IZGRADNJA POJMA FUNKCIJE U OSNOVNOJ ŠKOLI
- poučavanje i učenje otkrivanjem pravilnosti i zakonitosti -

prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija
PMF, Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu
cizmesij@math.hr

SAMO KRATKI UVOD

PODSJETIMO SE: MATEMATIČKA KOMPETENCIJA

DEFINICIJA prema Europskom referentnom okviru

Matematička kompetencija je **sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja** kako bi se riješio **niz problema** u svakodnevnim situacijama.

Uz dobro vladanje brojevima (tzv. **numerička pismenost**), naglasak je na **procesu i aktivnosti**, kao i na **znanju**.

Matematička kompetencija uključuje, na različitim stupnjevima, **sposobnost i volju za korištenjem matematičkih načina mišljenja** (logičko i prostorno mišljenje) **i prikazivanja** (formule, modeli, konstrukcije, grafovi, grafikoni).

PODSJETIMO SE: PET STANDARDA MATEMATIČKE KOMPETENCIJE (SAD)

Prema: *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics,* 2001.

KONCEPTUALNO RAZUMIJEVANJE

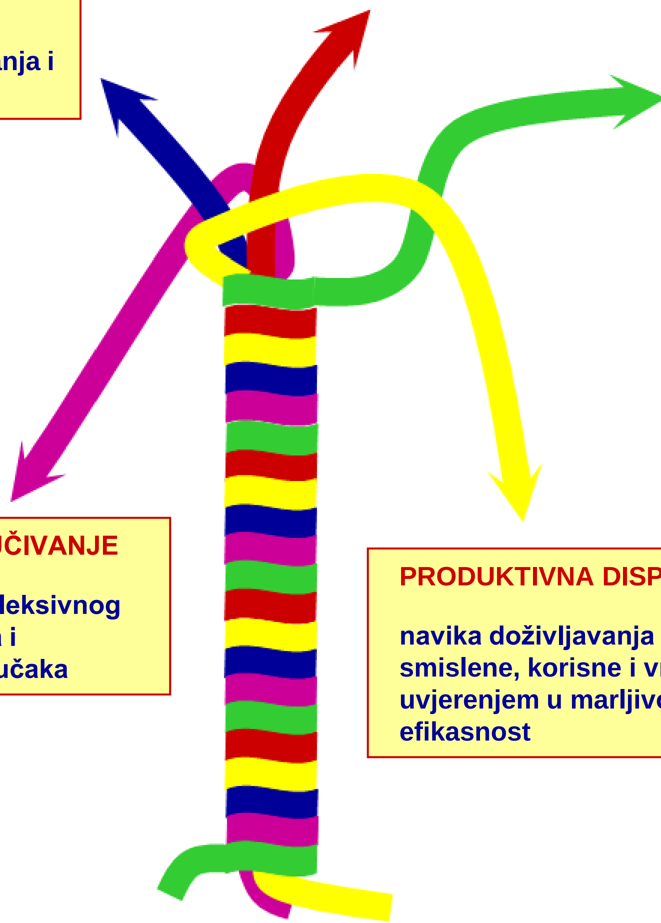
razumijevanje matematičkih koncepata, operacija i relacija (odnosa i veza)

STRATEGIJSKA KOMPETENCIJA

sposobnost postavljanja, prikazivanja i rješavanja matematičkih problema

PROCEDURALNA SPRETNOST

vještina fleksibilnog (prilagodljivog), preciznog i efikasnog izvođenja prikladnih procedura



PRILAGODLJIVO ZAKLJUČIVANJE

sposobnost logičkog i refleksivnog mišljenja te objašnjavanja i opravdavanja ideja i zaključaka

PRODUKTIVNA DISPOZICIJA

navika doživljavanja matematike kao smislene, korisne i vrijedne, zajedno s uvjerenjem u marljivost i vlastitu efikasnost

TRI ČESTA PRIMJERA RADA NAŠIH UČENIKA

PRIMJER 1

Primjer.

Pojednostavni izraz:

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{2}{3}x^2 - 3x + 1 = \underline{\hspace{10cm}}$$

Učeničko rješenje.

Vrlo često, učenici se „riješe razlomaka”:

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{2}{3}x^2 - 3x + 1 = 3x^2 + 12x - 4x^2 - 18x + 6 = -x^2 - 6x + 6$$

U čemu je problem?

Učenici su pobrkali koncepte NEPOZNANICE i VARIJABLE!!!

Zna se tu naći i još pokoja konceptualna pogreška:

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{2}{3}x^2 - 3x + 1 = \frac{1}{2}\cdot 2x + 2x - \frac{2}{3}\cdot 2x - 3x + 1 = \ldots$$

PRIMJER 2

Primjer.

Funkcija je zadana pravilom $f(x) = 2x + 1$. Odredi vrijednost te funkcije za $x = 10$.

Učeničko rješenje.

Vrlo često, učenici rade sljedeće:

$$f(10) = 2 \cdot 10 + 1$$
$$f10 = 21$$
$$10f = 21$$
$$f = \frac{21}{10}$$

U čemu je problem?

Učenici ne prepoznaju značenje simboličkog zapisa *f*(*x*) !!!

PRIMJER 3

Primjer.

Funkcija je zadana pravilom $f(x) = 2x + 1$. Što predstavljaju koeficijenti 2 i 1 u tom zapisu?

Učeničko zaključivanje.

Koeficijent 2 = koeficijent smjera, nagib

Koeficijent 1 = odsječak na y-osi

U čemu je problem?

Učenici su pomiješali koncept linearne funkcije i koncept pravca!!!

ALGEBARSKO MIŠLJENJE

ALGEBARSKO MIŠLJENJE

Algebarsko mišljenje obuhvaća:

- generaliziranje uočenih svojstava brojeva i operacija s njima
- generaliziranje zakonitosti i pravilnosti otkrivenih u svim područjima matematike
- smislenu uporabu matematičkih simbola
- istraživanje strukture u skupovima brojeva
- **proučavanje pravilnosti u (geometrijskim) uzorcima**
- **analizu funkcija**

Svi se ovi navedeni aspekti prožimaju i povezuju u procesu modeliranja.

VAŽNO!!!

Upravo zato, razvoj algebarskog mišljenja jedna od najvažnijih zadaća nastave matematike tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja, a njeno ostvarivanje započinje još u predškolskoj dobi.

PROPORCIONALNO MIŠLJENJE

Važan korak u razvoju algebarskog mišljenja je razvoj PROPORCIONALNOG MIŠLJENJA.

Proporcionalno mišljenje teško je definirati jednostavnom kratkom definicijom jer su u njemu isprepleteni procesi kvalitativnog i kvantitativnog zaključivanja.

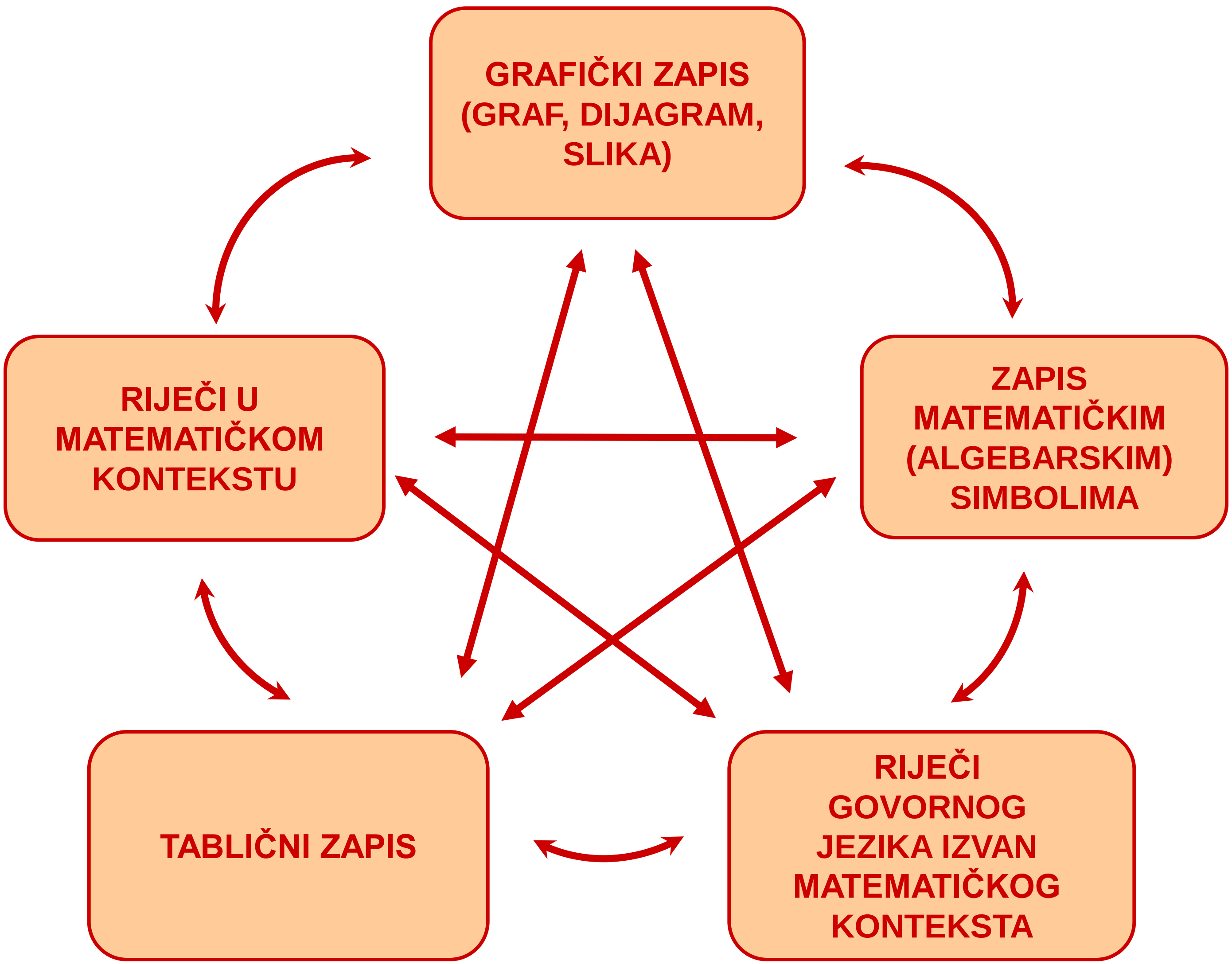
Međutim, opće je prihvaćen **popis karakteristika koje bi trebali imati tzv. proporcionalni mislioci**.

Oni:

- **imaju osjećaj za kovarijaciju, tj. razumiju vezu u kojoj se dvije veličine mijenjaju u ovisnosti jedna o drugoj i u stanju su uočiti na koji način promjena u vrijednostima jedne veličine utječe na vrijednosti preostale veličine**
- razlikuju proporcionalne veze od neproporcionalnih u kontekstima iz realnog svijeta
- razvijaju raznovrsne strategije pri rješavanju zadataka s proporcionalnošću i uspoređivanju omjera, **od kojih je većina neformalna, a ne primjena propisanih algoritama**
- razlikuju omjer koji predstavlja vezu dviju veličina od samih veličina koje se uspoređuju.

ISHODI UČENJA VEZANI UZ KONCEPT FUNKCIJE NA KRAJU OSNOVNE ŠKOLE

RAZLIČITI ZAPISI FUNKCIJE I PRIJELAZ IZ JEDNOGA U OSTALE



KONCEPT FUNKCIJE - ISHODI UČENJA NA ZAVRŠETKU OSNOVNE ŠKOLE

KOVARIJACIJA I OVISNOST DVIJU VELIČINA

Učenik/ca:

- prepoznaje različite zapise iste ovisnosti dviju veličina (zapis riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, pravilima pridruživanja zapisanima algebarskim simbolima ili grafički zapis)
- prelazi iz jednog prikaza ovisnosti dviju veličina u drugi
- prepoznaje svojstva grafički zadane ovisnosti dviju veličina (monotonost, periodično ponavljanje, najmanju i/ili najveću vrijednost, nultočke)
- primjenjuje svojstva grafički zadane ovisnosti dviju veličina (monotonost, periodično ponavljanje, najmanju i/ili najveću vrijednost, nultočke)
- rješava jednostavnije probleme iz matematike i svakodnevnog konteksta koristeći ovisnosti dviju veličina u različitim zapisima

KONCEPT LINEARNE FUNKCIJE - ISHODI UČENJA NA ZAVRŠETKU OSNOVNE ŠKOLE

LINEARNA FUNKCIJA

Učenik/ca:

- prepoznaje linearnu funkciju u različitim zapisima (zapis riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, grafom ili algebarskim simbolima, tj. pravilom pridruživanja)
- prelazi iz jednog zapisa linearne funkcije u drugi
- određuje vrijednost linearne funkcije, zapisane u različitim zapisima, u zadanoj točki
- određuje točku u kojoj linearna funkcija, zapisana u različitim zapisima, poprima zadanu vrijednost
- interpretira značenje koeficijenata linearne funkcije zapisane simbolički
- rješava probleme iz matematike i svakodnevnog konteksta koristeći linearnu funkciju u različitim zapisima

IZGRADNJA KONCEPTA FUNKCIJE

PERIODIČNI NIZOVI

PERIODIČNO PONAVLJANJE

PERIODIČNO PONAVLJANJE

- prvi oblik pravilnosti kojeg djeca spoznaju u svijetu oko sebe
  - otkucaji majčinog srca i ritam njenog disanja prije nego se rode
  - pravilna izmjena dana i noći odmah po rođenju
  - pravilna izmjena godišnjih doba
  - ...

POSTUPNA IZGRADNJA KONCEPTA PERIODIČNOG NIZA

- prirodni početak istraživanja pravilnosti u nastavi matematike

PONAVLJANJE KAO PRAVILO PONAŠANJA NIZA

PRVI VAŽAN KORAK

- razvijanje vještine **prepoznavanja ponavljanja kao pravila ponašanja niza**
- otkrivanje osnovne sekvence niza koja se ponavlja, tzv. **perioda**

OD UČENIKA OČEKUJEMO:

- **da otkriveno pravilo iskaže riječima**
- **da razumijevanje otkrivenog pravila pokaže nastavljanjem niza po volji odabranim brojem članova**

PRVI PRIMJERI NIZOVA KOJE UČENICI UPOZNAJU

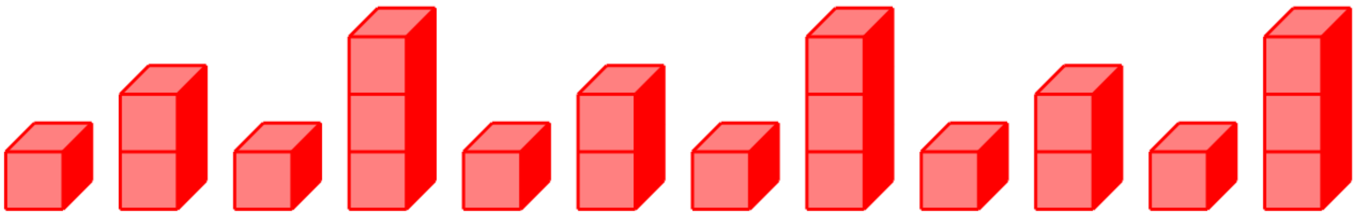
- trebali bi se zasnivati na elementima zornosti, tj. biti vezani uz oblike, boje, zvuk, ritam i sl. te uz konkretne fizičke objekte i materijale iz realnog svijeta
- trebali bi imati **period ponovljen najmanje tri puta**, kako bi pravilnost lakše mogli otkriti učenici različitih matematičkih sposobnosti

PRIMJERI

Primjer.

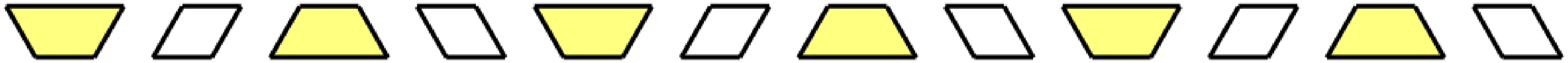
Otkrijte pravilo po kojem je nastao niz, iskažite ga riječima te nastavite nizati na isti način.

(a) niz sastavljen od jednakih drvenih kockica iste boje



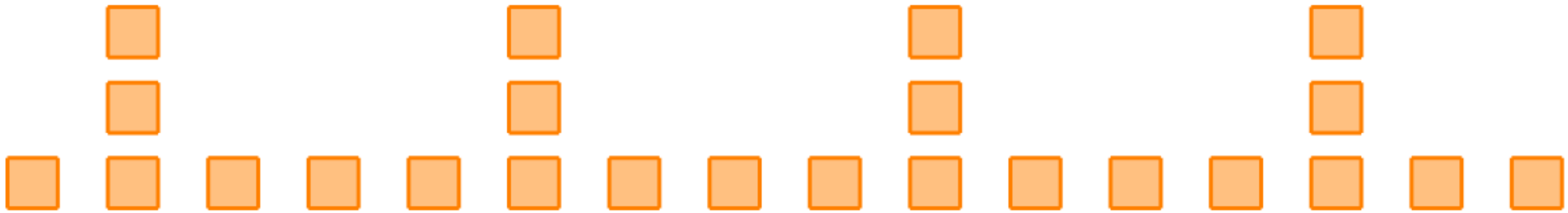
(b) niz sastavljen od jednakih likova u dvije boje, izrađenih od kartona

(c) niz sastavljen od dvije vrste likova izrađenih od kartona



PRIMJERI (2)

(d) niz sastavljen od jednakih plastičnih kvadratića iste boje



(e) niz pokreta tijela

ustani, čučni, pljesni, ustani, čučni, pljesni, ustani, čučni, pljesni

(f) niz riječi dječje pjesmice

Bratec Martin

Bratec Martin, bratec Martin,
kaj još spiš, kaj još spiš?
Već ti vura tuče, već ti vura tuče,
bim, bam, bom,
bim, bam, bom!
(ponavlja se u kanonu)

(g) niz tonova koji se ponavljaju

do, mi, so, mi, do, do, mi, so, mi, do, do, mi, so, mi, do

USPOREDBA NIZOVA

VAŽNO!!!

- Osim analize zadanih nizova, učenike treba poticati i na **kreiranje vlastitih periodičnih nizova od konkretnih fizičkih materijala i njihovo istraživanje**.
- Tu do izražaja mogu doći i **različiti socijalni oblici nastave**, poput rada u skupinama ili rada u paru.

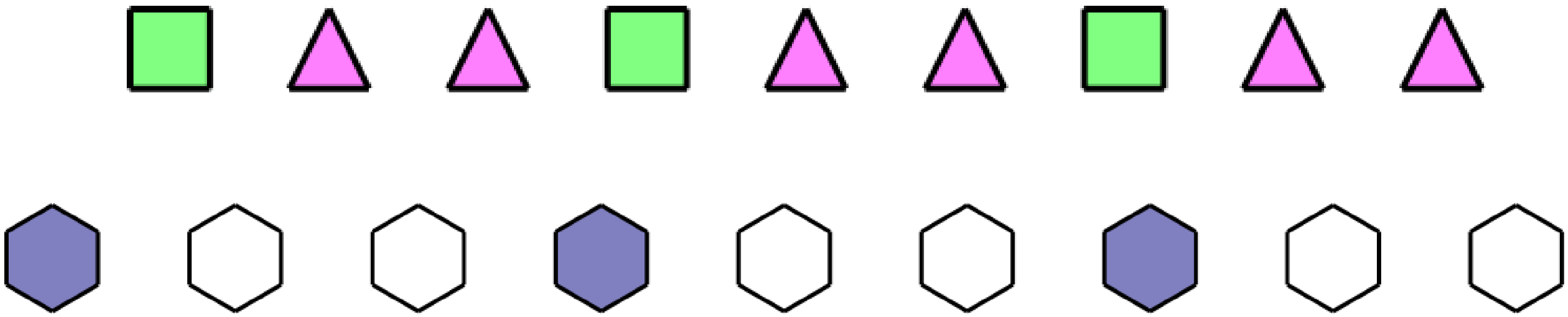
SLJEDEĆI KORAK U IZGRADNJI KONCEPTA PERIODIČNOG NIZA

- **apstrahiranje konkretne fizičke prirode pojedinog niza i usporedba nizova izrađenih od različitih materijala**
- važna stepenica u razvoju algebarskog mišljenja, kao i zaključivanja analogijom i generalizacijom.
- učenici će uočiti da vrlo različite situacije mogu imati ista matematička svojstva, odnosno strukturu, što ih u algebarskom smislu čini jednakima

PRIMJERI

Primjer.

