

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

Srednje škole – 3. Skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (18 bodova)

Brzina prve kugle prilikom sudara dobije se iz zakona očuvanja energije. Ako kao $h=0$ uzmemo točku u kojoj je kugla najniže, početna visina joj je $h = l_1 - l_1 \cos \theta$ (1 bod) pa slijedi

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta) \rightarrow v_{10} = \sqrt{2 g l_1 (1 - \cos \theta)} = 1.64 \text{ m/s (2 boda)}$$

Prilikom sudara vrijede zakoni očuvanja količine gibanja i energije:

$$m_1 v_{10} = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (2 \text{ boda})$$

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \quad (2 \text{ boda})$$

Ovaj sustav treba riješiti. Jedan način je, npr. pomnožiti drugu jednadžbu s 2, a zatim je podijeliti s prvom jednadžbom. Slijedi:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} = \frac{m - 5m}{m + 5m} 1.64 = -1.09 \text{ m/s} \quad (2 \text{ boda})$$

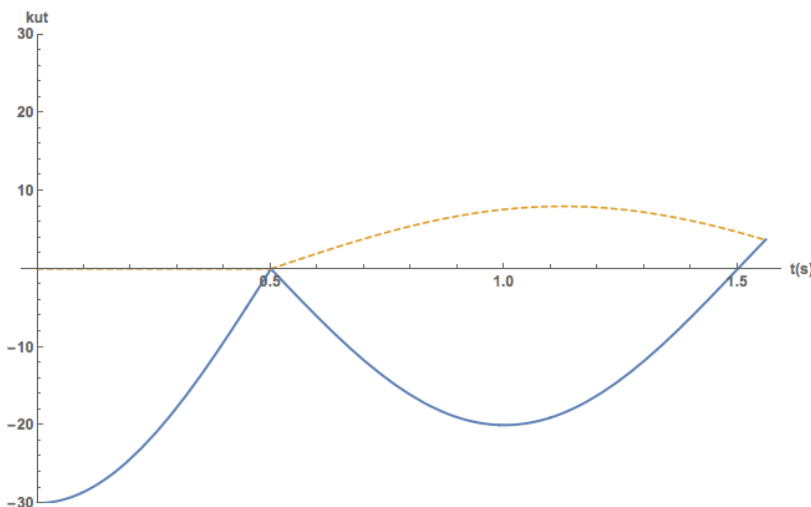
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10} = \frac{2m}{m + 5m} 1.64 = 0.55 \text{ m/s} \quad (2 \text{ boda})$$

Visine na koje se kuglice ponovno podignu slijedi iz zakona očuvanja energije. Vidi se iz predznaka brzine da se prva kuglica podiže natrag na lijevu stranu, a druga na desnu stranu.

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1') \rightarrow \theta_1' = \text{ArcCos} \left(1 - \frac{v_1'^2}{2 g l_1} \right) = 19.87^\circ \approx 20^\circ \text{ na lijevo (2 boda)}$$

$$\frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2') \rightarrow \theta_2' = \text{ArcCos} \left(1 - \frac{v_2'^2}{2 g l_2} \right) = 7.8^\circ \approx 8^\circ \text{ na desno (2 boda)}$$

Skica gibanja kugli dana je na grafu (2 boda). Puna linija predstavlja lakšu kuglu, crtkana predstavlja težu.



Drugi sudar kugli dešava se s desne strane okomice. To se može vidjeti ili iz grafa ili primijetiti da je period titranja desne kuglice veći jer titra na dužoj niti, pa desnoj kuglici treba više vremena da dosegne najvišu točku svog gibanja, iako je na manjem kutnom otklonu. (1 bod)

Drugi sudara dešava se na otprilike 3.7° stupnjeva s desne strane u trenutku $t = 1.56 \text{ s}$.

