DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Točan broj je $10 \cdot x + y$, a budući da je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica,

vrijedi $x = 2 \cdot a$ i $y = a$. Dakle, traženi broj je oblika $10 \cdot 2 \cdot a + a = 21 \cdot a$.

U pogrešnom broju $10 \cdot y + x$ slijedi da se radi o broju oblika $10 \cdot a + 2 \cdot a = 12 \cdot a$.

Dalje slijedi da je $288 \cdot (21 \cdot a - 12 \cdot a) = 7\,776$

$$21 \cdot a - 12 \cdot a = 7776 : 288$$

$$9 \cdot a = 27$$

$$a = 3$$

Traženi broj je $21 \cdot a = 21 \cdot 3 = 63$.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

Drugi način:

Točan broj je $\overline{xy} = 10 \cdot x + y$, a budući da je znamenka desetica dva puta veća od znamenke

jedinica, vrijedi $x = 2 \cdot y$. Dakle, traženi broj je oblika $10 \cdot 2 \cdot y + y = 21 \cdot y$.

U pogrešnom broju (broju zamijenjenih znamenaka) je $\overline{yx} = 10 \cdot y + x$ pa slijedi da se radi o broju

oblika $10 \cdot y + 2 \cdot y = 12 \cdot y$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $288 \cdot \overline{yx} + 7776 = 288 \cdot \overline{xy}$ odnosno $288 \cdot 12 \cdot y + 7776 = 288 \cdot 21 \cdot y$.

Rješavanjem te jednadžbe redom dobivamo $3456 \cdot y + 7776 = 6048 \cdot y$ odnosno $2592 \cdot y = 7776$

odakle je $y = 3$ odnosno $x = 6$.

Traženi broj je $21 \cdot y = 21 \cdot 3 = 63$.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

Treći način:

Parovi dvoznamenkastih brojeva kojima je jedna znamenka dva puta veća od druge su: 12 i 21, 24 i 42, 36 i 63 te 48 i 84. Točan broj je onaj u paru kojemu je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica.

Prema uvjetima zadatka vrijedi da je:

$21 \cdot 288 - 12 \cdot 288 = (21 - 12) \cdot 288 = 9 \cdot 288 = 2\,592$,

$42 \cdot 288 - 24 \cdot 288 = (42 - 24) \cdot 288 = 18 \cdot 288 = 5\,184$,

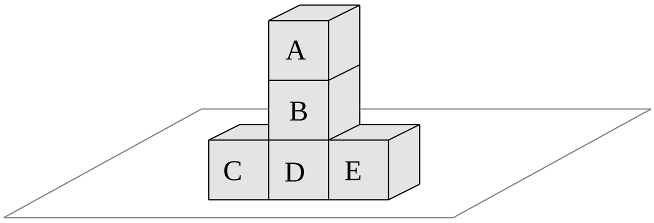
$63 \cdot 288 - 36 \cdot 288 = (63 - 36) \cdot 288 = 27 \cdot 288 = 7\,776$,

$84 \cdot 288 - 48 \cdot 288 = (84 - 48) \cdot 288 = 36 \cdot 288 = 10\,368$.

Budući da je u trećem slučaju razlika umnožaka jednaka 7 776, traženi broj je 63.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

2. Promotrimo sliku:



Kocka A ima 5 slobodnih strana. Zbroj će biti maksimalan kada je strana s brojem 1 nevidljiva (tom stranom je kocka A prislonjena na kocku B) i iznosi $6 + 2 + 5 + 3 + 4 = 20$.

Kocka D ima dvije slobodne strane, a zbroj bilo koje od kombinacije je 7.

Kocke B, C i E imaju po 4 slobodne strane.

Kod kocke B slobodna su dva para nasuprotnih strana pa je maksimalan zbroj $7 + 7 = 14$.

Kod kocaka C i E slobodan je po jedan par nasuprotnih strana i još dvije strane. Maksimalan zbroj će se dobiti ako se vide brojevi 5 i 6, a skrivene su strane na kojima su brojevi 1 i 2 te zbroj tada iznosi $5 + 6 + 7 = 18$.

Maksimalan zbroj je $20 + 7 + 14 + 2 \cdot 18 = 77$.

3. Prvi način:

Promatramo skup prirodnih brojeva manjih od 2016 odnosno skup {1, 2, 3, 4, …, 2015}.