Promotrite sljedeće nizove. Uočavate li među njima neku sličnost?



do, mi, mi, do, mi, mi, do, mi, mi

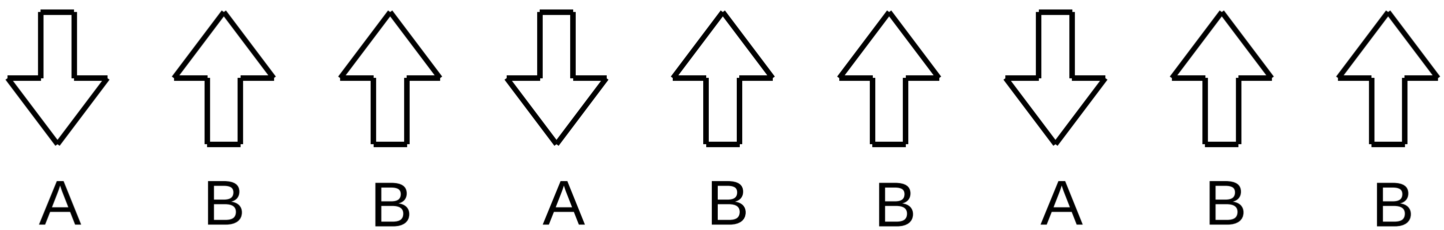
Od kartonskih strelica sastavite niz prema istom pravilu.

PRIMJERI (2)

Rješenje.

Sva tri prikazana niza **prikazuju istu pravilnost**, čiji period možemo zapisati algebarskim simbolima kao **ABB**.

Prema tome, analogan niz strelica mogao bi izgledati npr. ovako:



VAŽNO!!!

Učeničke aktivnosti sada mogu biti usmjerene na:

- **izgradnju periodičkih nizova** od različitih konkretnih materijala **prema zadanom algebarskom pravilu**, npr. **ABCCD**
- na **„algebarsku usporedbu“ nizova u različitim konkretnim kontekstima**

PREDVIĐANJE PONAŠANJA NIZA

UOČIMO!!!

Istraživanje nizova do sada sastojalo od:

- otkrivanja pravila prema kojem je sastavljen zadani periodični niz te nastavljanja niza prema uočenom pravilu,
- kreiranja niza prema zadanom pravilu.

NOVI KORAK U IZGRADNJI KONCEPTA PERIODIČNOG NIZA

- **predviđanje ponašanja niza na nekom udaljenom mjestu** do kojeg ne možemo doći efektivnom konstrukcijom niza član po član
- ovo je sljedeći korak u izgradnji algebarskog mišljenja i **uvod u otkrivanje koncepta funkcije**

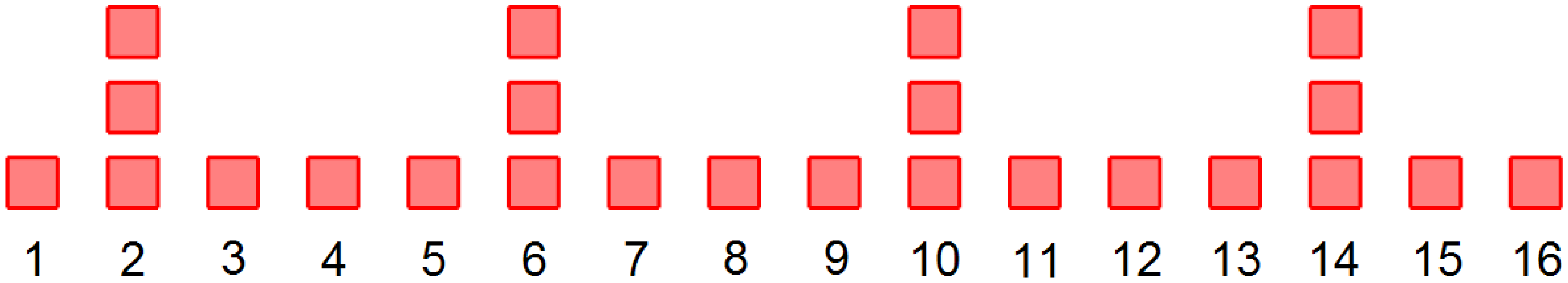
Učenici će:

- **uočiti da svakom članu niza odgovara njegov redni broj**
- **ponašanje periodičkog niza povezati s aritmetikom, tj. s dijeljenjem prirodnih brojeva s ostatkom**

PRIMJERI

Primjer.

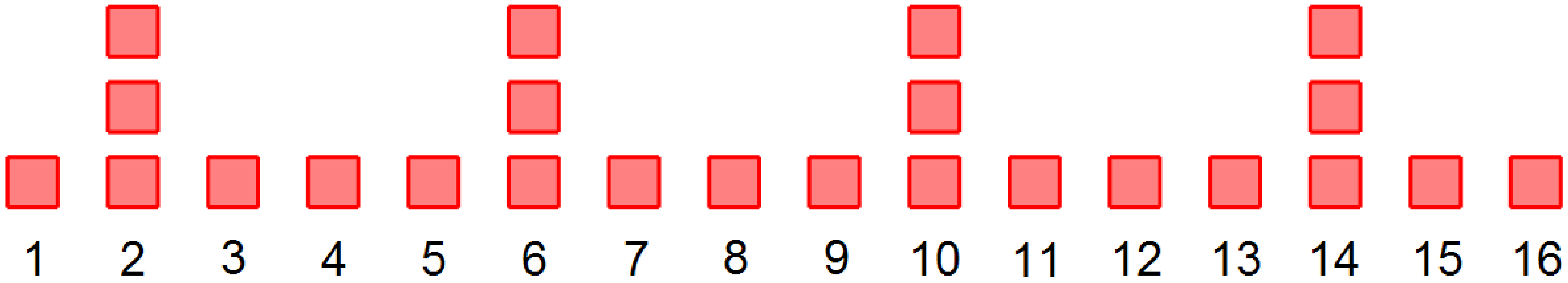
Što se nalazi na 20. i 257. mjestu u nizu



Objasnite svoje zaključivanje!

PRIMJERI (2)

Rješenje.



Do zaključka da se na 15. mjestu danog niza nalazi jedan kvadratić, učenici su mogli doći i direktnim nizanjem.

To nije praktičan način za određivanje 257. člana tog niza.

Uočimo: niz je nastao periodičkim ponavljanjem „algebarskog“ pravila **ABAA**, tj. perioda duljine 4.

Zato ćemo **257. član odrediti kao ostatak pri dijeljenju broja 257 brojem 4**.

Budući da je

$$257 = 64 \cdot 4 + 1,$$

zaključujemo da će na tom mjestu u nizu također biti jedan kvadratić.

PRIMJERI (3)

Primjer.

Zadan je niz simbola:

☼, ♪, ▼, ☼, ♪, ♥, ☼, ♪, ▼, ☼, ♪, ♥, ☼, ♪, ▼, ☼, ♪, ♥, ...

Nastavimo li simbole nizati prema istome pravilu, koji će simbol biti 208. u nizu? Objasnite svoje zaključivanje!

Rješenje.

Uočimo:

- niz je nastao periodičnim ponavljanjem pravila **ABCABD**
- duljina njegovog perioda jednaka je 6.

Zbog $208 = 34 \cdot 6 + 4$, zaključujemo da se na 208. mjestu niza nalazi simbol ☼.

PRIMJERI (4)

VAŽNO!!!

Nizove je bitno povezati i sa smislenim situacijama iz realnog svijeta.

Započeti možemo jednostavnijim primjerima:

- izmjena dana i noći, četiriju godišnjih doba, sedam dana u tjednu, dvanaest mjeseci u godini i sl.

Primjer.

Prošlog su se ljeta u Londonu održale Ljetne olimpijske igre. Hoće li se Olimpijada održati i 2056. godine?

PRIMJERI (5)

Rješenje.

Prisjetimo se godina održavanja Ljetne i Zimske olimpijade:

Ljetne olimpijske igre: 2000., 2004., 2008., 2012., 2016., …

Zimske olimpijske igre: 2002., 2006., 2010., 2014., 2018., …

Označimo:

- slovom A godine održavanja Ljetne olimpijade
- slovom C godine održavanja Zimske olimpijade
- slovom B godine bez održavanja Olimpijskih igara.

Dakle, godine održavanja Olimpijskih igara možemo opisati “algebarskim” pravilom ABCB, a brojanje smo započeli 2000. godinom.

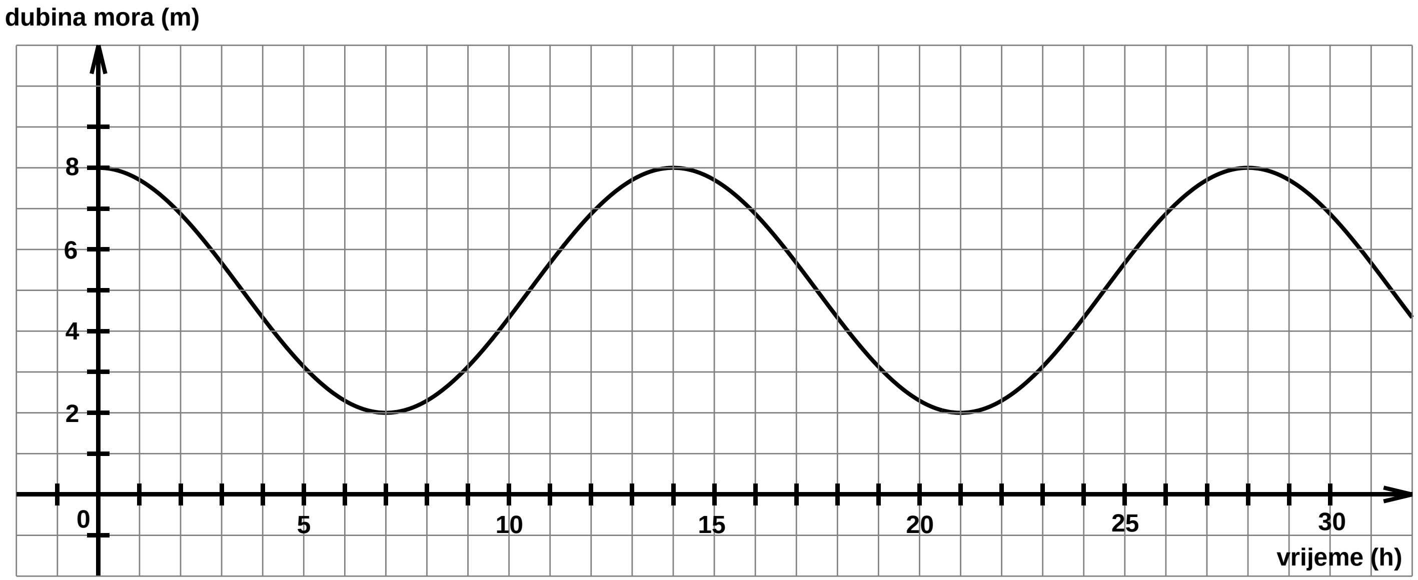
Duljina perioda ovog niza je 4, a 2056. godina odgovara njegovom 57. članu.

Iz $57 = 14 \cdot 4 + 1$ očitavamo da će se 2056. održati Ljetne olimpijske igre.

PRIMJERI (6)

Primjer. Periodično ponavljanje

Graf prikazuje izmjenu plime i oseke u jednoj oceanskoj luci. Sva su mjerenja izvršena na istom mjernom mjestu, počevši od 00:00 sati prvoga dana mjerenja. Dubina mora izmjerena je u metrima, a vrijeme proteklo od prvog mjerenja u satima.



a)Koliko sati protekne između uzastopne najveće plime i oseke, tj. najveće i najmanje dubine mora u toj luci?

b)U koliko je sati postignuta prva najveća oseka desetog dana mjerenja dubine mora u toj luci?

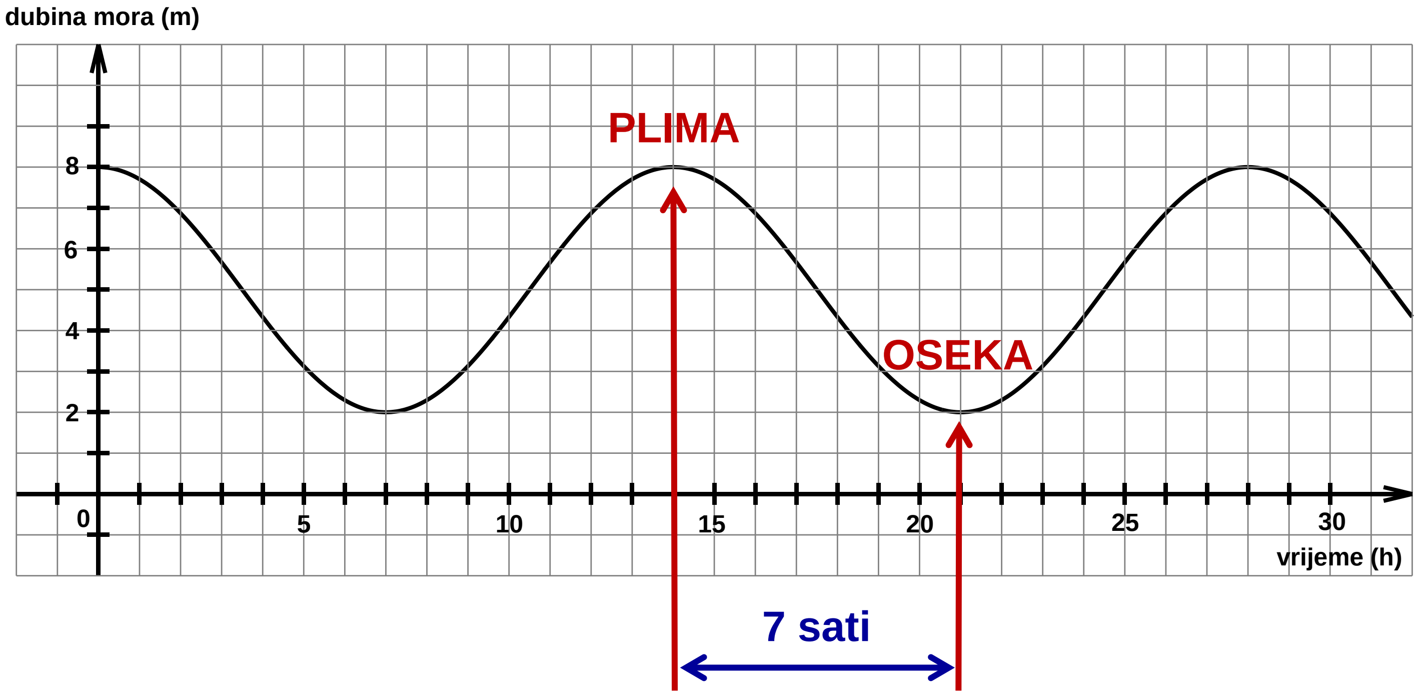
c)Koliko je najvećih plima nastupilo od početka trećeg do kraja osmog dana mjerenja dubine mora u toj luci?

PRIMJERI (7)

Rješenje.

Radi se o periodičnoj pojavi s periodom od 14 sati.

(a) Vremenski razmak između uzastopne plime i oseke je 7 sati.



PRIMJERI (8)

(b) Prvih 9 dana mjerenja ima ukupno $9 \cdot 24 = 216$ sati. Dakle, zanima nas vrijeme prve oseke nakon 216 sati od početka mjerenja.

Vrijeme prve izmjerene oseke: 7 sati prvog dana mjerenja

Vrijeme proteklo između dviju uzastopnih oseka: 14 sati

Niz vremena oseka:

7, 21, 35, 49, 63, 77, 91, 105, 119, 133, 147, 161, 175, 189, 203, **217** …

Dakle, prva oseka desetog dana mjerenja nastupila je u 01:00 sati.

(c) Prva 3 dana mjerenja imaju ukupno $3 \cdot 24 = 72$ sata, a prvih 8 dana ukupno $8 \cdot 24 = 192$ sata. Dakle, zanimaju nas sve plime između 72 i 192 sata od početka mjerenja.

Vrijeme prve izmjerene plime: 0 sati prvog dana mjerenja

Vrijeme proteklo između dviju uzastopnih plima: 14 sati

Niz vremena plima:

0, 14, 28, 42, 56, 70, **84, 98, 112, 126, 140, 154, 168, 182**, 196 …

Dakle, u promatranom periodu nastupilo je ukupno 8 plima.

BROJEVNI NIZOVI

PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA

Istraživanje pravilnosti u brojevnim nizovima:

- nezaobilazno u procesu izgradnje skupova brojeva i razvoja algebarskog mišljenja.

Učenici će:

- najprije istraživati jednostavnije, periodične brojevne nizove, a zatim i one složenijeg, neperiodičnog ponašanja
- **otkriti (algebarsko) pravilo po kojem je nastao dani niz, iskazati ga riječima i algebarskim simbolima te ispisati redom članove niza prema zadanom ili uočenom pravilu**.

Učenici viših kognitivnih sposobnosti će:

- **generalizacijom predvidjeti koji se broj nalazi na zadanom konkretnom, dalekom mjestu u nizu**
- **algebarskim simbolima zapisati opći, *n*-ti član niza** (vrhunac algebraizacije na osnovnoškolskoj, pa i srednjoškolskoj matematičkoj razini)

Uočimo:

- zapis pravila po kojem svaki sljedeći član niza nastaje pomoću jednog ili više svojih prethodnika zapravo znači **uvođenje koncepta rekurzije**
- od učenika osnovne škole ne očekujemo formalni rekurzivni zapis.

PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA (2)

VAŽNO!!!

Tehnologija daje moćan alat za kreiranje i istraživanje brojevnih nizova:

- alati za izradu proračunskih tablica (npr. MS Excel).

Za nastavu je bitno da:

- **u nizovima budu zastupljeni prirodni, cijeli, racionalni i iracionalni brojevi**
- **racionalni brojevi budu u različitim zapisima** (razlomačkom, decimalnom, postotnom ili grafičkom).

PRIMJERI

Primjer.

Zadan je niz brojeva:

$$4, 0, -6, 4, 0, -6, 4, 0, -6, 4, 0, -6, \ldots$$

Nastavimo li ga prema istome pravilu, čemu će biti jednak zbroj prvih 205 članova tog niza?

Rješenje.

Uočimo: niz je periodičan, s periodom duljine 3

Zbroj članova u svakom periodu jednak je $4 + 0 + (-6) = -2$.

Zbog $205 = 68 \cdot 3 + 1$, zaključujemo da treba zbrojiti zbrojeve prvih 68 perioda i tome još pribrojiti prvi član zadnjeg, nepotpunog perioda.

Prema tome, traženi je zbroj jednak $68 \cdot (-2) + 4 = -132$.

PRIMJERI (2)

Primjer.

Niz brojeva zadan je pravilom:

„Broj uvećaj za 3 pa udvostruči dobiveni rezultat.“.

Napiši prvih pet članova toga niza ako je prvi član toga niza broj −4.

Rješenje.

Prema pravilu, imamo niz:

−4, −2, 2, 10, 26, ...

Primijetimo da je određen rekurzijom

$$a_1 = -4, \quad a_{n+1} = 2(a_n + 3) = 2a_n + 6, \quad n \in \mathbb{N}$$

Njegov je opći član dan izrazom: $a_n = 2^n - 6, \ n \in \mathbb{N}$

U osnovnoj školi zadržat ćemo se samo na određivanju prvih nekoliko članova niza.

PRIMJERI (3)

Primjer. Prepoznavanje jednakih funkcija

Zadano je pravilo pridruživanja:

Broj uvećaj za 3 *pa rezultat učetverostruči*.

Zaokruži slovo ispred pravila pridruživanja jednakih zadanome.

A. $p(x) = (x + 3) \cdot 4$

B. $p(x) = 4(x + 3)$

C. $p(x) = 4x + 12$

D. $p(x) = x + 3 \cdot 4$

E. $p(x) = x + 12$

TIPIČNE POGREŠKE

F. $p(x) = 4 \cdot (3x)$

G. $p(x) = x + 3 + 4$

H. $p(x) = 12x$

G. *Broj učetverostruči pa rezultat uvećaj za* 12.

PRIMJERI (4)

Primjer.

Zadani su nizovi brojeva:

(a) 1, 5, 9, 13, 17, 21, …

(b) 2, 5, 11, 23, 47, 95, …

(c) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

(d) 60, 30, 20, 15, 12, 10, ...

