

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

Srednje škole - 4. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ukoliko učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. • Prilikom raspada ${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He}$, jedan se neutron pretvori u proton što znači da se radi o β^- raspadu. Puni raspad glasi

$${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e, \quad [3 \text{ BODA}]$$

i u njemu još nastaju elektron i (elektronski) (anti)neutrino.

- Označimo $t = 0$ trenutak u kojem je eksplodirala prva atomska bomba i pretpostavimo da je sav tritij odmah završio u oceanu. Zbog radioaktivnog raspada, količina tritija i helija se u vremenu mijenja na način

$$N_{\text{tritij}}(t) = N_1 2^{-t/T}, \quad [1 \text{ BOD}]$$

$$N_{\text{helij}}(t) = N_1 (1 - 2^{-t/T}), \quad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je N_1 količina početnog tritija oslobođena u eksploziji prve bombe, a $T = 12.3$ godina vrijeme poluživota tritija. Odavde je relativni omjer helija naspram tritija

$$\eta_1(t) = \frac{N_{\text{helij}}(t)}{N_{\text{tritij}}(t)} = 2^{t/T} - 1. \quad [2 \text{ BODA}]$$

Ako izvrnemo ovu relaciju, dobijemo

$$t = \frac{\ln(1 + \eta_1)}{\ln 2} T. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Uvrštavanjem $\eta_1 = 0.483$ dobivamo $t \approx 7$ godina, što znači da je prva atomska bomba eksplodirala 1945. godine. [1 BOD]

- Neka je $\tau = 10$ godina, vrijeme proteklo između eksplozija dviju atomskih bombi. Količina tritija i helija nakon eksplozije druge bombe, $t \geq \tau$ se mijenja u vremenu na način

$$N_{\text{tritij}}(t) = N_1 2^{-t/T} + N_2 2^{-(t-\tau)/T}, \quad [2 \text{ BODA}]$$

$$N_{\text{helij}}(t) = N_1 (1 - 2^{-t/T}) + N_2 (1 - 2^{-(t-\tau)/T}), \quad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je N_2 količina tritija nastala u eksploziji druge bombe. Relativni omjer ovih elemenata sad postaje

$$\eta_2(t) = \frac{N_{\text{helij}}(t)}{N_{\text{tritij}}(t)} = \frac{2^{t/T} - 1 + k(2^{t/T} - 2^{\tau/T})}{1 + k 2^{\tau/T}}, \quad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je $k = N_2/N_1$ omjer količina tritija oslobođenih u drugoj, odnosno, prvoj eksploziji. Odavde možemo izraziti k kao

$$k = -\frac{1 - (1 + \eta_2)2^{-t/T}}{1 - (1 + \eta_2)2^{-(t-\tau)/T}}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Uvrštavanjem $t = 11$ godina imamo

$$k \approx 4. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Druga je bomba, dakle, bila četiri puta snažnija od prve.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

2. • Budući da, prema Fermatovom principu, sve zrake koje krenu iz točke O dođu u fokus F za isto vrijeme, dovoljno je izračunati potrebno vrijeme samo za jednu zraku. Najjednostavnije je uzeti zraku koja se giba uzduž optičke osi. Za nju imamo

$$t = \frac{l-d}{c} + \frac{d}{c/n} = \frac{l+(n-1)d}{c} \quad [2 \text{ BODA}]$$

$$= 3.37 \times 10^{-9} \text{ s.} \quad [1 \text{ BOD}]$$

- Zraci koja upada na leću na visini h , potrebno je

$$t = \frac{2\sqrt{h^2 + ((l-w)/2)^2}}{c} + \frac{nw}{c} \quad [2 \text{ BODA}]$$

vremena da dođe do točke F . Međutim, prema Fermatovom principu, to vrijeme mora biti isto onom prethodno izračunatom. Dakle,

$$\frac{2\sqrt{h^2 + ((l-w)/2)^2}}{c} + \frac{nw}{c} = \frac{l+(n-1)d}{c}. \quad [2 \text{ BODA}]$$