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 1007 brojeva djeljivih brojem 2, 671 broj djeljiv brojem 3 i 335 brojeva djeljivih brojem 6 odnosno djeljivih istovremeno brojevima 2 i 3.

Dakle, među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 1007 + 671 – 335 = 1343 broja djeljiva brojem 2 ili brojem 3 (moramo oduzeti 335 jer smo brojeve djeljive brojevima 2 i 3 brojali dvaput).

Brojeva koji su djeljivi brojevima 2 i 5 ima 201, brojeva djeljivih brojevima 3 i 5 ima 134, dok brojeva djeljivih brojem 6 (dakle, brojevima 2 i 3) i 5 ima 67.

Slijedi da brojeva koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, ali i brojem 5, ima 201 + 134 – 67 = 268 (one koji su djeljivi brojevima 2 i 3 opet smo brojali dvaput pa moramo oduzeti 67).

Konačno, brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, a nisu djeljivi brojem 5 ima 1343 – 268 = 1075.

Drugi način:

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 2014 : 2 = 1007 djeljivih brojem 2. Među prirodnim brojevima manjim od 2016 i koji su djeljivi brojem 2, oni koji su djeljivi brojem 5 ujedno su djeljivi brojem 10, a ima ih 2010 : 10 = 201. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2, ali nisu brojem 5 ima 1007 – 201 = 806.

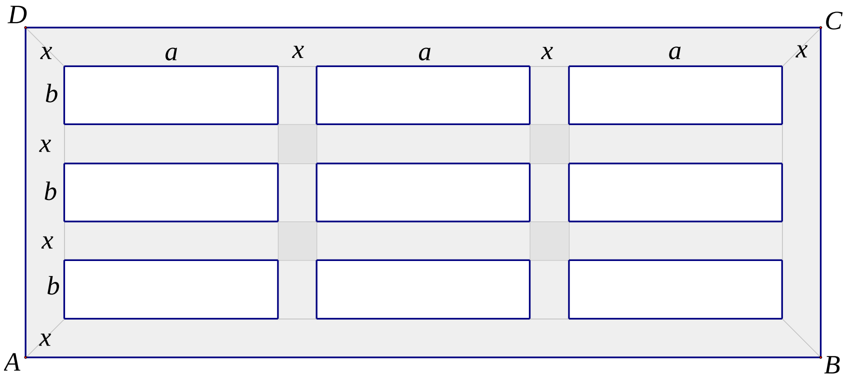
Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 2013 : 3 = 671 djeljiv brojem 3. Među prirodnim brojevima manjim od 2016 koji su djeljivi brojem 3, oni koji su djeljivi brojem 5 su ujedno djeljivi brojem 15, a ima ih 2010 : 15 = 134. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 3, ali nisu brojem 5 ima 671 – 134 = 537.

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 2010 : 6 = 335 djeljivih brojevima 2 i 3 (odnosno brojem 6). Među prirodnim brojevima manjim od 2016 koji su djeljivi brojem 6, oni koji su djeljivi brojem 5 su ujedno djeljivi brojem 30, a ima ih 2010 : 30 = 67. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 6, ali nisu brojem 5 ima 335 – 67 = 268.

Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, a nisu djeljivi brojem 5 ima 806 + 537 – 268 = 1075. Brojeve djeljive brojevima 2 i 3 smo brojali dvaput pa smo morali oduzeti 268.

4. Prvi način:

Promotrimo sliku i prema uvjetu zadatka označimo odgovarajuće razmake:



Neka su a i b duljine susjednih stranica manjeg pravokutnika, $a > b$, a x širina razmaka. Tada su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ jednake $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x$, a površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je $|AB| \cdot |BC|$ pa vrijedi jednakost $(3 \cdot a + 4 \cdot x) \cdot (3 \cdot b + 4 \cdot x) = 697$.

Rastavimo li broj 697 na proste faktore, dobit ćemo da je $697 = 41 \cdot 17$. Iz uvjeta $a > b$ slijedi da je $3 \cdot a > 3 \cdot b$ odnosno $3 \cdot a + 4 \cdot x > 3 \cdot b + 4 \cdot x$. Tada je $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$.

U izrazu $3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$ pribrojnik $4 \cdot x$ uvijek je paran, a zbroj je neparan pa slijedi da je broj b neparan broj manji od 7 $(3 \cdot 7 = 21,\ \ 21 > 17)$.