(e) 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

(f) 2, 6, 12, 20, 30, 42, …

(g) 3, 3, 6, 9, 15, 24, …

Za svaki od njih ispiši prvih 10 članova te iskaži pravilo kojim je određen.

PRIMJERI (5)

Rješenje.

Za svaki od nizova iskazat ćemo pravilo kojim nastaje.

(a) 1, 5, 9, 13, 17, 21, …

Ovaj niz određen je pravilom:

„*Započni brojem* 1. *Broj uvećaj za* 4."

Simbolički ga možemo zapisati kao

$$b = 1$$

$$b \mapsto b + 4$$

odnosno kao jednočlanu rekurziju

$$a_1 = 1, \;\; a_{n+1} = a_n + 4, \;\; n \in \mathbb{N}$$

Opći član niza dan je izrazom:

$$a_n = 4n + 1, \;\; n \in \mathbb{N}$$

Uočimo: članovi niza povećavaju se **„konstantnom brzinom"** 4, **koja je jednaka vodećem koeficijentu linearnog izraza za opći član niza**.

PRIMJERI (6)

(b) 2, 5, 11, 23, 47, 95, …

Pravilo koje određuje ovaj niz glasi:

„*Započni brojem* 2. *Broj udvostruči pa dobiveni rezultat uvećaj za* 1."

Ono odgovara rekurziji

$$a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = 2a_n + 1,\ \ n \in \mathbb{N}$$

U ovom slučaju, opći član niza dan je izrazom:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,\ \ n \in \mathbb{N}$$

Uočimo: eksplicitni zapis općeg člana prelazi okvire osnovne škole!

PRIMJERI (7)

(c) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

Pravilo koje određuje ovaj niz glasi:

„*Kvadriraj redni broj člana u nizu*."

U ovom je slučaju jednostavno odrediti opći član niza:

$$a_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

I ovaj niz možemo zapisati rekurzijom. Primijenimo li izraz za kvadrat zbroja, slijedi:

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

Zato je rekurzija koja određuje ovaj niz:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Uočimo: Iz rekurzije čitamo da je **brzina 2*n* + 1 kojom se povećavaju članovi niza linearna (1. stupnja), dok su članovi niza kvadratnog oblika**!

PRIMJERI (8)

(d) 60, 30, 20, 15, 12, 10, ...

Pravilo koje određuje ovaj niz glasi:

„*Broj* 60 *podijeli rednim brojem člana u nizu.*“

I u ovom će slučaju učenicima biti lakše odrediti opći član niza nego rekurziju kojom je određen:

$$a_n = \frac{60}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Rekurzija:

$$a_1 = 60, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

PRIMJERI (9)

(e) 1, 3, 6, 10, 15, 21, …

Niz je određen sljedećim pravilom:

„*Započni brojem* 1. *Broj uvećaj za* 1 *i za njegov redni broj u nizu.*“

Zato je lakše odrediti rekurziju koja ga definira:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Do općeg člana niza dolazimo Gaussovom dosjetkom, zbrajanjem relacija:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + (n-1) + 1 \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + (n-2) + 1 \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + (n-3) + 1 \\ &\;\;... \\ a_2 &= a_1 + 1 + 1 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}\right\} +$$

Dobivamo

$$a_n = 1 + 2 + ... + (n-1) + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Uočimo: I ovog puta **članovi su se povećavali linearnom brzinom *n* + 1, što je rezultiralo njihovim kvadratnim oblikom**!

PRIMJERI (10)

(f) 2, 6, 12, 20, 30, 42, …

Niz je određen sljedećim pravilom:

„*Pomnoži redni broj člana niza njegovim sljedbenikom*."

Zato je lakše simbolima zapisati njegov opći član:

$$a_n = n(n+1), \quad n \in \mathbb{N}$$

Do rekurzije dolazimo uočavanjem identiteta:

$$(n+1)(n+2) = n(n+1) + 2n + 2$$

Zato je:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Uočimo: I u ovom slučaju linearna brzina 2*n* + 2 kojom se povećavaju članovi niza rezultirala je njihovim kvadratnim oblikom!

PRIMJERI (11)

(g) 3, 3, 6, 9, 15, 24, …

Pravilo je ovog puta nešto drukčije:

„*Započni brojevima* 3 i 3. *Zbroji prethodna dva broja u nizu*.“

Dakle, ovaj je niz inačica niza Fibonnacijevih brojeva. Zadan je rekurzijom:

$$a_1 = a_2 = 3, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

PRIMJERI (12)

Primjer.

Nastavimo li niz razlomaka

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

istim pravilom, koji će član tog niza biti jednak 0.96?

Rješenje.

Uočimo:

- redni broj razlomka u nizu je njegov brojnik, a nazivnik je za 1 veći od tog rednog broja
- n –ti član niza je $a_n = \dfrac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

Dakle, broj 0.96 treba zapisati u naznačenom obliku: $0.96 = \dfrac{96}{100} = \dfrac{24}{25}$

Zaključak: **Broju 0.96 jednak je 24. član niza razlomaka.**

PRIMJERI (13)

Primjer.

U nizu

$$-2, -5, -8, -11, \ldots$$

nalazi se i broj –74. Odredi njegov redni broj.

Rješenje.

Kako bismo riješili ovaj zadatak, **potrebno je odrediti pravilo prema kojem nastaje zadani niz**.

Ono je:

„*Započni brojem* –2. *Broj umanji za* 3.“.

Zato je *n* – ti član niza:

$$a_n = -3n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Sada tražimo *n* tako da je – 3*n* + 1 = – 74.

Rješavanjem postavljene jednadžbe slijedi *n* = 25.

Dakle, broj –74 nalazi se na 25. mjestu u zadanom nizu.

RAČUNSKE OPERACIJE I PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA

Uočavanjem pravilnosti u brojevnim nizovima možemo motivirati **uvođenje nekih računskih operacija i konvencija**.

MNOŽENJE NEGATIVNIH CIJELIH BROJEVA

Uočavanje pravilnosti u brojevnom nizu možemo iskoristiti za smisleno uvođenje pravila za množenje negativnih cijelih brojeva.

•**Svođenjem množenja na zbrajanje jednakih pribrojnika, učenici prvo otkrivaju čemu je jednak umnožak prirodnog i negativnog cijelog broja**, npr. putem primjera

$$3 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15 = -3 \cdot 5$$

$$4 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12 = -4 \cdot 3$$

RAČUNSKE OPERACIJE I PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA (2)

- Potom se **postavlja pitanje čemu je jednak umnožak negativnog cijelog i prirodnog broja**, npr. (-5) · 3 ili (-3) · 4.

- Kako bi odredili rezultat i "opravdali" očekivanu pretpostavku da i za množenje cijelih brojeva vrijedi zakon komutativnosti, **učenici će tražiti pravilnosti u sljedećem nizu**:

$$5 \cdot 3 = 15$$
$$4 \cdot 3 = 12$$
$$3 \cdot 3 = 9$$
$$2 \cdot 3 = 6$$
$$1 \cdot 3 = 3$$
$$0 \cdot 3 = 0$$

- Otkrit će:
  - prvi faktor umnožaka na lijevoj strani danih jednakosti iz retka se u redak smanjuje za 1
  - drugi faktor umnožaka na lijevoj strani danih jednakosti ostaje nepromijenjen
  - rezultati na desnoj strani jednakosti iz retka se u redak smanjuju za 3

RAČUNSKE OPERACIJE I PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA (3)

- Na temelju ovih zaključaka, učenici **niz jednakosti nastavljaju prema istom pravilu**, smanjivanjem prvog faktora umnožaka na lijevoj strani jednakosti za 1 i rezultata na desnoj strani jednakosti za 3

$$(-1)\cdot 3 = -3$$
$$(-2)\cdot 3 = -6$$
$$(-3)\cdot 3 = -9$$
$$(-4)\cdot 3 = -12$$
$$(-5)\cdot 3 = -15 \ldots$$

- Uočavanjem pravilnosti u brojevnom nizu otkrili su da je:

$$(-5)\cdot 3 = 3\cdot(-5) = -3\cdot 5 = -15$$

- Nakon još nekoliko sličnih primjera (prilika za rad učenika u skupinama!) **generalizacijom učenici zaključuju da se prirodni i negativni cijeli broj množe tako da im se pomnože apsolutne vrijednosti i rezultatu dopiše negativni predznak.**

RAČUNSKE OPERACIJE I PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA (4)

- Kako bi učenici **otkrili pravilo za množenje negativnog broja nulom i pravilo za množenje dvaju negativnih cijelih brojeva**, istražit će niz jednakosti

$$(-5)\cdot 5 = -25$$
$$(-5)\cdot 4 = -20$$
$$(-5)\cdot 3 = -15$$
$$(-5)\cdot 2 = -10$$
$$(-5)\cdot 1 = -5$$

- Uočit će:
  - sve jednakosti imaju isti prvi faktor umnoška na svojoj lijevoj strani
  - drugi faktor umnoška na lijevoj strani jednakosti iz retka se u redak smanjuje za 1
  - rezultat se iz retka u redak povećava za 5

RAČUNSKE OPERACIJE I PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA (5)

- Nastavljanjem niza jednakosti prema istom pravilu, slijedi

$$(-5)\cdot 0 = 0$$
$$(-5)\cdot(-1) = 5$$
$$(-5)\cdot(-2) = 10$$
$$(-5)\cdot(-3) = 15$$
$$(-5)\cdot(-4) = 20\ \ldots$$

- **Analizom ovog ili sličnih brojevnih nizova učenici otkrivaju da je umnožak svakog cijelog broja i nule jednak nuli te da se dva negativna cijela broja množe tako da im se pomnože apsolutne vrijednosti.**

RAČUNSKE OPERACIJE I PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA (6)

CJELOBROJNE POTENCIJE BROJA 10

Pri definiranju cjelobrojnih potencija broja 10 (a i svakog drugog realnog broja različitog od nule) učenicima je potrebno smisleno „opravdati“ konvencije

$$10^1 = 10, \quad 10^0 = 1, \quad 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

•Prvi korak je uvođenje potencija broja 10 s prirodnim eksponentom *n* > 1:

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$$

$$\ldots$$

$$10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 10}_{n \text{ faktora}} = 1\underbrace{00\ldots00}_{n \text{ nula}}$$

RAČUNSKE OPERACIJE I PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA (7)

- Potom učenici mogu **promatrati sljedeći brojevni niz i tražiti pravilnosti u njemu**:

$$10^6 = 1000\,000$$
$$10^5 = 100\,000$$
$$10^4 = 10\,000$$
$$10^3 = 1000$$
$$10^2 = 100$$

- Primijetit će:
  - eksponenti potencija broja 10 na lijevoj strani jednakosti iz retka se u redak smanjuju za 1,
  - vrijednosti potencija istovremeno se smanjuju 10 puta

RAČUNSKE OPERACIJE I PRAVILNOSTI U BROJEVNIM NIZOVIMA (8)

- Nastavljanjem ovog niza istim pravilom slijedi

$$10^{1} = 100 : 10 = 10$$

$$10^{0} = 10 : 10 = 1$$

$$10^{-1} = 1 : 10 = \frac{1}{10}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10} : 10 = \frac{1}{100} \ldots$$

Ovime su navedene konvencije dobile smisleno i konzistentno „opravdanje”.

MONOTONI NIZOVI U GEOMETRIJSKOM KONTEKSTU

MONOTONI NIZOVI

MONOTONI NIZOVI - NOVI KORAK U IZGRADNJI KONCEPTA NIZA

- Nakon periodičnih nizova, istraživanje nizova nastavlja se **monotonim, tj. rastućim ili padajućim nizovima**.
- **Uočavanje načina na koji se niz mijenja od člana do člana, tj. brzine njegovog rasta, odnosno pada, ključan je korak u izgradnji koncepta funkcije kao matematičkog zapisa promjene neke veličine.**
- U nastavi:
  - brojevne nizove važno je povezati s njihovim vizualnim, osobito geometrijskim interpretacijama
  - istraživanje pravilnosti započeti radnom na konkretnim, fizičkim predlošcima pri čemu učenici lako mogu manipulirati danim objektima

PRIMJERI

Sljedeći primjeri mogu poslužiti kao motivacija za uvođenje pojmova linearne, odnosno kvadratne funkcije.

Osim zaključivanja o općem članu niza, **za učenike će biti važno uočiti i na se koji način, tj. kojom brzinom mijenjaju njegovi članovi**:

- **u slučaju linearnog rasta prirast će biti konstantan**
- **za kvadratni rast prirast će biti linearna funkcija**

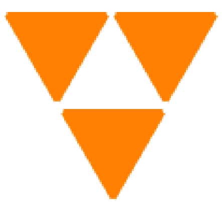
PRIMJERI (2)

Primjer.

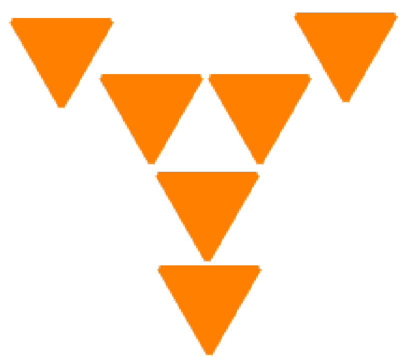
Dan je niz slika koje se sastoje od trokuta. Nastavimo li nizati slike prema istom pravilu, odredite broj trokuta na:

(a) 10. slici u nizu

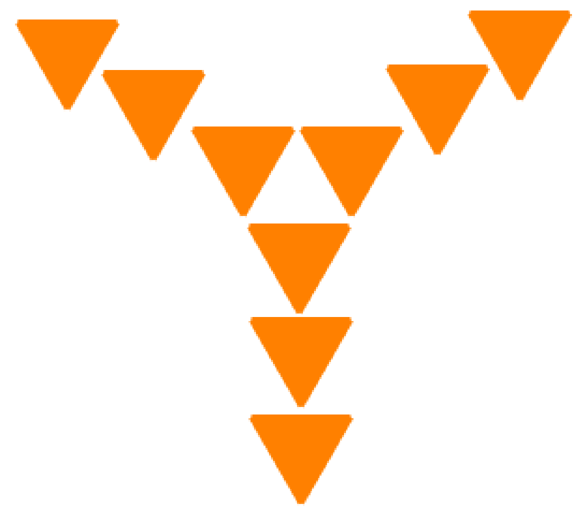
(b) *n*-toj slici u nizu.



Slika 1.



Slika 2.

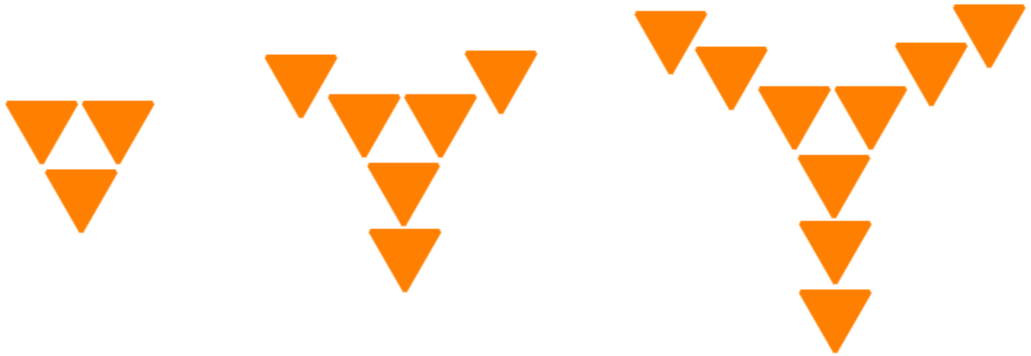


Slika 3.

PRIMJERI (3)

Rješenje.

Uočimo pravilnost po kojem nastaje svaka sljedeća slika u nizu. Na svakoj sljedećoj slici 3 su trokuta više nego na prethodnoj.



Slika 1. Slika 2. Slika 3.

Podatke organizirajmo u tablicu.

BROJ SLIKE	1	2	3	4	5	**10**	***n***
BROJ TROKUTA	3	6	9	12	15	**30**	**3*n***

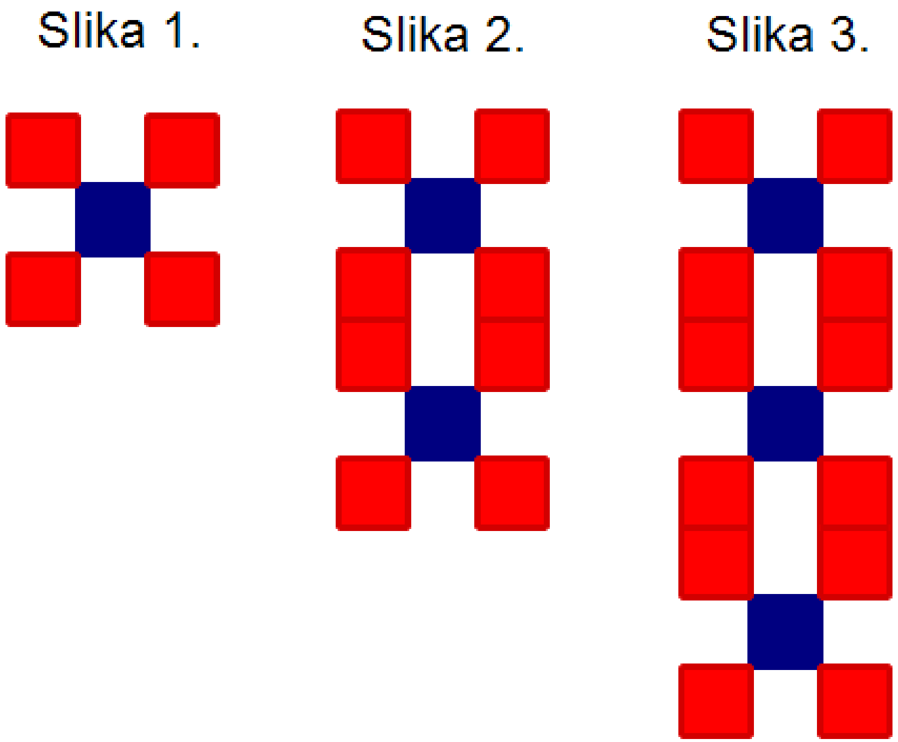
PRIMJERI (4)

Primjer.

Dan je niz slika koje se sastoje od kvadrata. Nastavimo li nizati slike prema istom pravilu, odredite ukupni broj kvadrata, broj plavih i broj crvenih kvadrata na:

(a) 10. slici u nizu

(b) *n*-toj slici u nizu.



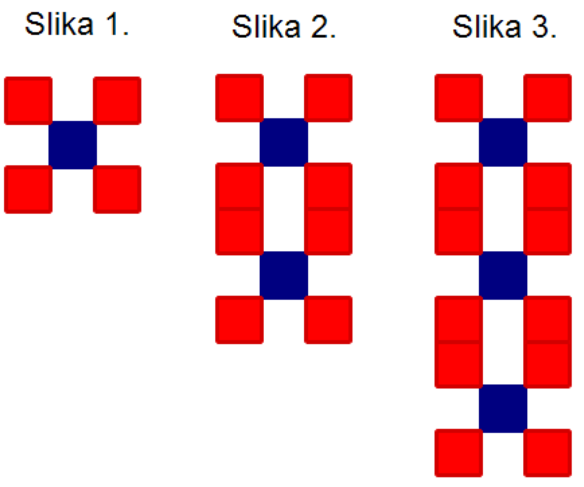
PRIMJERI (5)

Rješenje.

Uočimo pravilnost po kojem nastaje svaka sljedeća slika u nizu.

Na svakoj sljedećoj slici ima:

- 5 kvadrata više nego na prethodnoj
- 1 plavi kvadrat više nego na prethodnoj
- 4 crvena kvadrata više nego na prethodnoj



Podatke organizirajmo u tablicu.