Sređivanjem, dobijemo kvadratnu jednadžbu za w ,

$$(n^2 - 1)w^2 - 2(n-1)(\ell + nd)w + d(n-1)(2\ell + (n-1)d) - 4h^2 = 0. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$w_{1,2} = \frac{\ell + nd}{n+1} \pm \frac{\sqrt{(n-1)[(n-1)(\ell-d)^2 + 4(n+1)h^2]}}{n^2 - 1}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Predznak rješenja biramo uvjetom $w(h=0) = d$. Uz ovo, oblik leće $w(h)$ je

$$w(h) = \frac{\ell + nd}{n+1} - \frac{\sqrt{(n-1)[(n-1)(\ell-d)^2 + 4(n+1)h^2]}}{n^2 - 1}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

- Veličinu leće određujemo iz uvjeta $w(h=R) = 0$, odnosno—debljina leće na njenom rubu mora, po definiciji, biti jednaka nuli. [2 BODA]

Uvrštavanje $w = 0$ vodi na izraz za polumjer leće

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(n-1)[2\ell + (n-1)d]d} \quad [1 \text{ BOD}]$$

$$= 7.90 \text{ cm.} \quad [1 \text{ BOD}]$$

- U fokusu F će završiti sve zrake koje upadaju na leću. A to su upravo one zrake koje su iz točke O emitirane pod kutom

$$\varphi \in [-\alpha, +\alpha] \quad [2 \text{ BODA}]$$

u odnosu na optičku os, gdje je $\cos \alpha = (\ell/2)/(R^2 + (\ell/2)^2)^{1/2}$. Prema tome, ako zamislimo da se iz točke O širi sferna fronta svjetlosnog vala polumjera $(R^2 + (\ell/2)^2)^{1/2}$, zrake koje će biti fokusirane se nalaze na sfernoj kapici polumjera R . Zaključujemo, udio fokusiranih zraka jest omjer oplošja te sferne kapice i oplošja cijele sfere

$$\eta = \frac{2\pi(R^2 + (\ell/2)^2)(1 - \cos \alpha)}{4\pi(R^2 + (\ell/2)^2)} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{(n-1)d}{\ell + (n-1)d} \quad [2 \text{ BODA}]$$

$$= 1.22 \%. \quad [1 \text{ BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

3. Optički spektrometar, kao što mu ime kaže, mjeri optički spektar uzorka. Pod pretpostavkom da mjereni spektar odgovara spektru crnog tijela, temperaturu uzorka možemo odrediti iz Wienovog zakona

$$\lambda_{\max} T = b, \quad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je λ_{\max} valna duljina zračenja najvećeg intenziteta, a b Wienova konstanta. Dakle, ako će spektrometar mjeriti temperaturu T' različitu od prave temperature uzorka T , to mora biti zato jer mjeri drugačiju maksimalnu valnu duljinu λ'_{\max} . [2 BODA]

Valna je duljina zračenja povezana s frekvencijom preko

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad [1 \text{ BOD}]$$

odnosno s periodom τ preko

$$\lambda = c\tau. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Dakle, do promjene u mjerenju valne duljine može doći jedino ako za uzorak i mjerni instrument drugačije teče vrijeme. No, ovo je poznat efekt koji se manifestira pri relativističkim brzinama—radi se, naime, o dilataciji vremena. [1 BOD]

- Ako se uzorak u laboratorijskom sustavu giba brzinom v konstantnog iznosa, no ne nužno i smjera, tada je veza između proteklog vremena τ u sustavu uzorka i laboratorijskom sustavu τ' dana relacijom

$$\tau' = \gamma\tau, \quad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ Lorentzov faktor. Budući je $\gamma > 1$, to je $\tau' > \tau$. Ako uzmemo da je τ upravo period zračenja, imamo vezu između emitirane $\lambda = c\tau$ i detektirane valne duljine $\lambda' = c\tau'$

$$\lambda' = \gamma\lambda. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Ova relacija vrijedi za sve valne duljine, pa i one maksimalnog intenziteta. Prema tome, veza između prave temperature uzorka $T = b/\lambda_{\max}$ i one mjerene u laboratorijskom sustavu $T' = b/\lambda'_{\max}$ je

$$T' = \frac{1}{\gamma}T. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Dakle, spektrometar će mjeriti manju temperaturu od prave temperature uzorka.

