i šestarom, možemo izvesti samo ravnalom ako imamo već danu (nacrtanu) jednu kružnicu s njezinim središtem.

Svaku geometrijsku konstrukciju koja se dade izvesti ravnalom i šestarom, možemo izvesti samo ravnalom  ako imamo već danu (nacrtanu) jednu kružnicu s njezinim središtem.

- odrediti odrediti sjecište kružnice i pravca
- odrediti sjecište dviju kružnica

# Rješivost konstrukcija ravnalom i šestarom

- Ako je $x$ neki nenegativni realni broj koji možemo dobiti pomoću konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja i konačno mnogo vađenja kvadratnih korijena, iz mjernih brojeva konačno mnogo danih dužina, tada možemo iz danih dužina pomoću ravnala i šestara konstruirati dužinu čiji je mjerni broj jednak $x$.

- Vrijedi i obrat.

- Za neki broj $x$ kažemo da je **konstruktibilan** iz brojeva $a_1$, $a_2$,..., $a_n$, ako se taj broj $x$ može izračunati iz $a_1$, $a_2$,..., $a_n$, pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i konačno mnogo vađenja kvadratnih korijena.

- Ako kubna jednadžba s racionalnim koeficijentima nema ni jedno racionalno rješenje, onda ni jedno njeno rješenje nije konstruktibilno iz racionalnih brojeva.

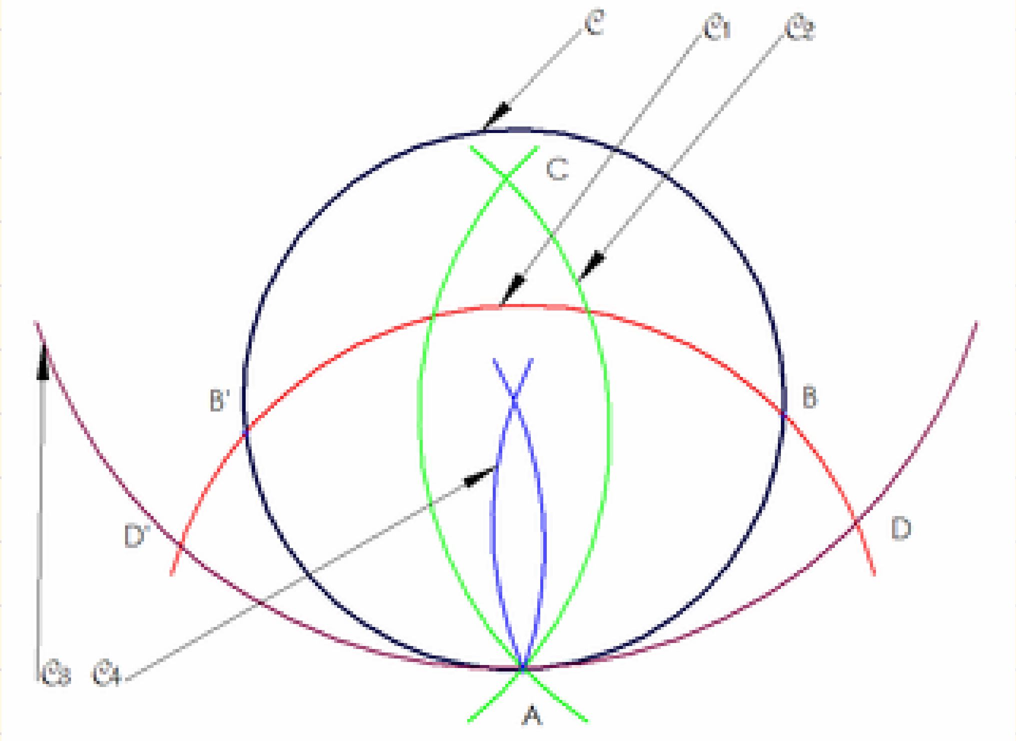
$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

# Klasični problemi

- Udvostručenje kocke $x^3 - 2 = 0$
- Trisekcija kuta $y^3 - 3y + 2a = 0$
- Kvadratura kruga $2\pi$
  - Lindemann, 1882.

# Nekoliko zadataka

# Odrediti samo uz pomoć šestara središte nacrtane kružnice.



Napoleonov problem: Podijeliti zadanu kružnicu na 4 jednaka dijela služeći se samo šestarom.