BROJ SLIKE	1	2	3	4	5	**10**	***n***
BROJ KVADRATA	5	10	15	20	25	**50**	**5*n***
BROJ PLAVIH KVADRATA	1	2	3	4	5	**10**	***n***
BROJ CRVENIH KVADRATA	4	8	12	16	20	**40**	**4*n***

PRIMJERI (6)

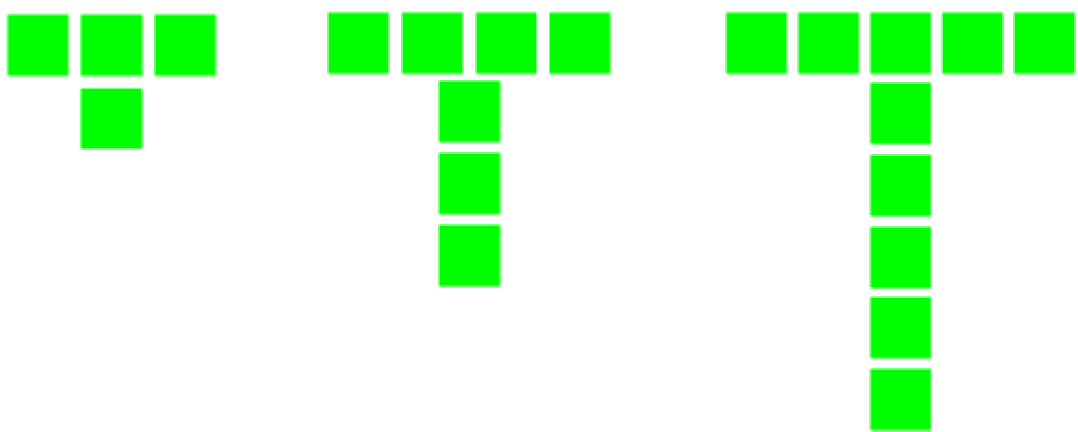
Primjer.

Dan je niz slika koje se sastoje od kvadrata. Nastavimo li nizati slike prema istom pravilu, odredite ukupni broj kvadrata na:

(a) 10. slici u nizu

(b) n-toj slici u nizu.

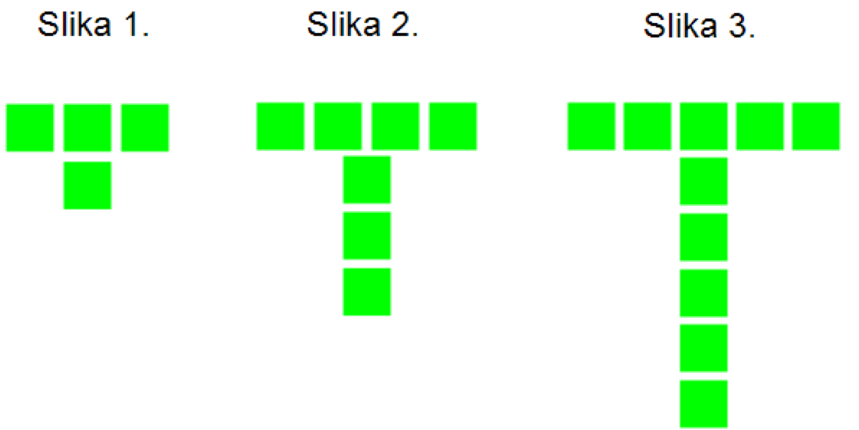
Slika 1. Slika 2. Slika 3.



PRIMJERI (7)

Rješenje.

Uočimo pravilnost po kojem nastaje svaka sljedeća slika u nizu. Na svakoj sljedećoj slici 3 su kvadrata više nego na prethodnoj.



Podatke organizirajmo u tablicu.

BROJ SLIKE	1	2	3	4	5	**10**	***n***
BROJ KVADRATA	4	7	10	13	16	**31**	$3n + 1$

PRIMJERI (8)

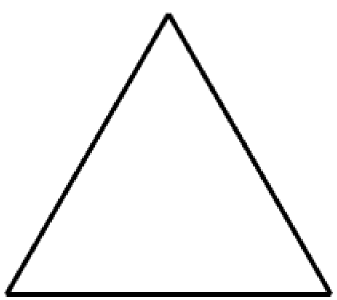
Primjeri.

Trokut na svakoj slici osim prve podijeljen je na manje, međusobno sukladne trokute.

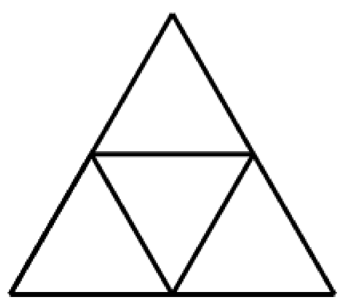
Odredite broj tih manjih trokuta na:

(a) 20. slici u nizu.

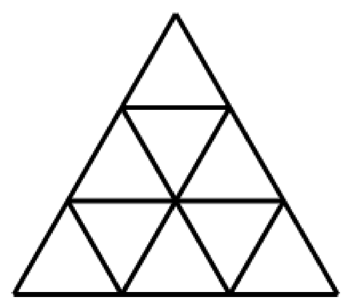
(b) *n*-toj slici u nizu.



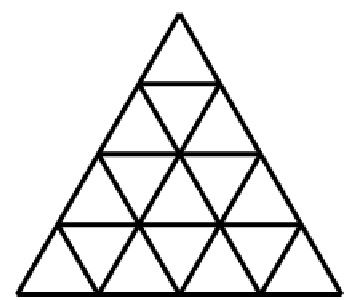
Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

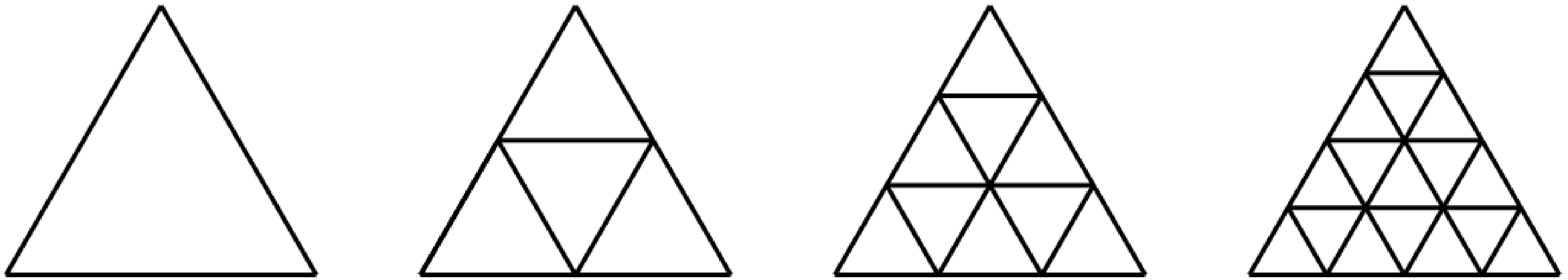


Slika 4.

PRIMJERI (9)

Rješenje.

Uočimo pravilnost u broju sukladnih trokuta na slikama.



1 4 9 16

Sastavimo tablicu s uočenim podacima.

BROJ SLIKE	1	2	3	4	n	**20**
BROJ TROKUTA	1	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	n^2	$20^2 = 400$

PRIMJERI (10)

Primjer. Popločavanje

Pod kvadratnog oblika, dimenzija 10 m x 10 m, popločan je plavim i narančastim kvadratnim pločama dimenzija 1 m x 1 m, kao na slici. **Bez direktnog prebrojavanja** odredite broj narančastih ploča koje obrubljuju pod. Razmislite o različitim strategijama!

PRIMJERI (11)

Rješenje.

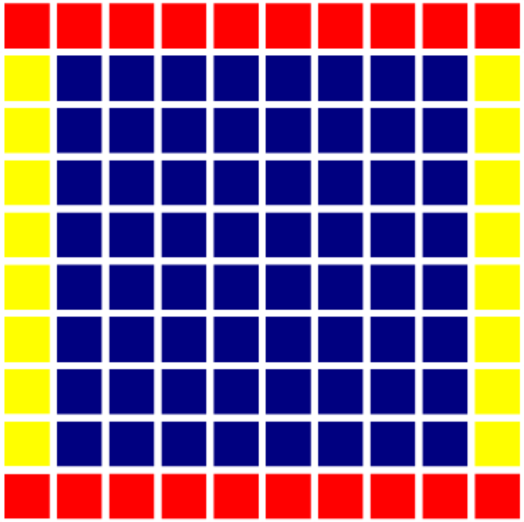
Odmah je jasno da je plavi dio poda kvadrat dimenzija 8 m x 8 m, popločan sa 64 plave ploče dimenzija 1 m x 1 m.

Dalje razlikujemo 5 strategija.

***Prvi način*.**

Uočimo da se gornji i donji narančasti rub sastoje od 10 ploča te da tome treba dodati još po 8 narančastih ploča sa svake strane,

$$10 + 10 + 8 + 8 = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 8 = 36.$$



PRAVILNOSTI U NIZOVIMA BROJEVA (11)

***Drugi način*.**

Broj narančastih ploča računamo po “stranicama” narančastog ruba, tj. kao

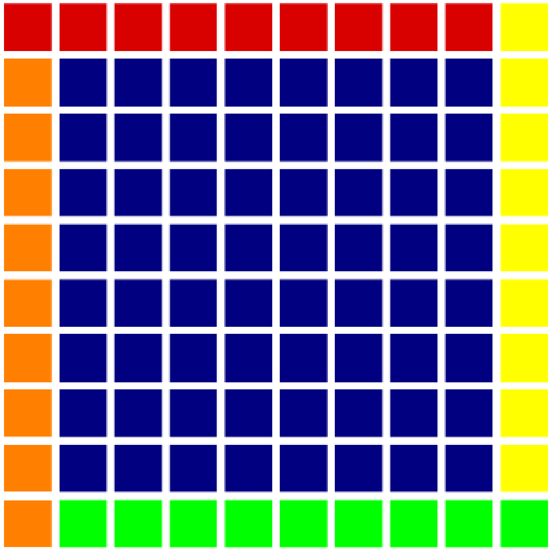
$$9 + 9 + 9 + 9 = 4 \cdot 9 = 36.$$

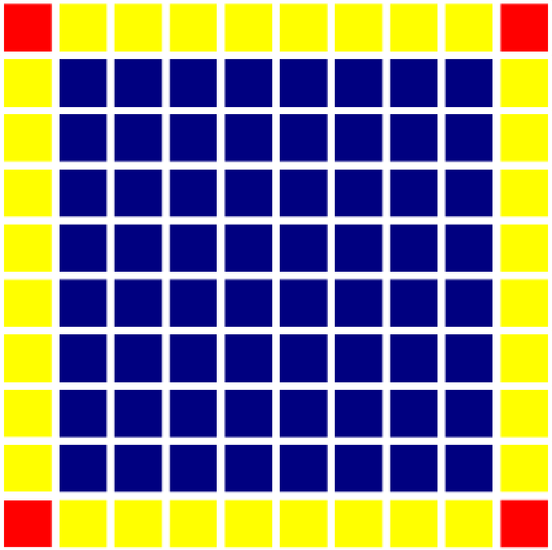
***Treći način*.**

Broj narančastih ploča računamo kao “proširenja” plavog poda sa svake strane za jedan redak, odnosno stupac, uz dodavanje nova 4 narančasta “vrha”, tj. kao

$$8 + 8 + 8 + 8 + 4 = 4 \cdot 8 + 4 = 36.$$

Drugi način.





Treći način.

PRIMJERI (12)

***Četvrti način*.**

Broj narančastih ploča računamo po “cijelim stranicama” narančastog ruba, uz oduzimanje 4 “vrha” koja su brojana dvaput, tj. kao

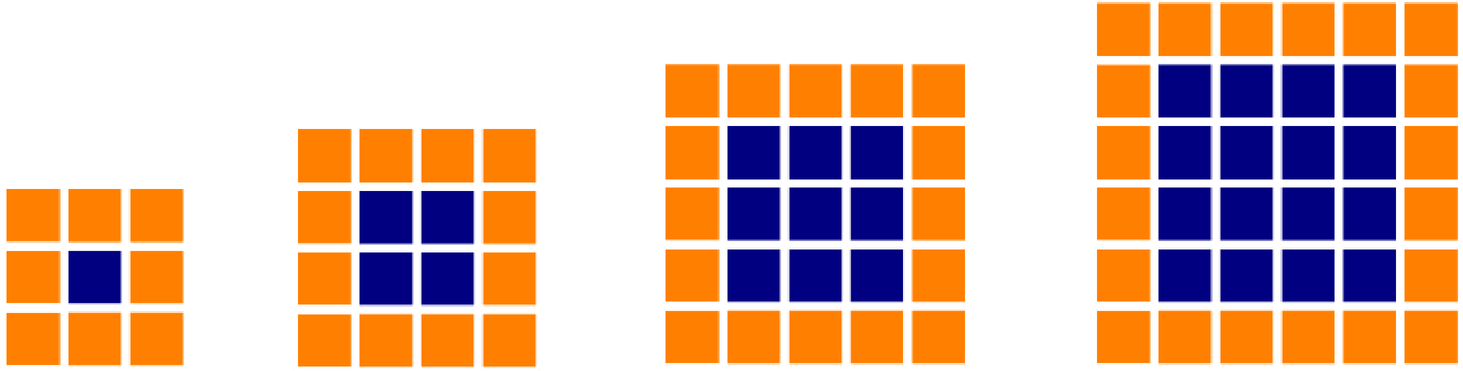
$$10 + 10 + 10 + 10 – 4 = 4 \cdot 10 – 4 = 36.$$

***Peti način*.**

Uočavamo da je narančasti rub razlika površina kvadrata dimenzija 10 m x 10 m i kvadrata dimenzija 8 m x 8 m, tj. računamo kao

$$10 \cdot 10 – 8 \cdot 8 = 36.$$

Analogija i generalizacija.

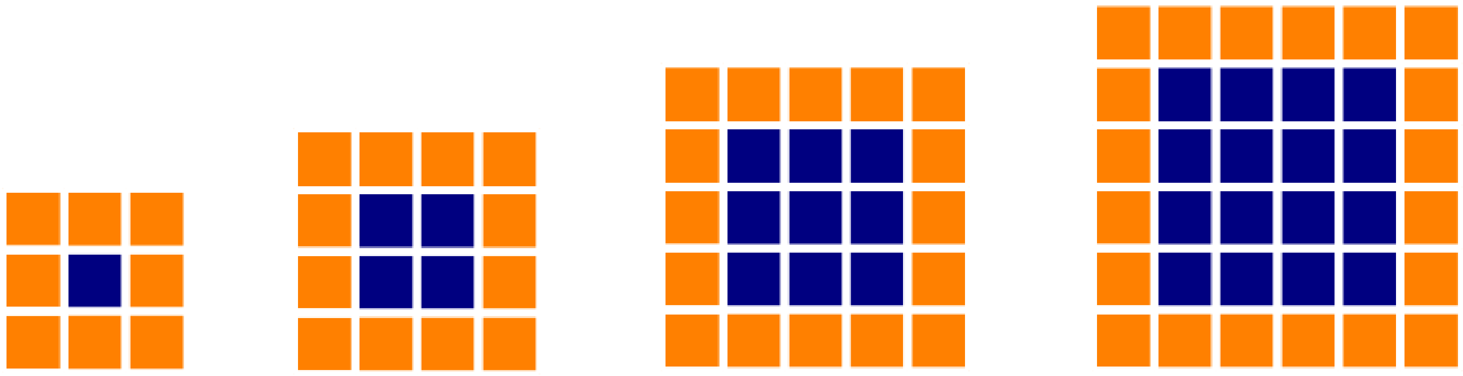


PRIMJERI (13)

Uočavamo da je narančasti rub poda dimenzija n m x n m, popločnog na isti način plavim i narančastim pločama, sastavljen od

$$n \cdot n - (n-2) \cdot (n-2) = n^2 - (n-2)^2 = \mathbf{4(n-1)}$$

kvadratnih ploča.



DIMENZIJE PODA	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	**10 x 10**	***n* x *n***
BROJ NARANČASTIH PLOČA	8	12	16	20	24	**36**	**4(*n* – 1)**

PRIMJERI (14)

Primjer.

Dan je niz slika koje se sastoje od kružića. Nastavimo li nizati slike prema istom pravilu, odredite ukupni broj kružića na:

(a) 20. slici u nizu

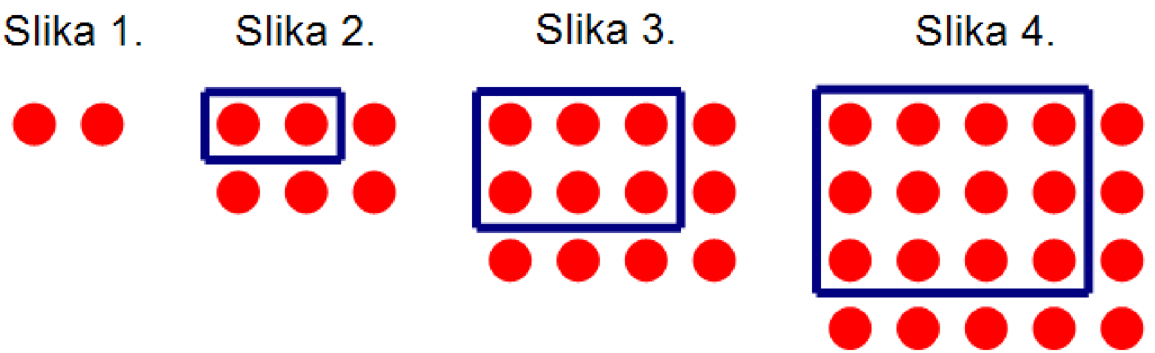
(b) *n*-toj slici u nizu.

PRIMJERI (15)

Rješenje.

Pravilnost u nizu kružića možemo uočiti na više načina.

***Prvi način*.**



Uočimo da je broj kružića na svakoj sljedećoj slici jednak broju kružića na prethodnoj slici, uvećanom za broj kružića koji "obrubljuju" prethodnu sliku. Taj je "obrub" u svakom koraku veći za 2 kružića.

BROJ SLIKE	1	2	3	4	5	6	***n***
BROJ KVADRATA	2	2 **+ 4** = 6	6 **+ 6** = 12	12 **+ 8** = 20	20 **+ 10** = 30	30 **+ 12** = 42	**?**

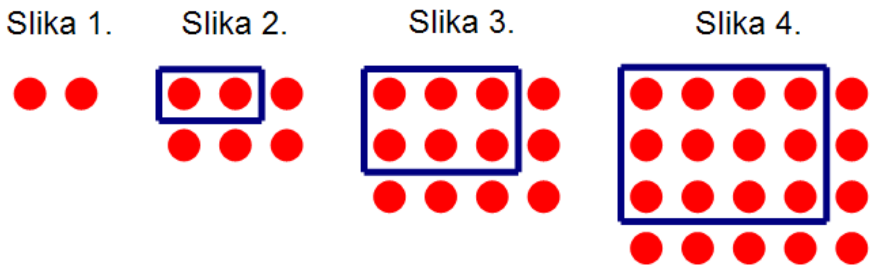
PRIMJERI (16)

Očito, ovim načinom teže je odrediti opći izraz za broj kružića na slici.

BROJ SLIKE	1	2	3	4	5	6	***n***
BROJ KVADRATA	2	2 **+ 4** 2 + **2** · **2** = 6	6 **+ 6** 6 + **3** · **2** = 12	12 **+ 8** 12 + **4** · **2** = 20	20 **+ 10** 20 + **5** · **2** = 30	30 **+ 12** 12 + **6** · **2** = 42	**?**

Uočavamo **rekurzivnu relaciju** za broj kružića na n-toj slici, a_n:

$$a_1 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + 2n, \quad n = 2, 3, \ldots$$



PRIMJERI (17)

Sada primjenjujemo **metodu teleskopiranja**, tj. ispisujemo redom izraze za a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2n \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2(n-1) \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + 2(n-2) \\ &\vdots \\ a_2 &= a_1 + 2\cdot 2 \\ a_1 &= 1\cdot 2 \end{aligned}\right\} +$$

Zbrajanjem ovih relacija i skraćivanjem izraza na lijevoj i desnoj strani, slijedi:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

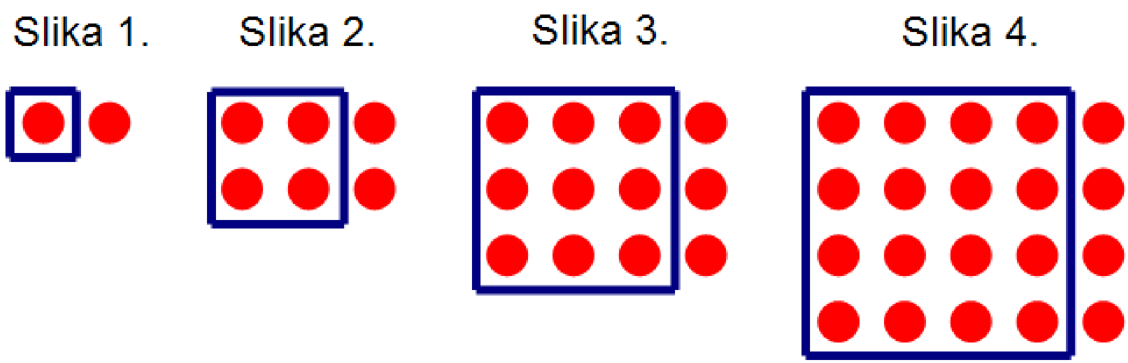
BROJ SLIKE	1	2	3	4	5	20	***n***
BROJ KVADRATA	2	6	12	20	30	420	***n*(*n* + 1)**

PRIMJERI (18)

Naravno, ova metoda primjerena je učenicima završnih razreda srednje škole (gimnazije).

