

Ravninske neeuuklidske geometrije

Vedrana Mikulić Crnković
Odjel za matematik
Sveučilište u Rijeci
(vmikulic@math.uniri.hr)

22. lipnja 2013.

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

Povijest geometrije započinje u Egiptu i Babilonu. Grčki matematičari matematičari pristupaju znanstveno. Grčki matematičar Euklid iz Aleksandrije (330.-275. p.n.e.) sistematizirao je tadašnjeg znanja iz elementarne geometrije u dijelu Elementi (300 godina p.n.e.).



Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

- ▶ 13 knjiga
 - ▶ 6 knjiga o planimetriji
 - ▶ 3 knjige o geometrijskoj teoriji cijelih brojeva
 - ▶ 1 knjiga o teoriji iracionalnih brojeva
 - ▶ 3 knjige o stereometriji
- ▶ cilj: konstrukcija Platonovih pravilnih tijela

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

...Ne postoji kraljevski put u geometriji...

Do 18. stoljeća Euklidovi Elementi su glavni udžbenik iz geometrije.

Euclides, Elementi 1-6, prevela M. Hudoletnjak Grgić,
Kruzak d.o.o., Zagreb, 1999.

1. Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.
2. I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužinu.
3. I da se svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.
4. I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.
5. I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od pravog kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

Matematičari nakon Euklida pokušavaju dokazati peti postulat iz prva četiri postulata.



Lobachevsky (1793-1856) i Bolyai (1802-1860) objavljuju 1829. i 1832. radove o konzistentnim geometrijama u kojima peti postulat nije istinit (hiperbolička geometrija).



Ravninske neeuklidske geometrije

Vedrana Mikulić
Crnković

Odjel za matematik
Sveučilište u Rijeci
(vmikulic@math.uniri.hr)

Povijesni uvod

Euklidovi postulati

Hilbertova aksiomatika

Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

Aksiomatika euklidske ravninske geometrije

Hilbert (1862-1943) je 1899. napisao temelje geometrije.

- ▶ osnovni pojmovi
 - ▶ točka
 - ▶ pravac
- ▶ osnovne relacije
 - ▶ relacija pripadnosti
 - ▶ relacija poretka („biti između“)
 - ▶ relacija sukladnosti
- ▶ izvedeni pojmovi
- ▶ aksiome
 1. aksiomi pripadnosti
 2. aksiomi poretka
 3. aksiomi sukladnosti
 4. aksiom o paralelama
 5. aksiomi neprekidnosti
- ▶ izvedene tvrdnje

Ravninske neeuklidske
geometrije

Vedrana Mikulić
Crnković

Odjel za matematik
Sveučilište u Rijeci
(vmikulic@math.uniri.hr)

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

- ▶ Tvrdnja ekvivalentna petom postulatu
Neka je p pravca i T točka koja ne pripada pravcu p .
Tada postoji točno jedan pravac q koji sadrži točku
 T i ima neprazan presjek s pravcem p .
- ▶ Pretpostavimo da peti postulat nije istinit. Tada
vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji.

Neka je T točka koja ne pripada pravcu p . Tada
svaki pravac koji sadrži točku T siječe pravac p .

Neka je T točka koja ne pripada pravcu p . Tada
postoje barem dva pravca koja sadrže točku T i
imaju prazan presjek s pravcem p .

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

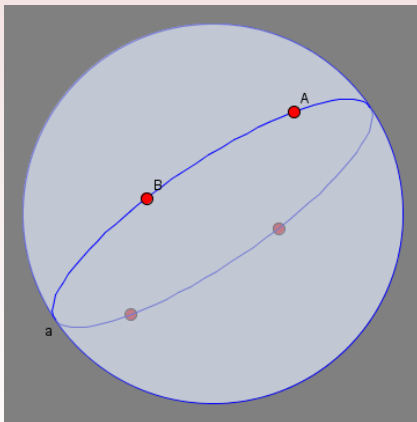
Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

$$\mathbb{S} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}_X| = 1\}$$

Neka je \vec{e} jedinični vektor u \mathbb{R}^3 . Skup

$p = \{X \in \mathbb{S} \mid \langle \vec{e}, \vec{r}_X \rangle = 0\}$ je **pravac s polom** \vec{e} u \mathbb{S} .