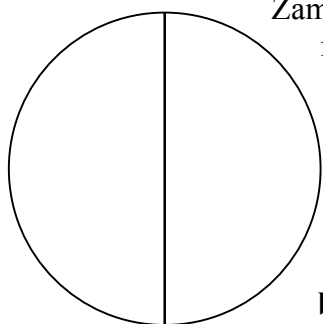
DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

2. zadatak (18 bodova)

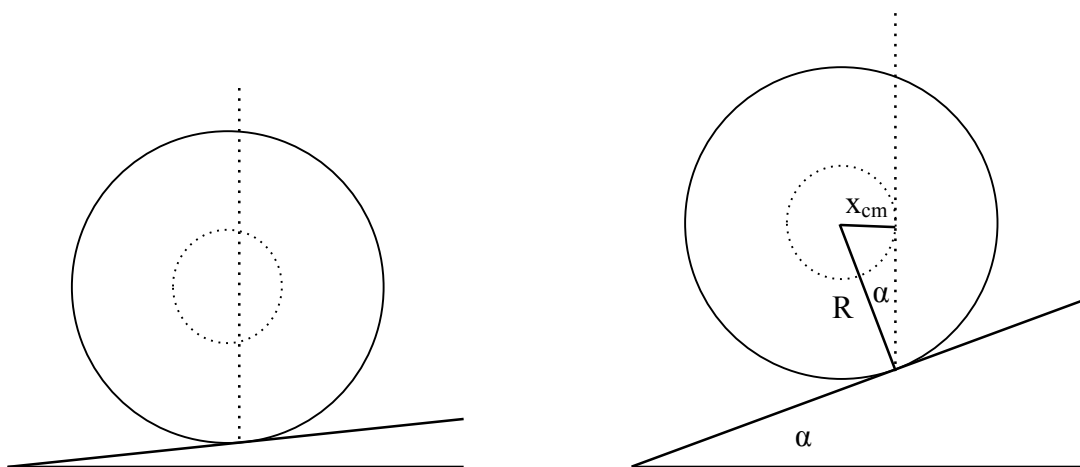
Pronađimo najprije gdje se nalazi centar mase dvije spojene polukugle. Neka su kugle spojene kao na slici. Koordinatu $x=0$ postavimo u centar kugle. Lijeva kugla neka je manje gustoće, a desna veće. Kako je masa direktno proporcionalna s gustoćom, desna kugla će biti η puta masivnija od lijeve (**1 bod**). Koordinata centra mase nalazi se na:

$$x_{cm} = \frac{m_{lijeva}(-\frac{3}{8}R) + m_{desna}(\frac{3}{8}R)}{m_{lijeva} + m_{desna}} = \frac{m(-\frac{3}{8}R) + \eta m(\frac{3}{8}R)}{\eta m + m} = \frac{3}{8} R \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \quad (2 \text{ boda})$$



Zamislamo da se kugla stavi na kosinu. Za dani kut kosine, ako je dovoljno malen, kugla se može postaviti u dva ravnotežna položaja uz uvjet da postoji dovoljno trenja da ne proklizi. To se vidi na slijedeći način: kako se kugla rotira oko vlastite osi, tako centar mase rotira po kružnici polumjera x_{cm} . Kad se koordinata centra mase nalazi iznad dodirne točke kugle i kosine, zakretni moment gravitacijske sile oko dodirne točke jednak je nuli. Zakretni momenti sile trenja i reakcije podloge oko te iste točke su također nula jer im je krak sile nula. Stoga, kugla je stabilna. (**2 boda za zaključak o stabilnosti**).

Povećanjem kuta kosine doći će se do trenutka u kojem kružnica na kojoj se nalazi centar mase točno dodiruje vertikalnu liniju koja će spajati centar mase i točku dodira kugle i kosine. To je maksimalni kut na kojem će kugla moći mirovati na kosini (desna slika) (**2 boda**).



Iz desne slike se vidi (trokut nacrtan punim linijama) da vrijedi $\sin \alpha = |x_{cm}/R|$ (**1 bod**), pa je maksimalni kut pod kojim kugla još može mirovati jednak:

$$\alpha = \text{ArcSin} \left| \frac{x_{cm}}{R} \right| = \text{ArcSin} \left(\frac{3}{8} \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \right) \quad (2 \text{ boda})$$

Ta činjenica stoji samo ako postoji dovoljno trenja da kugla ne proklizi. Tijelo na kosini neće prokliziti ako je sila trenja minimalno jednaka iznosom komponenti sile teže koja povlači tijelo niz kosinu. Kako je sila trenja jednaka $F_{tr} = kN$, a $N = mg \cos \alpha$ (**1 bod**), slijedi:

$$kmg \cos \alpha \geq mg \sin \alpha \rightarrow k_{min} = \tan \alpha \quad (2 \text{ boda})$$

Taj se uvjet može na više načina izraziti pomoću parametra η , a najzgodniji od njih je:

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

$$k_{\min} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{3\eta-1}{8\eta+1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3\eta-1}{8\eta+1}\right)^2}} = \frac{3(\eta-1)}{\sqrt{55+146\eta+55\eta^2}} \quad (2 \text{ boda})$$

Granica $\eta=1$ predstavlja homogenu kuglu. U tom slučaju i kut kosine i koeficijent trenja postaju nula, što znači da homogena kugla može mirovati samo na ravnoj podlozi, bez obzira na koeficijent trenja (**1 bod**). Granica kad η teži u beskonačno predstavlja kuglu kojoj je jedna polovica izrazito teška u odnosu na drugu. U slučaju aerografena i osmija $\eta = 141250$, što je dovoljno veliko da se smatra beskonačnim. U tom slučaju slijedi da je

$$\alpha = \text{ArcSin} \frac{3}{8} = 22^\circ$$

$$k_{\min} = \tan \alpha = 0.4 \quad (2 \text{ boda})$$

3. zadatak (20 bodova)

U zadanom sklopu su svi kapacitori i otpornici spojeni serijski i vrijedi

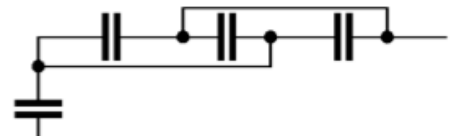
$$R_{uk} = 9R = 18144 \, \Omega \quad (1 \text{ bod})$$

$$C_{uk} = C/4 = 5.04 \, \text{nF} \quad (1 \text{ bod})$$

Impedancija zadanog sklopa pri zadanoj frekvenciji je:

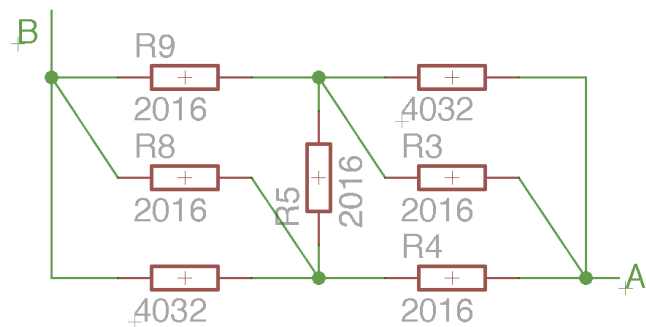
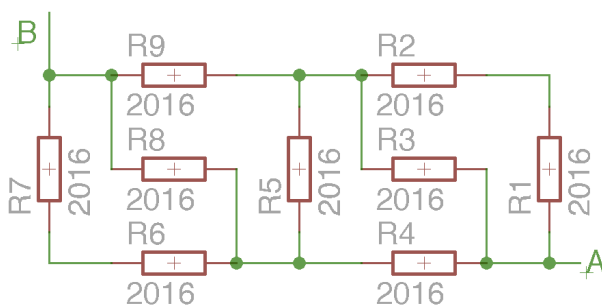
$$Z = \sqrt{R_{uk}^2 + \frac{1}{\omega^2 C_{uk}^2}} = \sqrt{18144^2 + \frac{1}{2016^2 \cdot (5.04 \cdot 10^{-9})^2}} = 100 \, 077 \, \Omega \quad (2 \text{ boda})$$

Promotrimo sad krivo polemljeni sklop. Pogledajmo prvo kapacitore. Gledano zdesna nalijevo, vidimo da su prva tri kapacitora (na horizontalnoj liniji) vezani paralelno između točke skroz udesno i točke prije četvrtog (vertikalnog) kapacitora. Stoga, ukupan kapacitet jednak je kapacitetu tri paralelno spojena kapacitora na koje je spojen jedan serijski (**1 bod**):



$$C'_{uk} = \left(\frac{1}{3C} + \frac{1}{C} \right)^{-1} = 15.12 \, \text{nF} \quad (2 \text{ boda})$$

Sklop otpora između A i B može se srediti.