Za $b = 1$ vrijedi $3 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 14$. No, rješenje ove jednadžbe nije prirodan broj.

Za $b = 3$ vrijedi $9 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 8$ pa je $x = 2$.

Za $b = 5$ vrijedi $15 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 2$. No, rješenje ove jednadžbe nije prirodan broj.

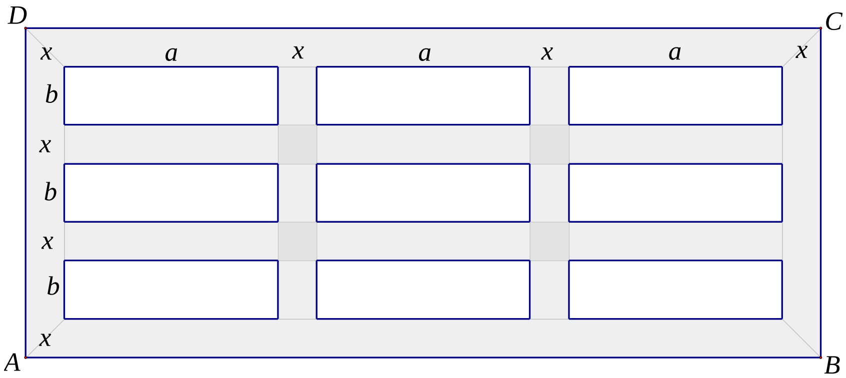
Uvrstimo li $x = 2$ u jednadžbu $3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ redom dobivamo $3 \cdot a + 8 = 41$, $3 \cdot a = 33$, tj. $a = 11$.

Duljine stranica manjeg pravokutnika su 11 cm i 3 cm pa površina jednog manjeg pravokutnika iznosi 33 cm^2. Površina svih devet manjih pravokutnika iznosi 297 cm^2.

Površina osjenčanog dijela razlika je površine pravokutnika $ABCD$ i površine devet manjih pravokutnika: $697 - 297 = 400$ cm^2.

Drugi način:

Promotrimo sliku i prema uvjetu zadatka označimo odgovarajuće razmake:



Neka su a i b duljine susjednih stranica manjeg pravokutnika, $a > b$, a x širina razmaka. Tada su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ jednake $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x$, a površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je $|AB| \cdot |BC|$ pa vrijedi jednakost $(3 \cdot a + 4 \cdot x) \cdot (3 \cdot b + 4 \cdot x) = 697$.

Rastavimo li broj 697 na proste faktore, dobit ćemo da je $697 = 41 \cdot 17$. Iz uvjeta $a > b$ slijedi da je $3 \cdot a > 3 \cdot b$ odnosno $3 \cdot a + 4 \cdot x > 3 \cdot b + 4 \cdot x$. Tada je $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$.

Iz uvjeta da i duljine stranica malih pravokutnika i razmaci budu prirodni brojevi u centimetrima mora vrijediti nejednakost $4 \cdot x < 17$.

Dakle, duljina razmaka x može biti 1 cm, 2 cm, 3 cm ili 4 cm.

Za $x = 1$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 1 = 13$, a u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

Za $x = 2$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 2 = 9$ iz čega slijedi da je $b = 3$ cm.

Za $x = 3$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 3 = 5$, a ni u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

Za $x = 4$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 4 = 1$, a ni u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

To znači da može biti samo $b = 3$ cm.

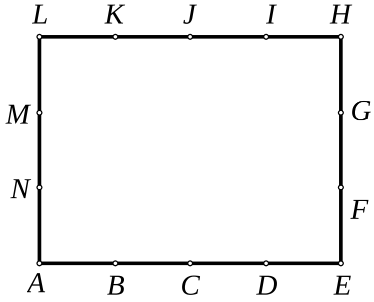
Dalje vrijedi da je $a = (41 - 4x) : 3 = (41 - 4 \cdot 2) : 3 = 11$ cm.

Duljine stranica manjeg pravokutnika su 11 cm i 3 cm pa površina jednog manjeg pravokutnika iznosi 33 cm^2. Površina svih devet manjih pravokutnika iznosi 297 cm^2.

Površina osjenčanog dijela razlika je površine pravokutnika $ABCD$ i površine devet manjih pravokutnika: $697 - 297 = 400$ cm^2.