Pravac p je **polara** od \vec{e} .



Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

Točke P i Q su **antipodalne** ako je $\vec{r}_P = -\vec{r}_Q$.

Vrijede sljedeće tvrdnje.

- ▶ Ako je \vec{e} pol pravca p , onda je to i $-\vec{e}$.
- ▶ Ako pravac p sadrži točku P , onda on sadrži i točku $-P$, $\vec{r}_{-P} = -\vec{r}_P$.
- ▶ Neka su P i Q dvije različite točke ravnine \mathbb{S} koji nisu antipodalne. Tada postoji jedinstveni pravac koji sadrži točke P i Q .
- ▶ Neka su p i q različiti pravci u \mathbb{S} . Tada p i q imaju točne dvije točke u presjeku i te su točke antipodalne.

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

Pravci p i q su **okomiti** u \mathbb{S} ako su im polovi ortogonalni.
Vrijedi:

- ▶ Neka su p i q različiti pravci u \mathbb{S} . Tada postoji jedinstveni pravac r takav da je $p \perp r$ i $q \perp r$.
- ▶ Neka je p pravac u \mathbb{S} i T točka u \mathbb{S} . Ako \vec{r}_T nije pol pravca pravca p , onda postoji jedinstveni pravac q koji sadrži točku T i okomit je na pravac p .

Sferna ravnina u programu Mathematica

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

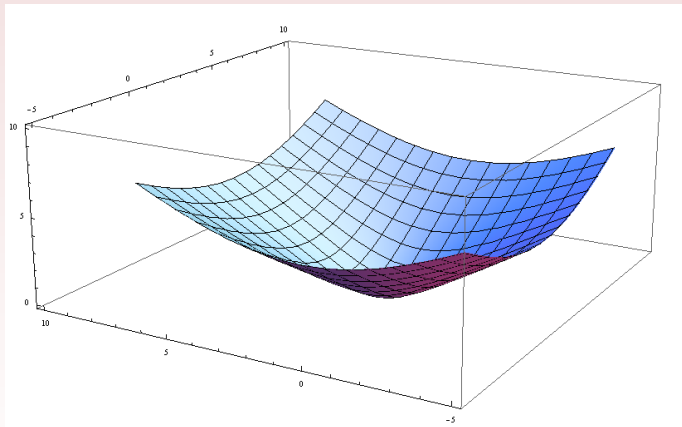
Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

$$\mathbb{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$$



Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

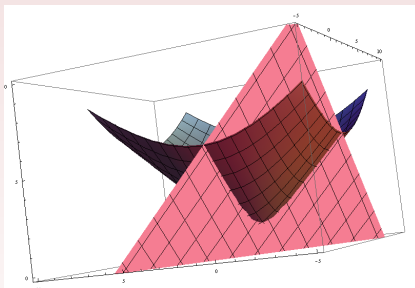
Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

Pravac u hiperboličkoj ravnini je grana hiperbole koja je presjek hiperboloida i ravnine koja sadrži ishodište.



Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

Ako su p i q pravci ravnine \mathbb{H} , tada oni mogu biti u jednom od sljedećih odnosa.

- ▶ Pravci p i q se **sijeku**.
- ▶ Pravci p i q **paralelni**.
- ▶ Pravci p i q **ultraparalelni**.