- Iz prethodne relacije možemo odrediti brzinu gibanja uzorka, ako znamo T i T'

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{T'}{T}\right)^2}. \quad [2 \text{ BODA}]$$

Uzmajući u obzir za se radi o kružnom gibanju, imamo

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{c}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{T'}{T}\right)^2}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Uvrštavajući $T = 1000 \text{ K}$ i $T' = 999 \text{ K}$, dobivamo potrebnu kutnu brzinu

$$\omega = 1.34 \times 10^7 \text{ rad/s}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

4. • Polazimo od zakona očuvanja

$$E_\gamma = E_+ + E_-, \quad [1 \text{ BOD}]$$

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_+ + \vec{p}_-. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Ovdje smo indeksom γ označili energiju i količinu gibanja upadnog fotona, a indeksima \pm energiju i količinu gibanja nastalog elektrona ($-$) i pozitrona ($+$). Ove ćemo jednadžbe kvadrirati, donju pomnožiti s c^2 i oduzeti od gornje. Na taj način dolazimo do

$$E_\gamma^2 - (\vec{p}_\gamma c)^2 = (E_+^2 - (\vec{p}_+ c)^2) + (E_-^2 - (\vec{p}_- c)^2) + 2(E_+ E_- - c^2 \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_-).$$

Izraze u zagradama možemo pojednostaviti koristeći

$$E_\gamma^2 = (\vec{p}_\gamma c)^2, \quad [1 \text{ BOD}]$$

$$E_\pm^2 = (\vec{p}_\pm c)^2 + (mc^2)^2, \quad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je m masa elektrona (pozitrona). Ovim manipulacijama dolazimo do izraza

$$0 = (mc^2)^2 + E_+ E_- - c^2 \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_-. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Ako sad u gornju relaciju stavimo npr. $E_- = E_\gamma - E_+$ i $\vec{p}_- = \vec{p}_\gamma - \vec{p}_+$, te opet iskoristimo vezu između relativističke energije i količine gibanja dolazimo do

$$E_+ E_\gamma = c^2 \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_\gamma. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Ako je θ_+ kut raspršenja pozitrona, tada gornja relacija postaje

$$E_+ E_\gamma = c^2 p_+ p_\gamma \cos \theta_+. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Koristeći $E_\gamma = p_\gamma c$ i $E_+ = \sqrt{(p_+ c)^2 + (mc^2)^2}$, imamo traženi izraz za θ_+ .

$$\cos \theta_+ = \frac{E_\gamma}{p_\gamma c} \frac{E_+}{p_+ c} = \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p_+}\right)^2}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Potpuno analogno bismo dobili izraz za kut raspršenja elektrona

$$\cos \theta_- = \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p_-}\right)^2}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Iz dobivenih rezultata vidimo da su kosinusi kutova raspršenja nastalih čestica veći od jedinice, odakle zaključujemo da do takvog raspršenja ne može doći. Drugim riječima, foton se ne može spontano raspasti na elektron-pozitron par. [2 BODA]

- Da bismo odredili minimalnu potrebnu energiju za raspršenje $\gamma N \rightarrow Ne^+e^-$, najlakše je zamisliti taj sudar u sustavu centra mase. Tada foton i jezgra jure jedan prema drugom, sudaraju se i foton se pretvori elektron-pozitron par. Ako je početna energija minimalna moguća, tada će, nakon sudara, svi produkti naprosto mirovati. Drugim riječima, među njima neće biti relativnog gibanja. To pak znači da će se u bilo kojem drugom referentnom sustavu, pa i u laboratorijskom, tj. onom u kojem olovni blok miruje, produkti sudara Ne^+e^- gibati kao jedna čestica mase $M^* = M + 2m$. [3 BODA]
S ovim razmatranjem možemo napisati zakone očuvanja

$$E_\gamma + Mc^2 = E^*, \quad [1 \text{ BOD}]$$

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}^*, \quad [1 \text{ BOD}]$$

gdje su E^* i \vec{p}^* energija i količina gibanja čestice mase M^* . Ponavljanjem računa kao u prethodnom zadatku, te koristeći $E^{*2} = (\vec{p}^* c)^2 + (M^* c^2)^2$ dolazimo do relacije

$$(Mc^2)^2 + 2E_\gamma Mc^2 = (M^* c^2)^2, \quad [2 \text{ BODA}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

odakle je

$$E_{\gamma} = 2mc^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right). \quad [1 \text{ BOD}]$$

minimalna energija koju mora imati upadni foton da bi se raspao na zadani način. Numerički,

$$E_{\gamma} = 1.02 \text{ MeV}. \quad [1 \text{ BOD}]$$