Učenicima osnovne škole primjereniji je drugi pristup.

Drugi način.



Vidimo da je na svakoj slici istaknut "kvadrat" od kružića, čija je "stranica duljine" jednake rednom broju slike u nizu, te da se osim njega na slici nalazi još onoliko kružića kolika je navedena "duljina stranice kvadrata". Prema tome, imamo tablicu:

BROJ SLIKE	1	2	3	4	5	20	n
BROJ KVADRATA	$\mathbf{1 \cdot 1 + 1}$ $= 2$	$\mathbf{2 \cdot 2 + 2}$ $= 6$	$\mathbf{3 \cdot 3 + 3}$ $= 12$	$\mathbf{4 \cdot 4 + 4}$ $= 20$	$\mathbf{5 \cdot 5 + 5}$ $= 30$	$\mathbf{20 \cdot 20 + 20}$ $= 420$	$n \cdot n + n$ $= n(n + 1)$

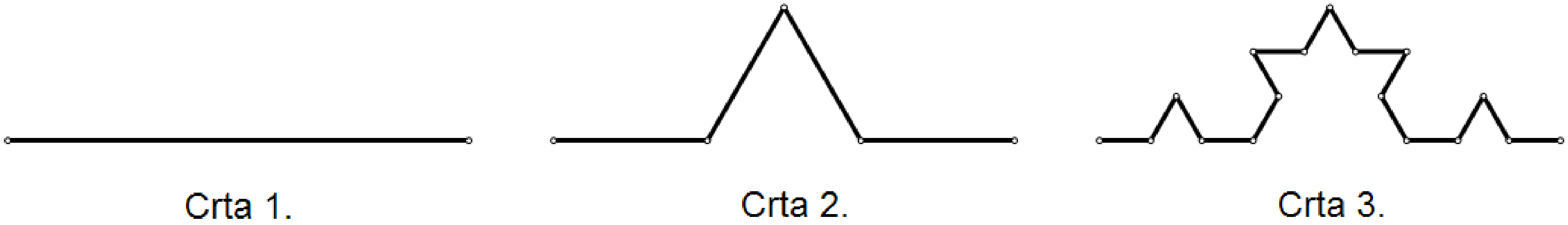
PRIMJERI (19)

Primjer.

Na slici je niz crta koje se sastoje od dužina. Nastavimo li nizati crte prema istom pravilu, odredite broj dužina na:

(a) 5. crti u nizu

(b) *n*-toj crti u nizu.

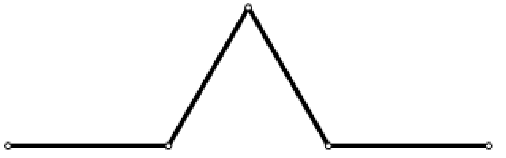


PRIMJERI (20)

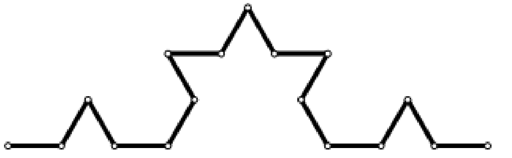
Rješenje.

Uočimo pravilnost u broju dužina od kojih se sastoji svaka od crta.

1 dužina



4 dužine



16 dužina

Svaka se dužina u sljedećem koraku transformira u 4 dužine. Zato imamo:

BROJ CRTE	1	2	3	4	***n***	**5**
BROJ DUŽINA	1	4	$16 = 4 \cdot 4 = 4^2$	$64 = 16 \cdot 4 = 4^3$	$\mathbf{4^{n-1}}$	$\mathbf{4^4 = 256}$

SHEMA PRIJELAZA IZ JEDNOG PRIKAZA U DRUGI

Primjer. Prijelaz iz prikaza riječima u tablični i simbolički prikaz

Zadano je pravilo pridruživanja koje svakom realnom broju x pridružuje njegov dvostruki kvadrat umanjen za 4.

(a) Ispunite tablicu pridruženih vrijednosti za ovo pravilo.

x	4	2	0	-1	-3
broj pridružen broju x					

(b) Pravilo pridruživanja zapišite matematičkim simbolima.

SHEMA PRIJELAZA IZ JEDNOG PRIKAZA U DRUGI (2)

Rješenje.

(a)

x	4	2	0	-1	-3
broj pridružen broju x	28	4	-4	-2	14

(b) Broj pridružen broju x je $2x^2 - 4$, odnosno $p(x) = 2x^2 - 4$.

Proces izgradnje ovog pridruživanja je sljedeći:

x	4	2	0	-1	-3	x
broj pridružen broju x	28	4	-4	-2	14	$2x^2 - 4$

ANALOGIJA GENERALIZACIJA

GRAFIČKI PRIKAZ BROJEVNOG NIZA

RAZLIČITI PRIKAZI NIZOVA

U prethodnim smo primjerima brojevne nizove prikazivali, odnosno zapisivali na sljedeća četiri načina:

(a) pomoću konkretnih, fizičkih materijala, slikama ili crtežima

(b) tablicom

(c) riječima

(d) simbolima

Sada dodajemo još jedan važan način prikazivanja brojevnog niza – grafički prikaz niza, odnosno funkcije u koordinatnom sustavu:

- horizontalna će os (apscisa) prikazivati redni broj članova niza
- vertikalna os (ordinata) njihovu vrijednost.
- uređeni par (*redni broj člana niza*, *vrijednost člana niza*) u koordinatnom sustavu prikazujemo točkom.

VAŽNO!!!

Učenici trebaju:

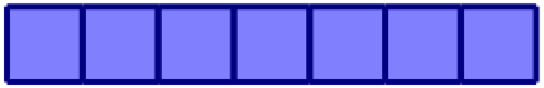
- **uspostaviti vezu između različitih prikaza istog brojevnog niza**
- **razviti vještinu prevođenja jednog prikaza u drugi, što je ključno za razumijevanje pojma funkcije**

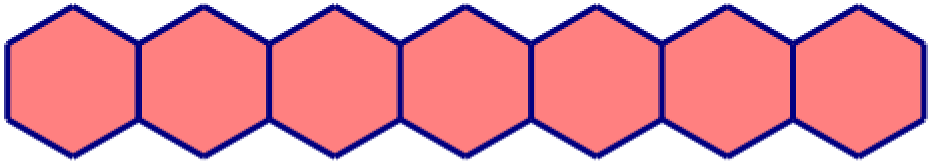
PRIMJERI

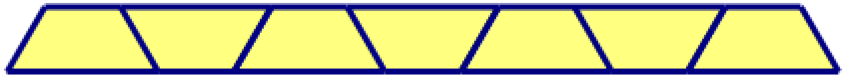
Primjer. Opseg geometrijskog uzorka

Na slici su geometrijski uzorci sastavljani od kvadrata, jednakokračnih trapeza te pravilnih šesterokuta. Stranice kvadrata, stranice šesterokuta te kraća osnovica trapeza jedinične su duljine, a dulja osnovica trapeza dvostruko je dulja od njih.

Odredite opsege ovih geometrijskih uzoraka u ovisnosti o broju u njima nanizanih likova. Razmislite o različitim strategijama!



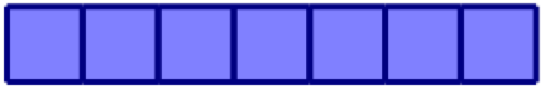




PRIMJERI (2)

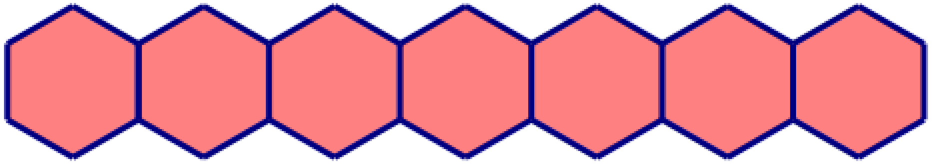
Rješenje.

***Kvadratni uzorak*.**



Uočavamo da je opseg uzorka od *n* kvadrata jednak **2*n* + 2**, pri čemu smo najprije zbrojili duljine gornje i donje stranice svakog od kvadrata u uzorku te tome dodali duljine po jedne bočne stranice prvog i zadnjeg kvadrata u nizu.

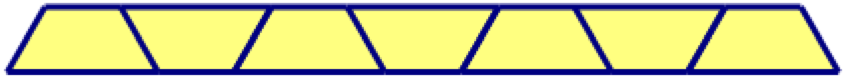
***Šesterokutni uzorak*.**



Uočavamo da je opseg uzorka od n šesterokuta jednak **4*n* + 2**, pri čemu smo najprije zbrojili duljine dviju gornjih i dviju donjih stranica svakog od šesterokuta u uzorku te tome dodali duljine po jedne bočne stranice prvog i zadnjeg šesterokuta u nizu.

PRIMJERI (3)

***Trapezasti uzorak*.**



Uočavamo da je opseg uzorka od jednog trapeza 5, dok se dodavanjem svakog novog trapeza opseg uzorka poveća za 3. Zato je opseg uzorka od n trapeza jednak

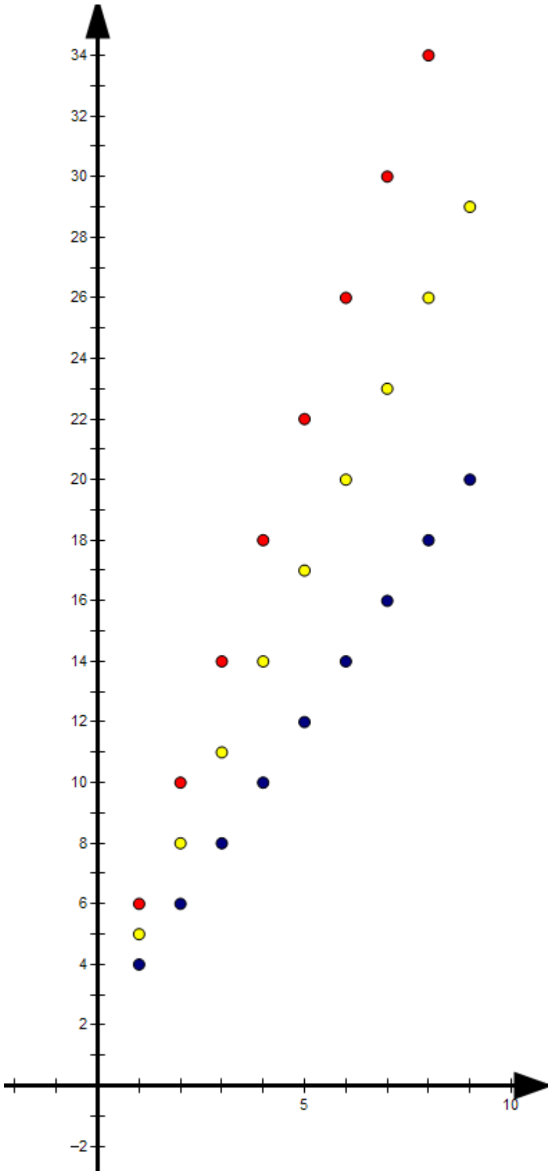
$$5 + 3(n - 1) = \mathbf{3\boldsymbol{n} + 2}.$$

PRIMJERI (4)

Grafički prikaz usporedbe brzina rasta opsega uzoraka.

Uočavamo da se najbrže povećava opseg šesterokutnog uzorka, a najsporije opseg kvadratnog uzorka.

n	KVADRATNI UZORAK	TRAPEZASTI UZORAK	ŠESTEROKUTNI UOZRAK
1	4	5	6
2	6	8	10
3	8	11	14
4	10	14	18
5	12	17	22
6	14	20	26
7	16	23	30
8	18	26	34
9	20	29	38
10	22	32	42



BROJEVNI NIZOVI U IZVANMATEMATIČKOM KONTEKSTU.
MODELIRANJE SITUACIJE.

MODELIRANJE SITUACIJE BROJEVNIM NIZOVIMA

Brojevnim nizovima u nastavi matematike možemo modelirati situacije iz učenicima bliskog nematematičkog konteksta.

Pritom je važno povezati različite prikaze tih situacija.

Primjer.

Marko i Ivan skupljaju sličice nogometaša. U paketiću sličica nalazi se 5 sličica. Ivan svakog dana kupi 2 paketića, a Marko 3 paketića. Ako Marko sada ima 33, a Ivan 57 sličica, koliko sličica će imati svaki od njih za 10 dana? Hoće li Marko u jednom trenutku imati više sličica nego Ivan? Ako hoće, nakon koliko dana?

MODELIRANJE SITUACIJE BROJEVNIM NIZOVIMA (2)

Rješenje.

Odmah uočimo da Ivan svakoga dana kupi 10, a Marko 15 sličica.

To znači da se broj sličica svakoga od njih povećava stalnom brzinom, tj. linearno ovisi o broju proteklih dana od početka brojanja.

Prikažimo tablicom koliko koji od dječaka ima sličica pojedinog dana.

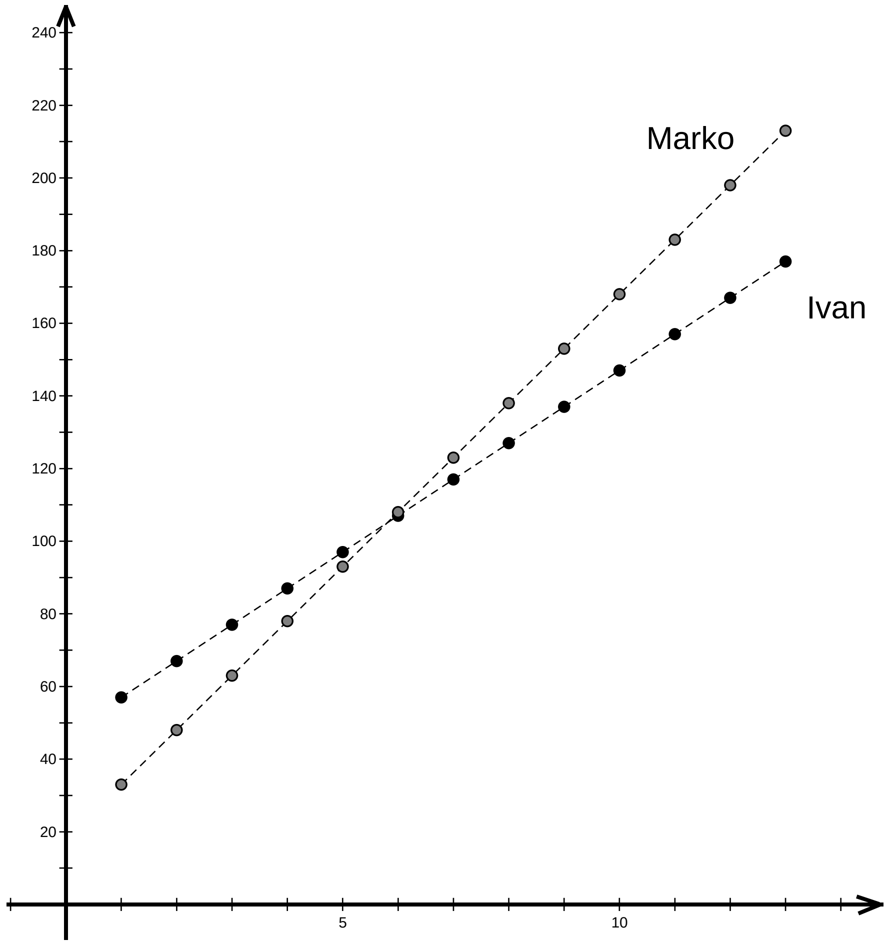
BROJ DANA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
BROJ IVANOVIH SLIČICA	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	157
BROJ MARKOVIH SLIČICA	33	48	63	78	93	108	123	138	153	168	183

Iz tablice čitamo da će 11. dana, tj. za 10 dana Ivan imati 157, a Marko 183 sličice nogometaša.

Također vidimo i da će 6. dana, tj. za 5 dana Marko imati više sličica od Ivana. Isto možemo zaključiti i iz grafičkog prikaza brojeva Markovih i Ivanovih sličica

MODELIRANJE SITUACIJE BROJEVNIM NIZOVIMA (3)

Isto možemo zaključiti i iz grafičkog prikaza brojeva Markovih i Ivanovih sličica:



MODELIRANJE SITUACIJE BROJEVNIM NIZOVIMA (4)

Primjer.

U jednoj trgovini prodaju se bilježnice po 20 kn. Ako netko kupi 5 bilježnica, šestu bilježnicu može kupiti za 10 kn. Koliko je najviše bilježnica moguće kupiti za 265 kn?

Rješenje.

Promatrat ćemo funkciju cijene u ovisnosti o broju kupljenih bilježnica.

Odmah je jasno da ona nije linearna.

Prikažimo ju prvo tablično.

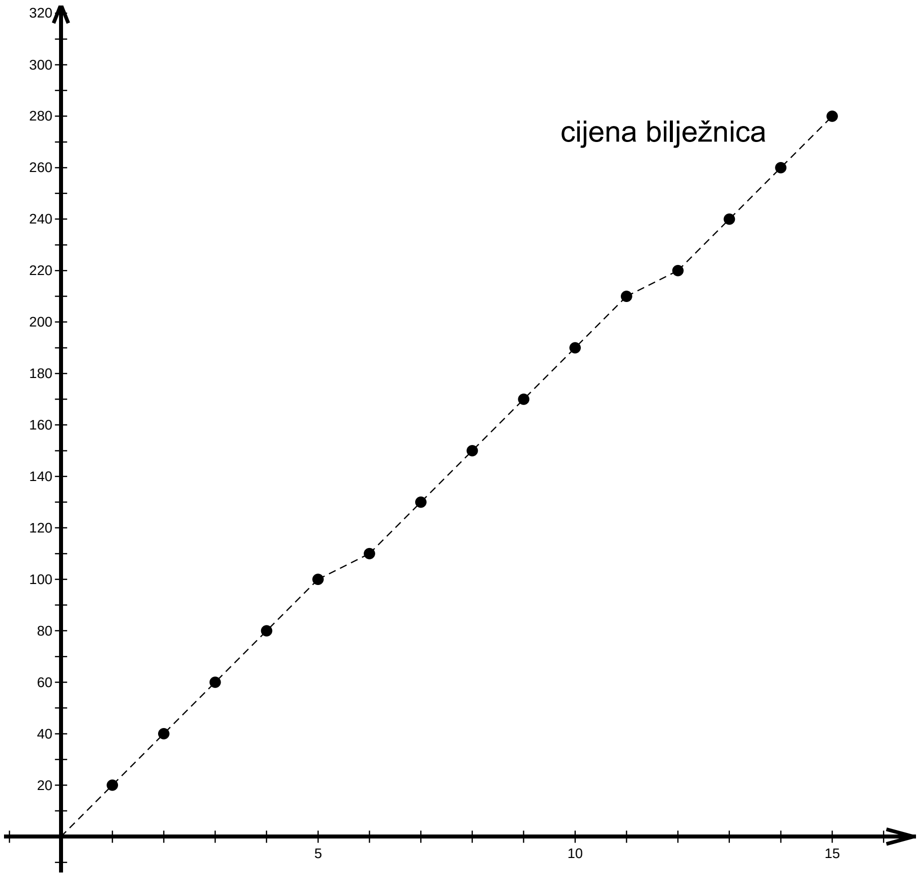
BROJ BILJEŽNICA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
CIJENA (kn)	20	40	60	80	100	110	130	150	170	190	210	220

Već iz tablice učenici mogu zaključiti da je za 265 kn moguće kupiti 14 bilježnica, čija je cijena 260 kn.