Program Mathematica: Međusobni odnos pravaca u \mathbb{H}

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

Poincareov model hiperboličke ravnine

Ravninske neeuklidske
geometrije

Vedrana Mikulić
Crnković

Odjel za matematik
Sveučilište u Rijeci
(vmikulic@math.uniri.hr)

Skup točaka Poincareovog modele je skup

$$\{x^2 + y^2 < 1\}.$$

Pravci u Poincareovom modelu su kružni lukovi okomiti na kružnicu $x^2 + y^2 = 1$ (uključujući i promjer kružnice).

Povijesni uvod

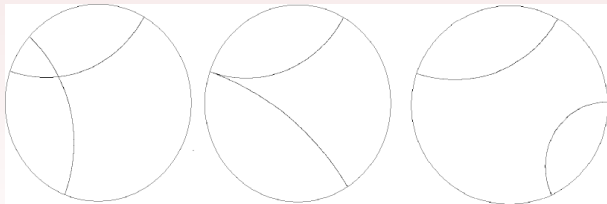
Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid



- ▶ Neka su P i Q različite točke ravnine hiperboličke ravnine. Tada postoji jedinstveni pravac hiperboličke ravnine koji sadrži točke P i Q .

Pravci p i q su **okomiti** ako su okomiti pridruženi kružni lukovi.

- ▶ Ako su dva pravca ravnine \mathbb{H} ultraparalelna, onda postoji jedinstveni pravac koji je okomit na oba pravac. Ako dva pravca imaju zajedničku okomicu, onda su oni ultraparalelni.
- ▶ Neka je T točka i p pravac u ravnini \mathbb{H} . Tada postoji jedinstveni pravac q koji sadrži točku T i okomit je na pravac p .

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

<http://merganser.math.gvsu.edu/easel/>

- ▶ Određuju li svake dvije točke jedinstveni pravac u sfernoj ravnini?
- ▶ U koliko točaka se sijeku dva pravca u sfernoj ravnini?
- ▶ Postoji li jedinstveni pravac q koji sadrži zadanu točku T i okomit je na zadani pravac p u sfernoj ravnini?

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

O trokutu u sfernoj ravnini

Ravninske neeuklidske
geometrije

Vedrana Mikulić
Crnković

Odjel za matematik
Sveučilište u Rijeci
(vmikulic@math.uniri.hr)

- ▶ Vrijedi li Pitagorin poučak u sfernoj ravnini?
- ▶ Koliki je zbroj veličina kutova trokuta u sfernoj ravnini?
- ▶ Određuju li veličine kutova trokuta duljene stranica trokuta u sfernoj ravnini?
- ▶ Postoje li slični trokuti u sfernoj ravnini?

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

<http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html>

- ▶ Određuju li svake dvije točke jedinstveni pravac u hiperboličkoj ravnini?
- ▶ U koliko točaka se sijeku dva pravca u hiperboličkoj ravnini?
- ▶ Postoji li jedinstveni pravac q koji sadrži zadanu točku T i okomit je na zadani pravac p u hiperboličkoj ravnini?
- ▶ Postoji li jedinstveni pravac q koji sadrži zadanu točku T i ima prazan presjek sa zadanim pravcem p u hiperboličkoj ravnini?

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid

O trokutu u hiperboličkoj ravnini

Ravninske neeuklidske
geometrije

Vedrana Mikulić
Crnković

Odjel za matematik
Sveučilište u Rijeci
(vmikulic@math.uniri.hr)

1. Vrijedi li Pitagorin poučak hiperboličkoj ravnini?
2. Koliki je zbroj veličina kutova trokuta u hiperboličkoj ravnini?
3. Određuju li veličine kutova trokuta duljene stranica trokuta u hiperboličkoj ravnini?
4. Postoje li slični trokuti u hiperboličkoj ravnini?

Povijesni uvod

Euklidovi postulati
Hilbertova aksiomatika
Peti postulat

Sferna ravnina

Hiperbolička ravnina

Sferna ravninska
geometrije u programu
Spherical Easel

Hiperbolička ravninska
geometrije u programu
NonEuklid