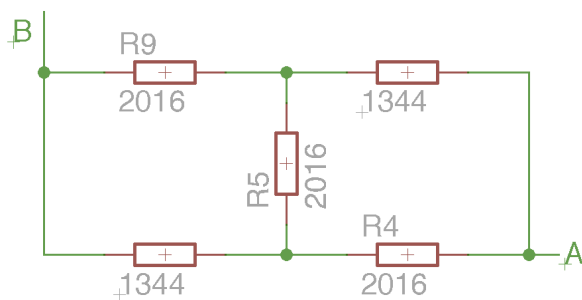
Najprije uočimo serijski spoj R_1 i R_2 te R_6 i R_7 . Zamijenimo te kombinacije ekvivalentnim otporima iznosa $2R = 4032 \, \Omega$ (**1 bod**). Nakon toga, primijetimo da su ti ekvivalentni otpori spojeni paralelno s R_3 , tj. R_8 . Zamijenimo i to ekvivalentnim otporima koji iznose $R_{ekv} = \left(\frac{1}{2016} + \frac{1}{4032} \right)^{-1} = \frac{2R}{3} = 1344 \, \Omega$. (**2**

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

boda) Konačan sklop ne može se dalje sređivati, ali mu možemo naći ekvivalentni otpor tako da ga spojimo na zamišljeni izvor napona i tražimo struju kroz krug.

Napomena: sređivanje kruga do ove mjere nosi 3 boda navedena u tekstu, kako god da se stiglo do rezultata. Struja koja ulazi u A razdvoji se na I_1 i I_2 . Neka kroz otpornik u srednjoj grani teče I_3 i prema gore. Kirchoffova pravila za pojedine grane daju:



$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ I_1 R + I_3 R &= \frac{2R}{3} I_2 \\ (I_1 - I_3) \frac{2R}{3} &= (I_2 + I_3) R + I_3 R \\ \frac{2R}{3} I_2 + R(I_2 + I_3) &= V \\ \frac{2R}{3} (I_1 - I_3) + R I_1 &= V \end{aligned}$$

(3 boda za ovaj ili sličan sustav)

Vrijedi da je $R_{ekv} = V/I$ **(1 bod)**. Rješavanjem sustava slijedi da je $R_{ekv} = 9R/11 = 1649.5 \, \Omega$ **(1 bod)**. Vidi se da ja otpor pao za 90.9 % **(1 bod)**. Impedancija novog sklopa jednaka je:

$$Z = \sqrt{R_{ekv}^2 + \frac{1}{\omega^2 C_{uk}^2}} = \sqrt{1649.5^2 + \frac{1}{2016^2 \cdot (15.12 \cdot 10^{-9})^2}} = 32847.8 \, \Omega \quad \textbf{(2 boda)}$$

Ukupna impedancija pala je za 67.2 % **(1 bod)**. Postotna promjena otpora ne ovisi o iznosu otpora, no promjena impedancija ovisi o iznosima otpora i kapaciteta **(1 bod)**.

4. zadatak (14 bodova)

Nakon vremena t od početka rastezanja kvadrat se deformira u pravokutnik. Kako mu se desna i lijeva stranica međusobno udaljavaju relativnom brzinom v , donja i gornja stranica rastu s vremenom i svaka iznosi $l+vt$ **(1 bod)**. Ukupan opseg pravokutnika je očuvan, pa se desna i lijeva stranica skraćuju u svaka iznosi $l-vt$ **(1 bod)**. Kvadrat se deformira u liniju kad nestanu bočne stranice, tj. kad je $l-vt=0$, što se desi nakon $t_{kraj}=l/v$ **(2 boda)**.

Površina pravokutnika jednaka je umnošku dvije stranice pa iznosi

$$S(t) = (l + vt)(l - vt) = l^2 - v^2 t^2 \quad \textbf{(2 boda)}$$

Za određivanje vremenske ovisnosti elektromotorne sile koristimo se uputom iz zadatka i tražimo tok u trenucima $t + \Delta t$ i t . Petlja i polje stalno su okomiti pa ne moramo brinuti o kutu između njih **(1 bod)**.

$$\begin{aligned} \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) &= B(S(t + \Delta t) - S(t)) \quad \textbf{(1 bod)} \\ &= B(l^2 - v^2(t + \Delta t)^2 - l^2 + v^2 t^2) = B(-2v^2 t \Delta t - v^2 \Delta t^2) \quad \textbf{(2 boda)} \end{aligned}$$

Trenutna elektromotorna sila dobija se dijeljenjem s $-\Delta t$ i puštanjem iste veličine u nulu:

$$V(t) = 2v^2 B t \quad \textbf{(2 boda)}$$

Elektromotorna sila najveća je kad je i vrijeme najveće, a u ovom slučaju u trenutku kad se kvadrat deformira u dužinu. Iznos joj je tad jednak $V(t_{kraj}) = 2v^2 B \frac{l}{v} = 2vlB$ **(2 boda)**.