MODELIRANJE SITUACIJE BROJEVNIM NIZOVIMA (5)

Do istog smo zaključka mogli doći i očitavanjem grafa funkcije cijene.

Primijetimo da je ona po dijelovima linearna.



DISKRETNE I KONTINUIRANE SITUACIJE

DISKRETNE I KONTINUIRANE SITUACIJE

NOVI KORAK U IZGRADNJI POJMA FUNKCIJE

Diskretne situacije:

- argument funkcije je prirodni broj, tj. redni broj (indeks) člana niza.
- grafički prikaz sastoji se od nepovezanih točka u koordinatnom sustavu.

Kontinuirane situacije:

- situacije u kojima je vrijednost argumenta bilo koji realan broj iz nekog intervala

VAŽNO!!!

Prijelaz s diskretnih na kontinuirane situacije sljedeći je važan korak u izgradnji funkcije.

MODELIRANJE FUNKCIJAMA

Primjer. Životni vijek stanovnika Kanade

Analizom statističkih podataka utvrđeno je da se očekivani životni vijek Kanađana, izražen godinama, može modelirati linearnom ovisnošću

$$m(t) = 0.2299t + 71.668,$$

pri čemu je t vrijeme proteklo od 1979. godine, izraženo u godinama. Za očekivani životni vijek Kanađanki dobiven je sličan model,

$$ž(t) = 0.1357t + 79.052.$$

Interpretirajte koeficijente u ova dva modela u kontekstu situacije koju modeliraju.

Koliki je očekivani životni vijek Kanađana i Kanađanki ove godine, a koliki će biti za 25 godina?

Odredite koje će se godine, prema ovim modelima, očekivani životni vijek Kanađana i Kanađanki izjednačiti.

MODELIRANJE FUNKCIJAMA (2)

Primjer. Taksi-službe

U Alfagradu djeluju četiri taksi-službe: *Brzica*, *Hitrec*, *Gradske kamikaze* i *Alfa-taksi*. Svoje usluge naplaćuju po sljedećim cjenicima:

TAKSI-SLUŽBA	CIJENA STARTA	CIJENA PO PRIJEĐENOM KILOMETRU
Brzica	30 kn	1.50 kn
Hitrec	20 kn	4 kn
Gradske kamikaze	15 kn	6 kn
Alfa-taksi	-	10 kn

MODELIRANJE FUNKCIJAMA (3)

- Ispunite tablicu usporedbe cijena taksi-službi za dane udaljenosti.

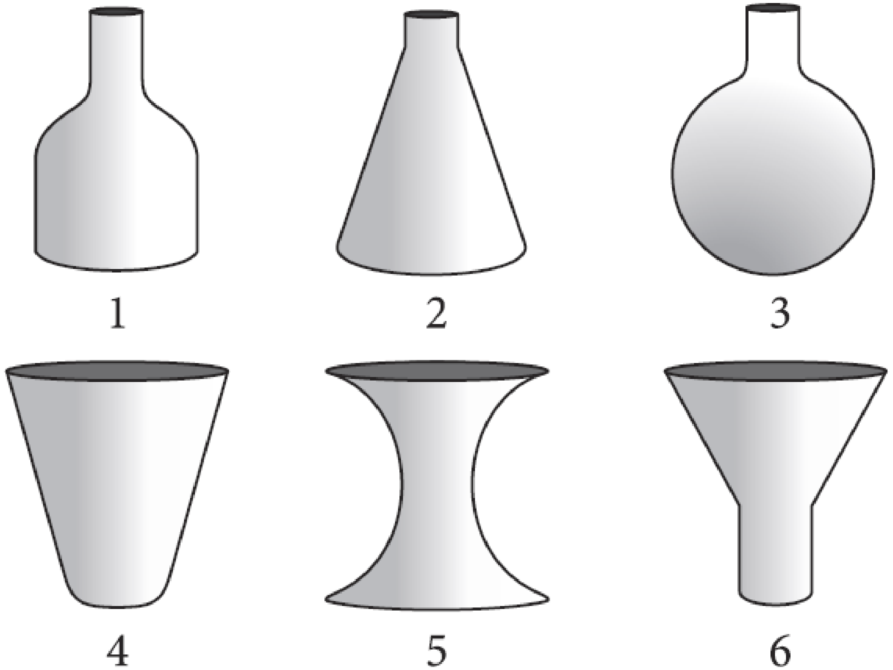
TAKSI-SLUŽBA	CIJENA ZA PRIJEĐENU UDALJENOST (u kn)			
	2 km	2.5 km	3.5 km	5 km
Brzica				
Hitrec				
Gradske kamikaze				
Alfa-taksi				

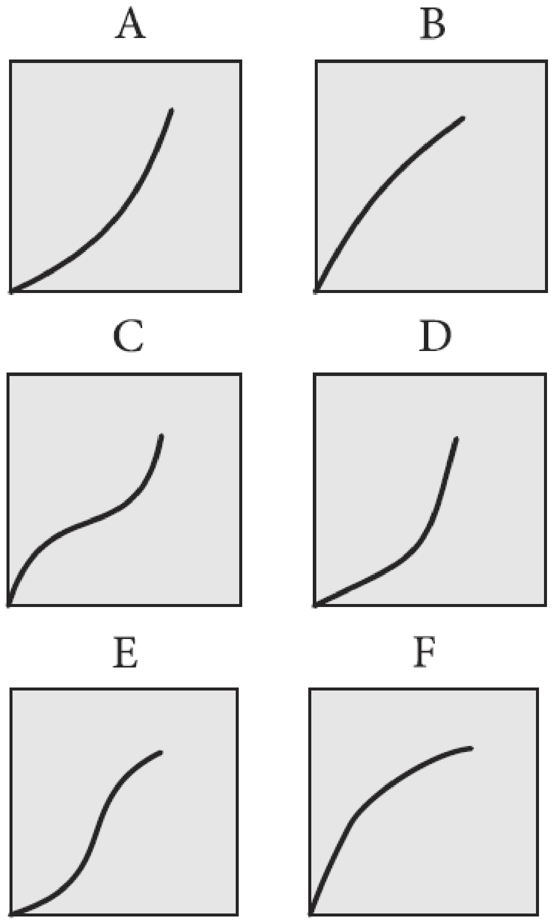
- Napišite cijenu pojedine taksi-službe za prijeđenih *x* kilometara.
- Želi li proći najjeftinije, koju će taksi-službu pozvati gospođa Jurić za vožnju od 10 km?
- Koja je najveća udaljenost koju može prijeći gospodin Duljić vozeći se alfagradskim taksijem ako u novčaniku ima 100 kn?

VEZA POJAVE I GRAFA

Primjer. Ovisnost visine vode u posudi o zapremini te vode

Na slikama su posude označene brojevima od 1 do 6. Povežite svaku posudu s grafikonom koji priazuje njezino punjenje vodom, tj. prikazuje ovisnost visine vode u posudi o zapremini te vode.





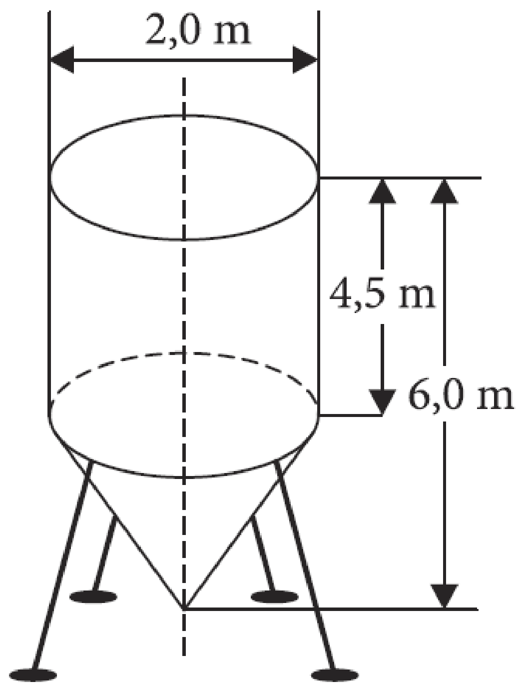
VEZA POJAVE I GRAFA (2)

Primjer.

Spremnik, kao na slici, puni se vodom.

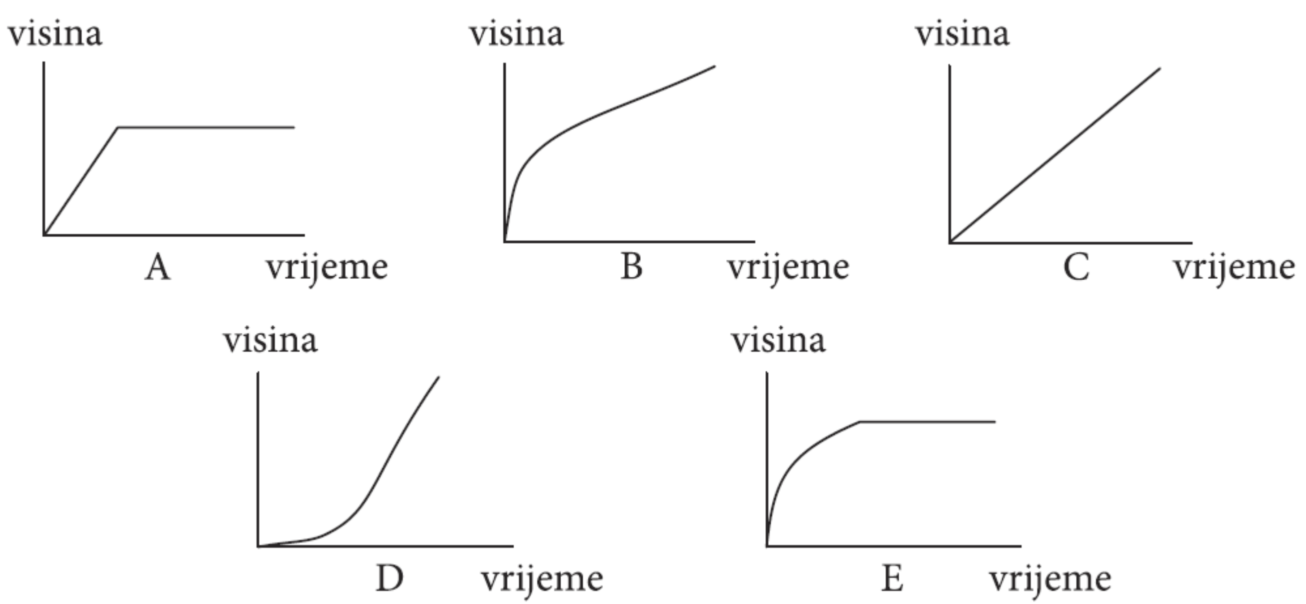
(a) Kolika je njegova zapremnina?

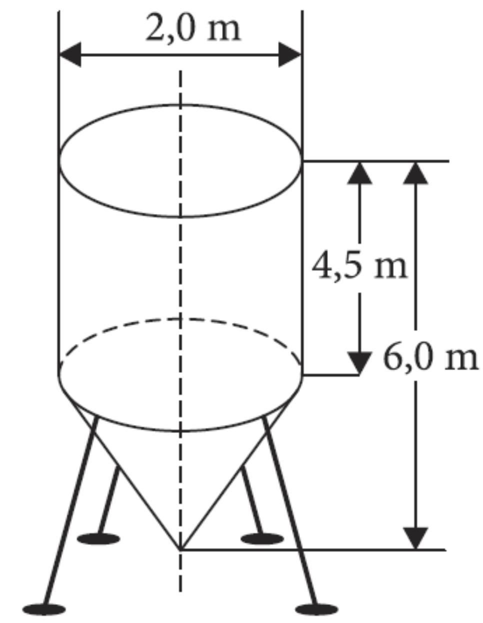
(b) Koliko je m^3 vode u spremniku ukoliko je napunjen do polovine visine svog donjeg dijela?



VEZA POJAVE I GRAFA (3)

(c) Ukoliko je punjenje vode jednolično, koji od grafova pravilno prikazuje ovisnost visine vode u spremniku o vremenu punjenja?





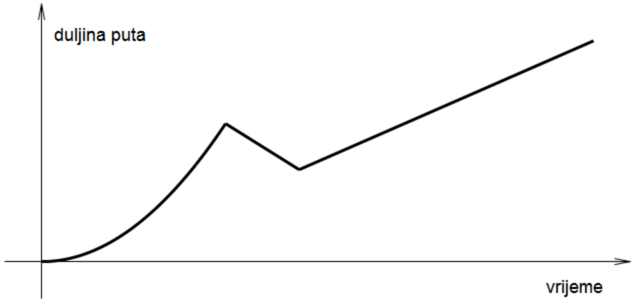
OVISNOST PUTA O VREMENU

Primjer. Ovisnost duljine prijeđenog puta o proteklom vremenu

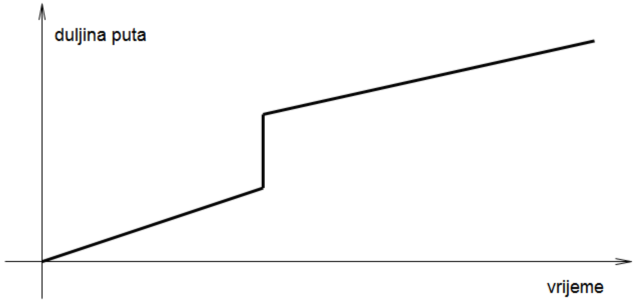
Neki od grafova na slici prikazuju ovisnost prijeđenog puta o proteklom vremenu. Odredite koji su to grafovi i za svaki od njih napišite kratku priču s opisom putovanja koje prikazuje.

Obrazložite i zašto svaki od preostalih grafova ne prikazuje putovanje.

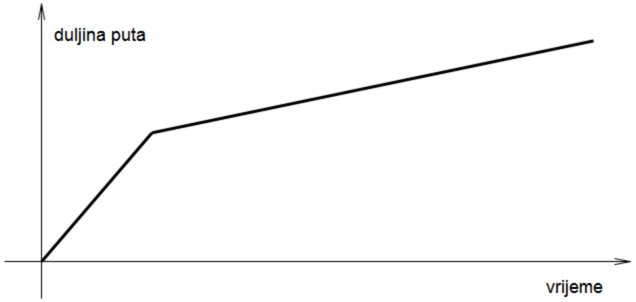
A.



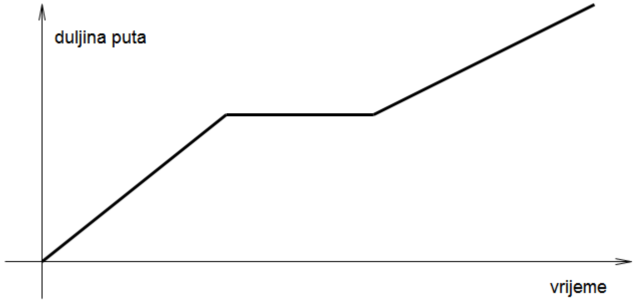
B.



C.

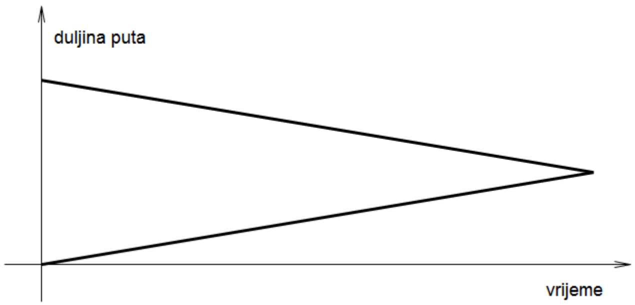


D.

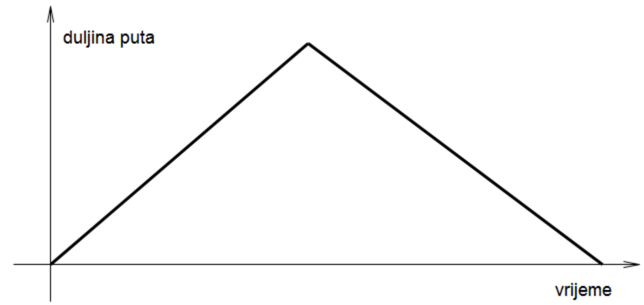


OVISNOST PUTA O VREMENU (2)

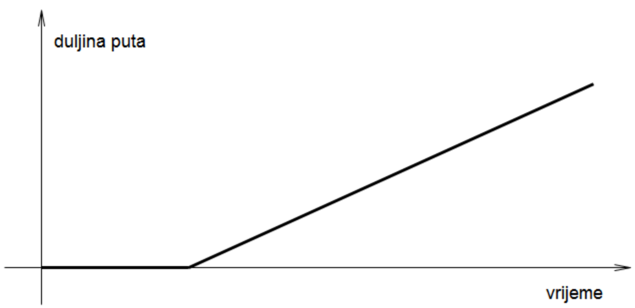
E.



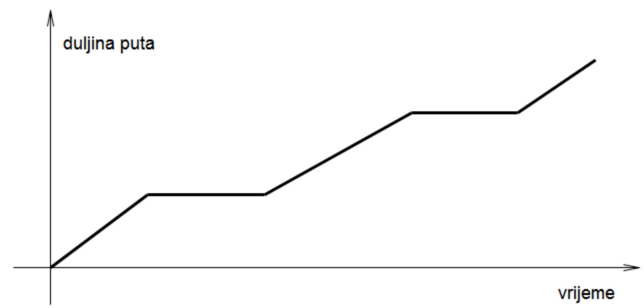
F.



G.



H.

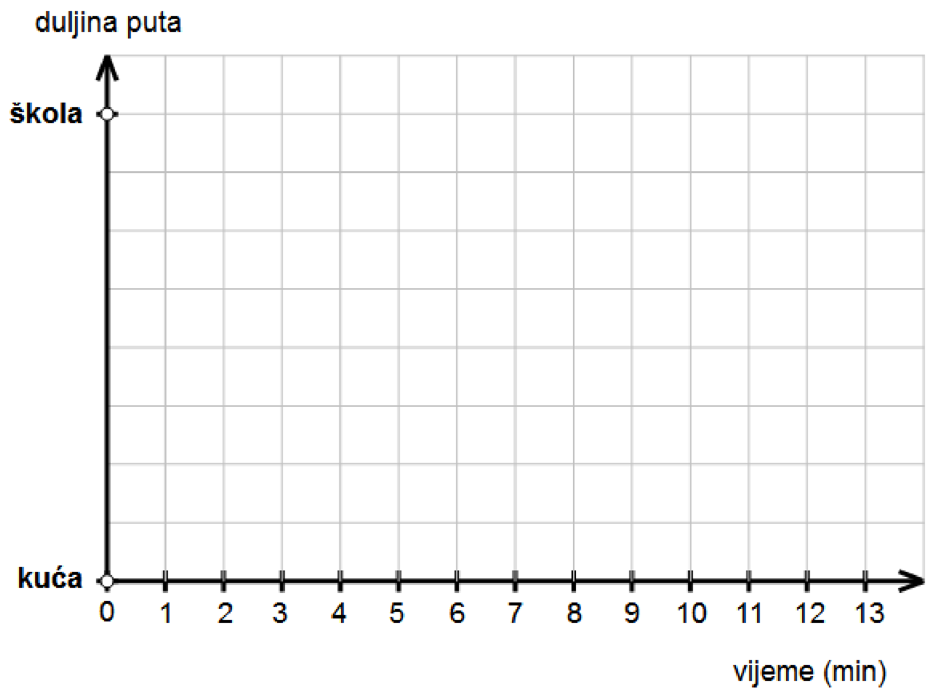


OVISNOST PUTA O VREMENU (3)

Primjer. Ovisnost duljine prijeđenog puta o proteklom vremenu

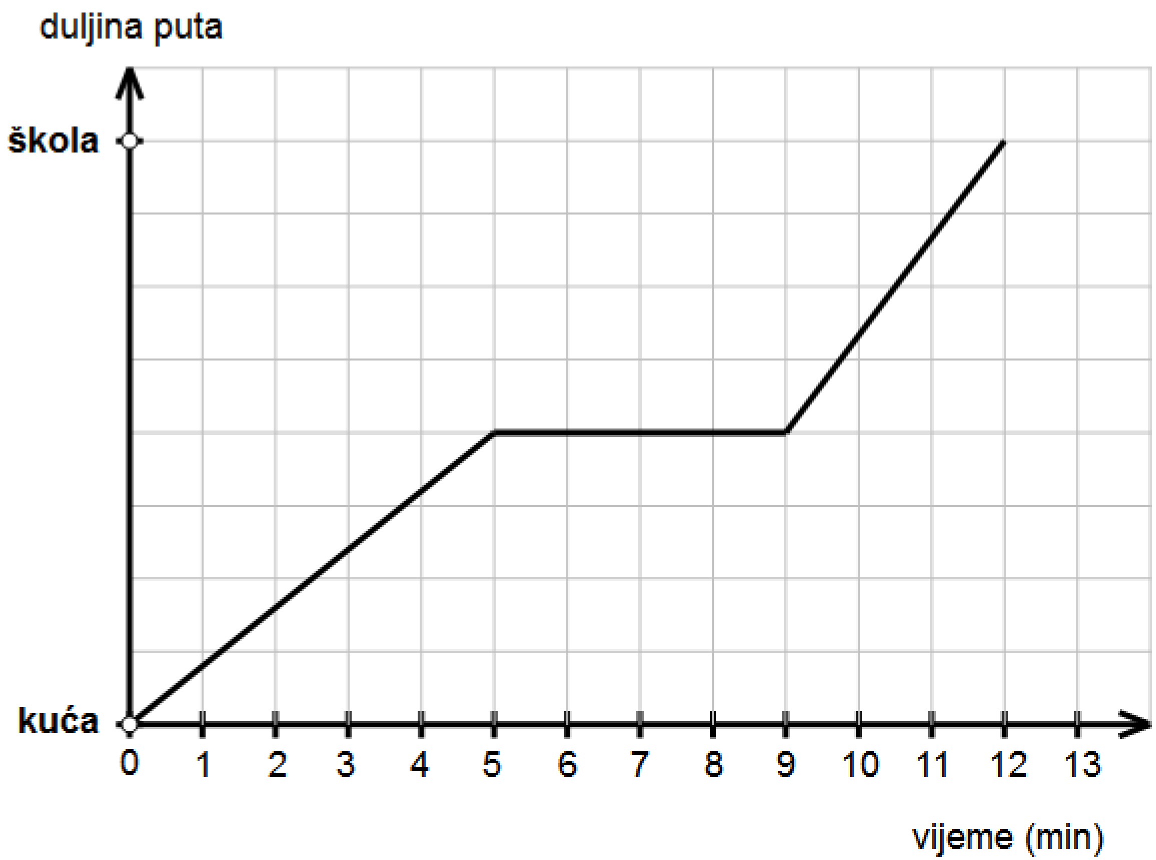
Petar je put od kuće do škole prešao za dvanaest minuta. Prvu polovinu puta prešao je za pet minuta, hodajući stalnom brzinom. Zatim je zastao u papirnici kupiti bilježnicu, na što je potrošio četiri minute. Ostatak puta prešao je trčeći stalnom brzinom.

U danom pravokutnom koordinatnom sustavu grafički prikažite ovisnost duljine Petrovog prijeđenog puta o proteklom vremenu (min). Udaljenost od Petrove kuće od škole već je označena na vertikalnoj osi.



OVISNOST PUTA O VREMENU (4)

Rješenje.

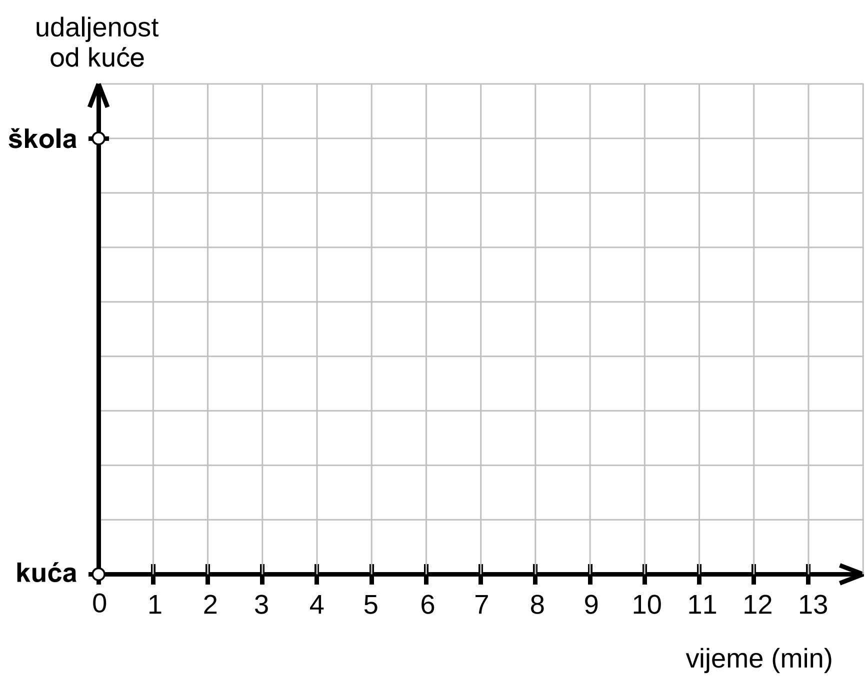


OVISNOST PUTA O VREMENU (5)

Primjer. Ovisnost udaljenosti od čvrste točke o proteklom vremenu

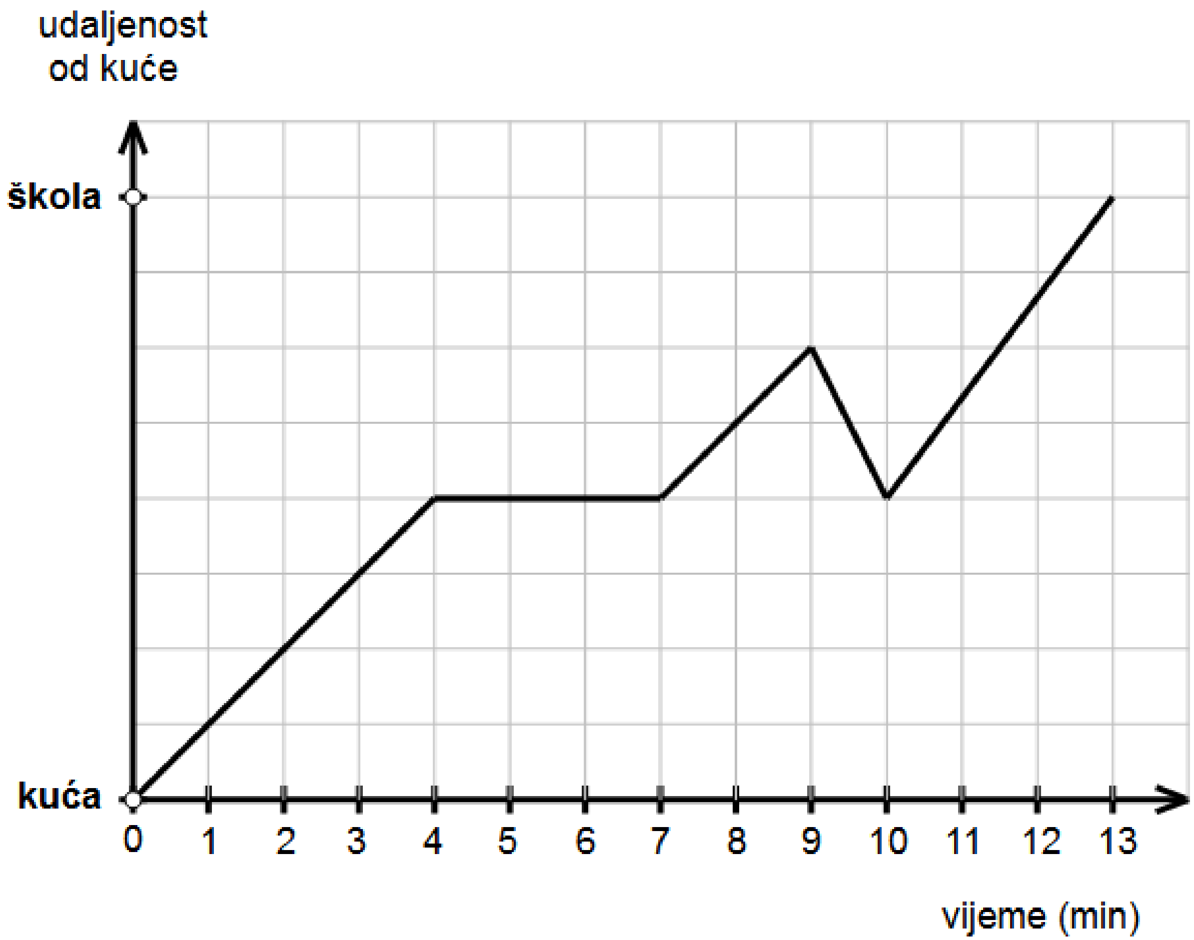
Srećko je put od kuće do škole prešao za 13 minuta. Prvu polovinu puta prešao je za 4 minute, hodajući stalnom brzinom. Zatim je na tri minute zastao u papirnici kupiti olovku, nakon čega je istom brzinom kao prije nastavio hodati prema školi. Dvije minute kasnije sjetio se da je u papirnici zaboravio kišobran. Trčeći stalnom brzinom, za minutu se vratio natrag do papirnice. Pokupio je kišobran i odjurio do škole.

U danom pravokutnom koordinatnom sustavu grafički prikaži ovisnost Srećkove udaljenosti od kuće o proteklom vremenu (min). Udaljenost od Srećkove kuće od škole već je označena na vertikalnoj osi.



OVISNOST PUTA O VREMENU (6)

Rješenje.



NEKOLIKO PRIMJERA UČENIČKIH AKTIVNOSTI

Primjer učeničke aktivnosti. Arhimedova metoda mjerenja oplošja kugle

Cilj aktivnosti:

- učenici će, radeći u paru, mjerenjem površine narančine kore “otkriti” vezu oplošja kugle i njenog polumjera

Oblik rada:

- rad u paru

Metoda rada:

- heuristička metoda / učenje otkrivanjem

Potreban materijal:

- deblji papir (A4 formata) za svaki par učenika
- 1 veća naranča za svaki par učenika
- nož za rezanje voća

NEKOLIKO PRIMJERA UČENIČKIH AKTIVNOSTI (2)

Tijek aktivnosti:

- svaki par (ili tim) učenika dobije jednu narandžu i razreže ju duž glavnog presjeka (kruga čiji je polumjer jednak polumjeru kugle)
- na papiru trebaju napraviti 5 otisaka glavnog presjeka i obrubiti ih olovkom
- učenici trebaju pažljivo oguliti naranču i korom “popuniti” kružne otiske
- zaključak: “popunjena” su približno 4 otiska
  - oplošje kugle (površina narančine kore) 4 je puta veće od površine njenog glavnog kruga, tj. $O = 4r^2\pi$

NEKOLIKO PRIMJERA UČENIČKIH AKTIVNOSTI (3)

Primjer učeničke aktivnosti. Visina vode u posudi

Staklene posude različitih oblika punimo vodom. Za svaku od njih grafički prikažite ovisnost visine ulivene vode u posudi o zapremnini te vode.






NEKOLIKO PRIMJERA UČENIČKIH AKTIVNOSTI (4)

Potrebni materijal.

- staklene posude različitih oblika
- mjerice za ulijevanje vode različitih zapremnina (čaša, menzura, žlica...)
- ravnalo za mjerenje visine tekućine
- milimetarski papir i folija za crtanje tablica i grafova

Tijek aktivnosti.

- Mjericu po mjericu ulijevajte vodu u posudu sve dok se ne napuni.
- Nakon svake ulivene mjerice izmjerite visinu vode u posudi.
- Mjerenje zabilježite u tablicu, a točku, tj. uređeni par (*broj mjerica*, *visina vode*) ucrtajte u graf.
- Završite crtanje grafa “spajanjem” njegovih ucrtanih točaka.

NEKOLIKO PRIMJERA UČENIČKIH AKTIVNOSTI (5)

Tijek aktivnosti (nastavak).

- Analizirajte utjecaj zapremnine mjerice na preciznost grafa.
- Usporedite grafove za različite posude.
- Ovisnost visine vode u posudi o zapremnini te vode prikažite formulom.

Predviđanje grafa.

Bez mjerenja pokušajte nacrtati analogne grafove za sljedeće posude.

PRIMJER. OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE

AKTIVNOST 1. Eksperiment mjerenjem fizičkih objekata

CILJ AKTIVNOSTI

Učenici će, radeći u timu, mjerenjem i računanjem “otkriti” vezu opsega kruga i njegovog polumjera.

OBLIK RADA

- suradničko-timski rad učenika u četveročlanim timovima

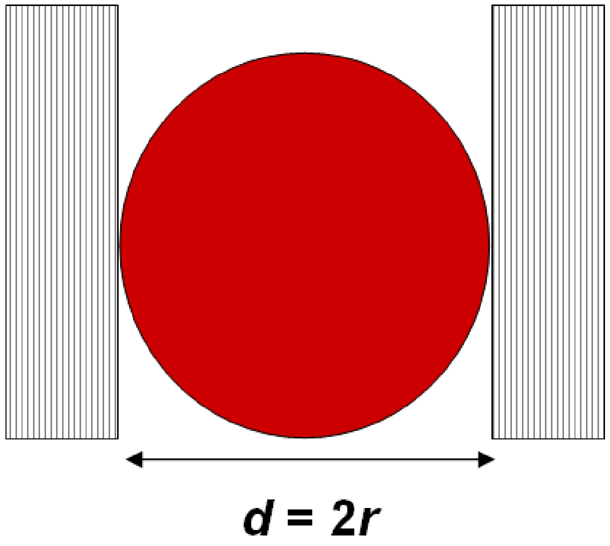
POTREBAN MATERIJAL

- fizički objekti oblika valjka i/ili (krnjeg) stošca (poklopci, vaze, čaše, konzerve i sl. različitih promjera)
- konac / špaga
- metar (označeno ravnalo)
- dvije veće debele knjige tvrdih korica
- nastavni listić za svakog učenika s tablicom za zapisivanje rezultata mjerenja i zaključaka

PRIMJER. OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (2)

TIJEK AKTIVNOSTI

- učenike podijelimo u timove (može i u parove, ovisno o raspoloživom materijalu)
- učenici mjere promjer *d* predmeta kružnog oblika, postavljajući ih između dviju uspravnih debljih knjiga uz rub stola
- izmjerene promjere učenici bilježe u pripremljenu tablicu



PRIMJER. OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (3)

TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- učenici mjere "opseg" predmeta tako da oko njihove "osnovke" omotaju konac ili špagu i na koncu / špagi označe puni krug
- učenici uz pomoć ravnala mjere duljinu *o* konca / špage do oznake (opseg kruga)
- izmjerene veličine učenici upisuju na odgovarajuća mjesta u tablici
- učenici za svaki krug računaju zbroj $d + o$, razliku $o - d$, umnožak $d \cdot o$ i količnik $o : d$ (uz pomoć džepnog računala ili alata za izradu proračunskih tablica) te formiraju tablicu s izračunatim vrijednostima
- učenici uočavaju da su svi omjeri približno jednaki (količnike treba zaokružiti na jednu ili najviše dvije decimale)
- nastavnik dobiveni konstantni omjer označava slovom π (čitaj: pi) i ispriča prikladnu (povijesnu) priču o tom važnom broju

VAŽNO!

Mjerenja treba izvršiti za različite valjkaste predmete, što je moguće više njih.

Bilo bi dobro izvršiti i više mjerenja za isti predmet (pogreška pri mjerenju).

PRIMJER. OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (4)

TABLICA ZA REZULTATE MJERENJA

PROMJER d	OPSEG o	ZBROJ $d + o$	RAZLIKA $o - d$	UMNOŽAK $d \cdot o$	KOLIČNIK $o : d$

PRIMJER. OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (5)

Diskusija koju treba provesti s učenicima:

- potrebno je voditi računa o mjernim jedinicama (opseg i promjer kruga moraju biti izmjereni istom mjernom jedinicom)

- izračunate vrijednosti omjera $o : d$ bit će između 3.13 i 3.16 – potrebno je s učenicima prodiskutirati utjecaj (ne)preciznosti mjerenja na rezultat

- obavezno prodiskutirati broj decimala na koje uopće ima smisla računati količnik $o : d$, budući da su i o i d izmjereni približno (s preciznošću od milimetra)

PRIMJER. OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (6)

AKTIVNOST 2. Eksperiment uz pomoć računala

CILJ AKTIVNOSTI

Učenici će, u paru ili individualno mjereći u alatu dinamične geometrije, "otkriti" vezu opsega kruga i njegovog promjera.

OBLIK RADA

- individualni rad ili rad u paru učenika na računalu

POTREBAN MATERIJAL

- "radna bilježnica" u softveru dinamične geometrije za svakog učenika ili par učenika
- nastavni listić za svakog učenika s uputama za rad, tablicom za zapisivanje mjerenja i zaključaka

PRIMJER. OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (7)

TIJEK AKTIVNOSTI

Učenici će:

- konstruirati kružnicu u alatu dinamične geometrije te izmjeriti njezin promjer (*d*) i opseg (*o*)
- izračunati zbroj $d + o$, razliku $o – d$, umnožak $d \cdot$ o i količnik $o : d$ te formirati tablicu s tim mjerenjima
- mijenjati promjer kružnice “povlačenjem točke” i tabelirati pripadajuća mjerenja

PROMJER d	OPSEG o	ZBROJ $d + o$	RAZLIKA $o - d$	UMNOŽAK $d \cdot o$	KOLIČNIK $o : d$

PRIMJER. OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (8)

TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak):

Učenici će:

- uočavati pravilnosti u stupcima tablice
- uređene parove (d, o) prikazati grafički u pravokutnom koordinatnom sustavu

Diskusija:

Učenici će:

- uočiti da kružnice većeg promjera imaju veći opseg (opseg raste s promjerom kružnice)
- uočiti da je opseg kružnice uvijek veći od njenog promjera (razlike $o - d$ su uvijek pozitivne)
- uočiti da je količnik $o : d$ stalan (ne ovisi o promjeru kružnice)
- diskutirati vrijednost količnika $o : d$ s obzirom na podešeni broj decimala u alatu dinamične geometrije
- uočiti da sve točke (d, o) pripadaju istom (polu)pravcu ishodištem koordinatnog sustava

PRIMJER. OPSEG KRUGA / DULJINA KRUŽNICE (9)

The Geometer's Sketchpad - [Slike-krug_kugla.gsp - 2]

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

d

d = 6,22 cm

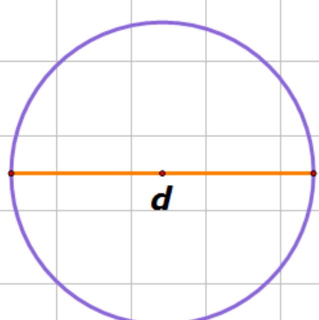
o = 19,54 cm

d+o = 25,76 cm

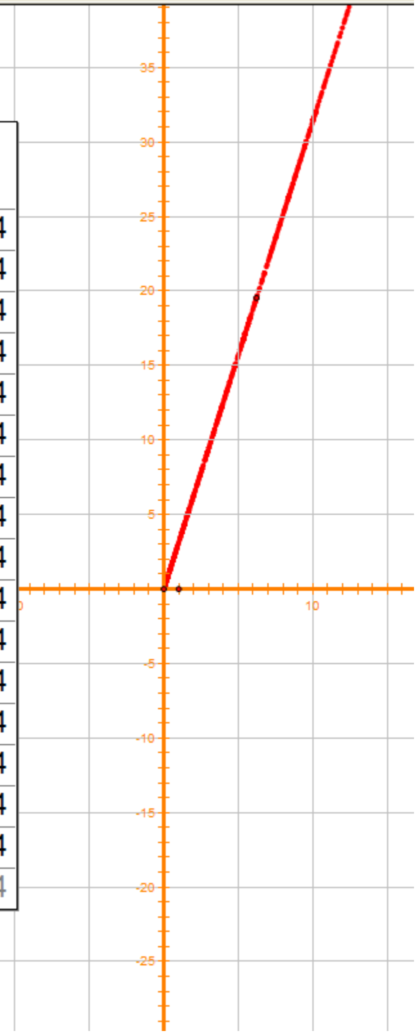
o-d = 13,32 cm

d·o = 121,52 cm²

$\frac{o}{d}$ = 3,14



d	o	d+o	o-d	d·o	$\frac{o}{d}$
0,11 cm	0,34 cm	0,45 cm	0,23 cm	0,04 cm²	3,14
0,29 cm	0,92 cm	1,21 cm	0,63 cm	0,27 cm²	3,14
0,58 cm	1,83 cm	2,42 cm	1,25 cm	1,07 cm²	3,14
0,90 cm	2,83 cm	3,73 cm	1,93 cm	2,55 cm²	3,14
1,38 cm	4,33 cm	5,71 cm	2,95 cm	5,96 cm²	3,14
1,70 cm	5,33 cm	7,02 cm	3,63 cm	9,03 cm²	3,14
2,01 cm	6,32 cm	8,34 cm	4,31 cm	12,73 cm²	3,14
2,57 cm	8,07 cm	10,64 cm	5,50 cm	20,72 cm²	3,14
2,94 cm	9,23 cm	12,17 cm	6,29 cm	27,13 cm²	3,14
3,34 cm	10,48 cm	13,81 cm	7,14 cm	34,95 cm²	3,14
3,89 cm	12,22 cm	16,12 cm	8,33 cm	47,57 cm²	3,14
4,42 cm	13,89 cm	18,31 cm	9,47 cm	61,38 cm²	3,14
4,76 cm	14,97 cm	19,73 cm	10,20 cm	71,31 cm²	3,14
5,35 cm	16,80 cm	22,14 cm	11,45 cm	89,80 cm²	3,14
5,80 cm	18,21 cm	24,01 cm	12,41 cm	105,54 cm²	3,14
6,22 cm	19,54 cm	25,76 cm	13,32 cm	121,52 cm²	3,14
6,22 cm	19,54 cm	25,76 cm	13,32 cm	121,52 cm²	3,14



PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA

CILJ AKTIVNOSTI

Učenici će, radeći u paru na pripremljenom nastavnom listiću, otkriti ovisnost duljine kružnog luka dane kružnice o veličini pripadnog središnjeg kuta.

NASTAVNI OBLIK

- diferencirana nastava u obliku rada u paru

NASTAVNA METODA

- heuristička nastava (otkrivanje pravilnosti)

POTREBAN MATERIJAL

- motivacijski zadatak
- nastavni listić za svakog učenika

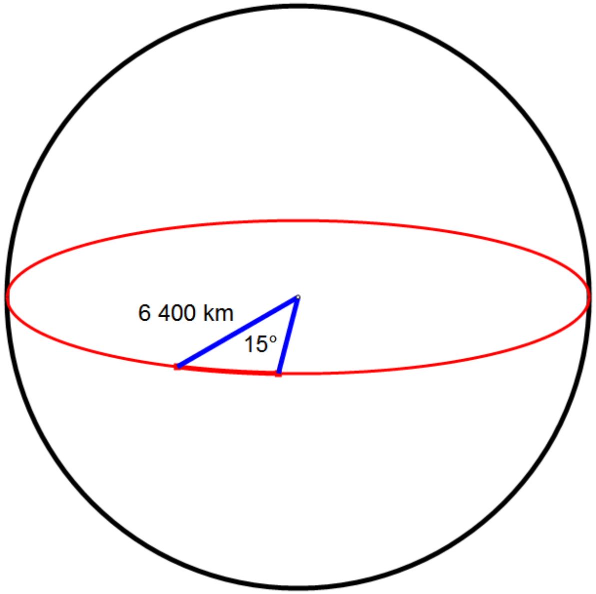
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (2)

TIJEK AKTIVNOSTI

- Učitelj pred učenike postavlja kontekstualizirani mativacijski zadatak.

Zadatak.

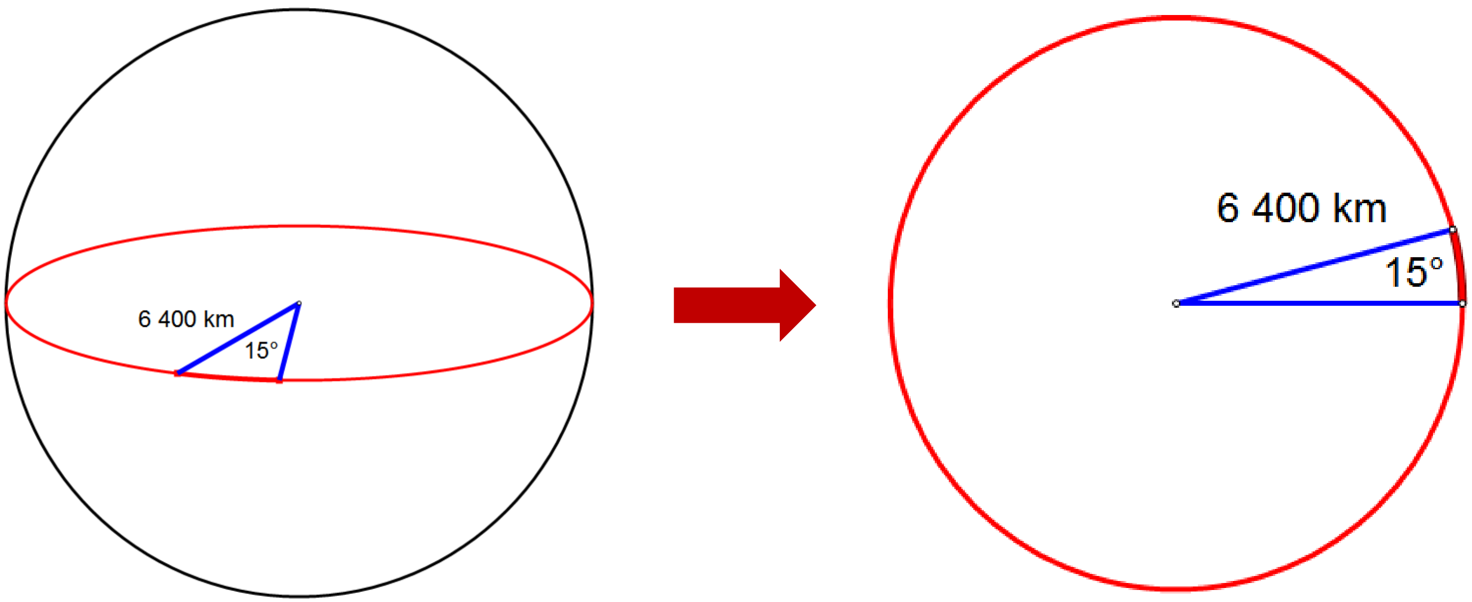
Odredite duljinu dijela Zemljinog ekvatora koji odgovara razlici geografskih dužina od 15°. Polumjer Zemlje duljine je približno 6 400 km.



PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (3)

TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Učenici interpretiraju tekst zadatka prevodeći ga na matematički jezik.
- Zaključuju da je potrebno odrediti duljinu kružnog luka kružnice (ekvatora) polumjera 6 400 km, koji odgovara središnjem kutu veličine 15°.

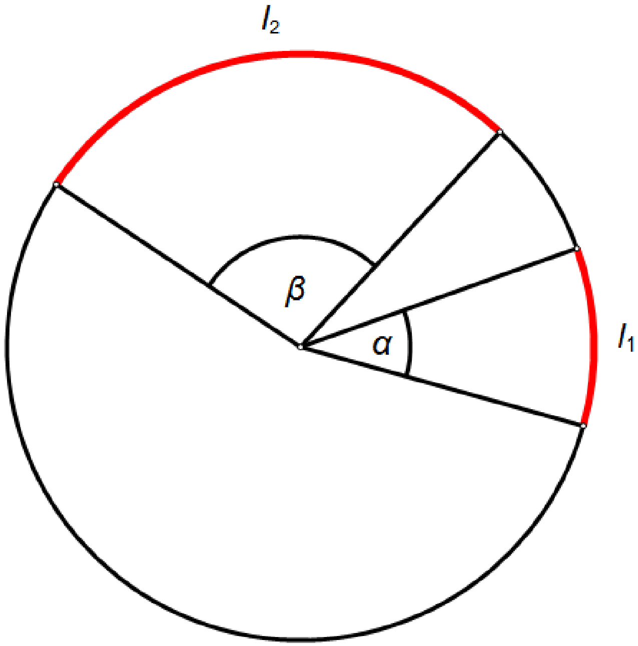


- **Prema tome, potrebno je povezati duljinu kružnog luka i veličinu pripadnog središnjeg kuta.**

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (4)

TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Učenici prvo intuitivno uočavaju kako se mijenja duljina kružnog luka:
  - za zadanu kružnicu (duljina polumjera je fiksna), većem središnjem kutu odgovara dulji pripadni kružni luk (što nije dovoljno za zaključak o proporcionalnosti!!)



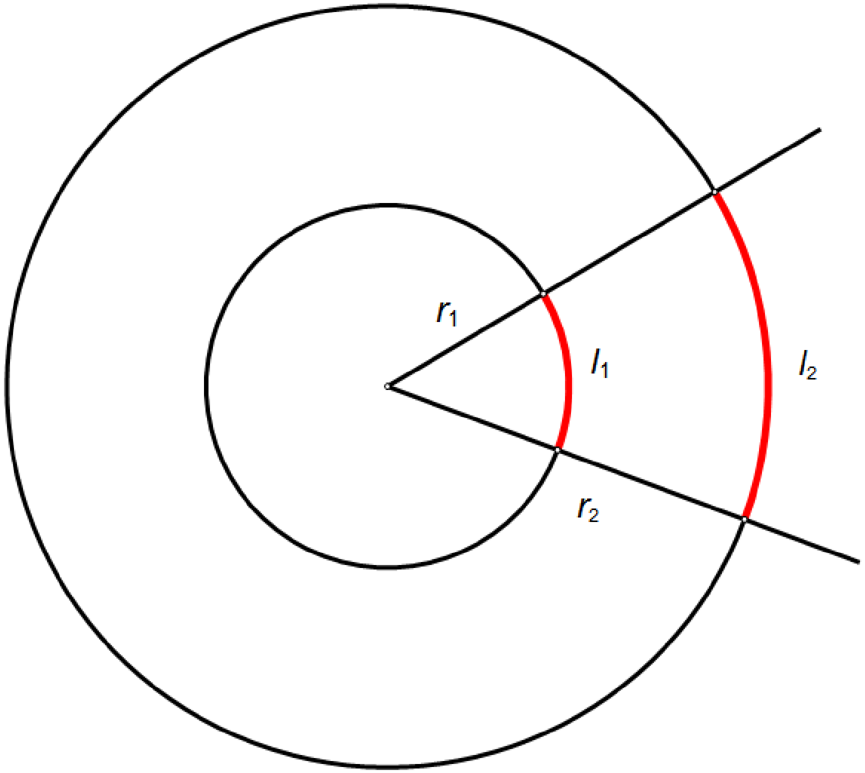
$$\alpha < \beta \Rightarrow l_1 < l_2$$

KOVARIJACIJA!!!

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (5)

TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

– za zadani središnji kut (veličina kuta je fiksna), kružnici većeg polumjera odgovara dulji kružni luk



KOVARIJACIJA!!!

$$r_1 < r_2 \Rightarrow l_1 < l_2$$

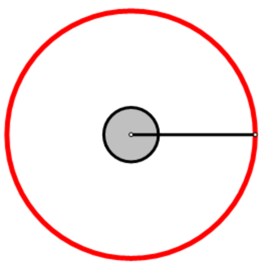
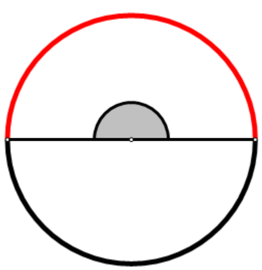
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (6)

TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Sada je potrebno otkriti tip ovisnosti duljine kružnog luka zadane (fiksne) kružnice o duljini polumjera te kružnice.
- Učenici dobivaju nastavni listić kojeg trebaju popuniti radeći u paru.
- Na nastavnom listiću prvo promatraju duljine poznatih kružnih lukova, vezane uz koncept razlomka i pridružuju im središnji kut.
- Cilj prvog dijela nastavnog listića je doći do duljine kružnog luka koja odgovara središnjem kutu veličine 1°.
- Nakon toga, multipliciranjem uz primjenu analogije i generalizacije nepotpunom indukcijom, učenici otkrivaju opću ovisnost.
- U procesu uočavanja pravilnosti bitno je ne preskakati logičke korake!

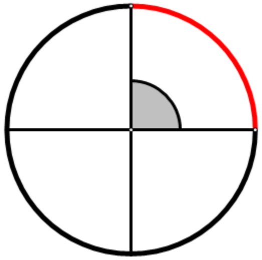
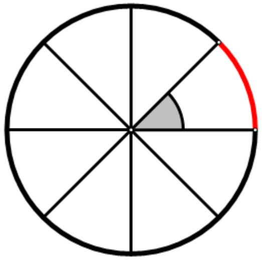
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (7)

Dana je kružnica opsega *o*. Radeći u paru dopunite tablicu! Što primjećujete?

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

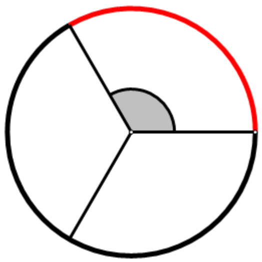
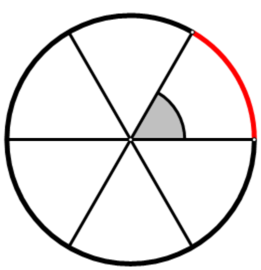
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (8)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

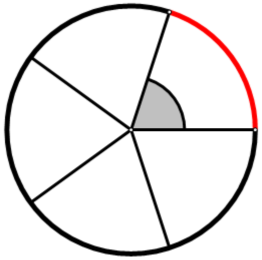
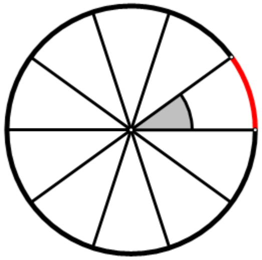
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (9)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

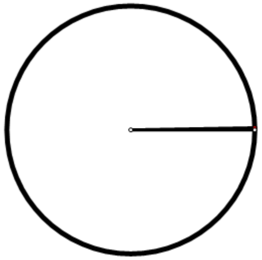
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (10)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
			
			

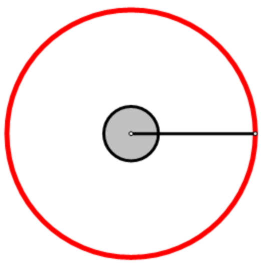
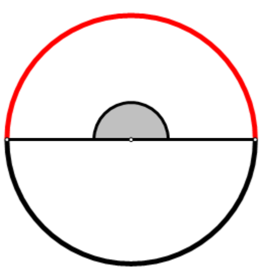
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (11)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{360}$ kružnice		

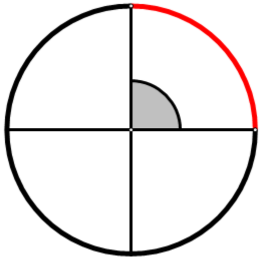
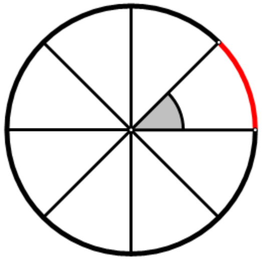
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (12)

Dana je kružnica opsega *o*. Radeći u paru dopunite tablicu! Što primjećujete?

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	cijela kružnica = 1 cijelo	o = opseg kruga	$360°$
	$\frac{1}{2}$ kružnice	$\frac{o}{2}$	$\frac{360°}{2} = 180°$

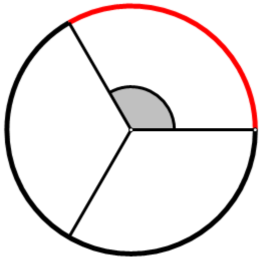
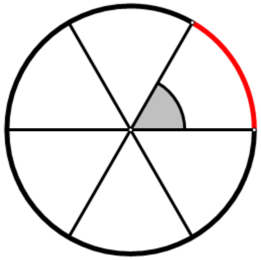
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (13)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{4}$ kružnice	$\frac{o}{4}$	$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$
	$\frac{1}{8}$ kružnice	$\frac{o}{8}$	$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

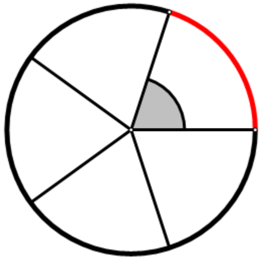
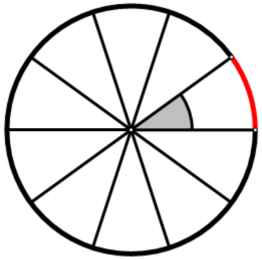
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (14)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{3}$ kružnice	$\frac{o}{3}$	$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$
	$\frac{1}{6}$ kružnice	$\frac{o}{6}$	$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

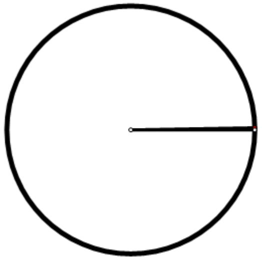
PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (15)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{5}$ kružnice	$\frac{o}{5}$	$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
	$\frac{1}{10}$ kružnice	$\frac{o}{10}$	$\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (16)

Tablica (nastavak)

KRUŽNI LUK	DIO KRUŽNICE	DULJINA KRUŽNOG LUKA	SREDIŠNJI KUT
	$\frac{1}{360}$ kružnice	$\frac{o}{360}$	$\frac{360^\circ}{360} = 1^\circ$

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (17)

TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Učenici će uočiti da se prepolavljanjem veličine središnjeg kuta prepolavlja i duljina pripadnog kružnog luka.

- Također će uočiti i da se smanjenjem veličine središnjeg kuta 4 **puta** jednako toliko **puta** smanjila i duljina pripadnog kružnog luka.

- Zapravo, učenici će primijetiti da su duljina kružnog luka i veličina odgovarajućeg središnjeg kuta **proporcionalne veličine.**

- Preostaje osvijestiti **koeficijent proporcionalnosti,** tj. jediničnu vrijednost.

- To je upravo duljina kružnog luka koja odgovara jediničnom kutu, tj. kutu veličine 1°.

- Kako bi to osvijestili, učenici sada dopunjuju i drugu tablicu.

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (18)

U paru dopunite i ovu tablicu!

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
1°	
2°	
3°	
4°	

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
5°	
10°	
15°	
47°	

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (19)

Tablica (nastavak)

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
$0.5°$	
$213.7°$	
$0°$	
α	

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (20)

U paru dopunite i ovu tablicu!

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
$1°$	$\frac{o}{360}$
$2°$	$2 \cdot \frac{o}{360}$
$3°$	$3 \cdot \frac{o}{360}$
$4°$	$4 \cdot \frac{o}{360}$

ANALOGIJA

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
$5°$	$5 \cdot \frac{o}{360}$
$10°$	$10 \cdot \frac{o}{360}$
$15°$	$15 \cdot \frac{o}{360}$
$47°$	$47 \cdot \frac{o}{360}$

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (21)

Tablica (nastavak)

SREDIŠNJI KUT	DULJINA KRUŽNOG LUKA
$0.5°$	$0.5 \cdot \frac{o}{360}$
$213.7°$	$213.7 \cdot \frac{o}{360}$
$0°$	$0 \cdot \frac{o}{360} = 0$
α	$\alpha \cdot \frac{o}{360}$

I OVE SU ANALOGIJE VAŽNE!

GENERALIZACIJA (nepotpunom indukcijom)

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (22)

TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Konačno, učenici su došli do zaključka da je duljina *l* kružnog luka kružnice opsega *o*, koji odgovara središnjem kutu veličine *α* dana izrazom:

$$l = l(\alpha) = \frac{o}{360} \cdot \alpha$$

- Dakle, koeficijent proporcionanosti jednak je $\frac{o}{360}$.

- Ako je kružnica bila polumjera duljine *r*, zbog prije naučene veze *o* = 2*r*π učenici zaključuju:

$$l = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha$$

- Napomena: Vezu je ipak smislenije pamtiti u obliku $l = \frac{o}{360} \cdot \alpha$

PRIMJER. DULJINA KRUŽNOG LUKA (23)

TIJEK AKTIVNOSTI (nastavak)

- Na kraju se treba vratiti na polazni kontekstualizirani zadatak i riješiti ga.

- Iz danih podataka zaključujemo da je duljina dijela ekvatora koji odgovara razlici od 15° u geografskoj dužini jednaka

$$l = \frac{2 \cdot 6\,400 \cdot \pi}{360} \cdot 15 \approx 1\,675 \text{ km}$$

- Ima li u ovom računu smisla koristiti decimale?!