5. Prvi način:

Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova *A*, *E*, *H* i *L*.



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

Točkom *A* i još nekim drugim točkama pravokutnika određeno je 8 pravaca.

Točkama *B*, *C* i *D* i nekim drugim točkama (osim *A*) određeno je $3 \cdot 9 = 27$ pravaca.

Točkom *E* i još nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C* i *D*) pravokutnika određeno je 7 pravaca.

Točkama *F* i *G* i nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C*, *D* i *E*) određeno je $2 \cdot 6 = 12$ pravaca.

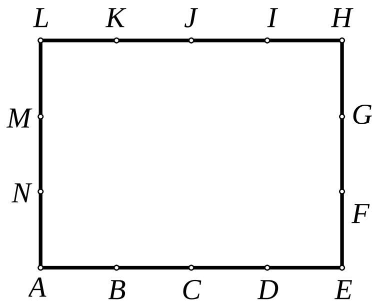
Točkom *H* i nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* i *G*) određena su 3 pravca.

Točkama *K*, *J* i *I* i nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* i *H*) određeno je $3 \cdot 2 = 6$ pravaca.

Te točke određuju 8 + 27 + 7 + 12 + 3 + 6 = 63 pravca.

Drugi način:

Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova *A*, *E*, *H* i *L*.



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

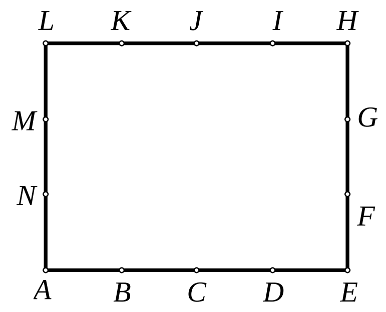
Postoje ukupno 4 pravca kojima pripadaju stranice pravokutnika.

Točke *I*, *J* i *K* sa svakom (od 5) točaka istaknutih na dužini $\overline{AE}$ određuju po 5 različitih pravaca, a točke *F*, *G*, *M*, *N*, *H* i *L* po 4 pravca (različita od stranica). To je 3 · 5 + 6 · 4 = 15 + 24 = 39 različitih pravaca.

Točke *F* i *G* s točkama od *I* do *N* (tih je točaka 6) određuju po 6 različitih pravaca i tih je pravaca ukupno 2 · 6 = 12, a točka *H* s točkama *M* i *N* određuje 2 različita pravca. Točke *I*, *J* i *K* s točkama *M* i *N* određuju ukupno 6 pravaca.

Ukupan broj različitih pravaca određenih istaknutim točkama je 4 + 39 + 12 + 2 + 6 = 63.

Treći način:
Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova *A, E, H* i *L*.



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

Vrhovi pravokutnika određuju ukupno 6 pravaca (4 kojima pripadaju stranice i 2 kojima pripadaju dijagonale).

Vrh *A* i točke na stranicama $\overline{EH}$ i $\overline{HL}$ određuju 5 pravaca (različitih od stranica i dijagonala).

Vrh *E* i točke na stranicama $\overline{HL}$ i $\overline{AL}$ određuju 5 pravaca (različitih od stranica i dijagonala).

Točka *B* i točke na stranicama $\overline{EH}$, $\overline{HL}$ i $\overline{AL}$ određuju 9 pravaca (različitih od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točke *C* i *D* pa je to 27 pravaca.

Točka *F* i točke na stranicama $\overline{HL}$ i $\overline{AL}$ određuju 6 pravaca (različitih od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točku *G* pa je to 12 pravaca.

Točka *H* i točke na stranici $\overline{AL}$ određuju 2 različita pravca (različita od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točke *I, J* i *K* pa je to 8 pravaca.

Ukupan broj različitih pravaca određenih istaknutim točkama je $6 + 5 + 5 + 27 + 12 + 8 = 63$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x broj bombona koje je imala Janica.

Bratu je dala $\frac{x}{2}$ bombona pa joj je ostalo $\frac{x}{2}$ bombona.

Pojela je $\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{12}$ bombona te je poslije toga imala $\frac{x}{2}-\frac{x}{12}=\frac{5x}{12}$ bombona.

Kako je izgubila 2 ili 3 bombona, a Petri dala 6 bombona, postoje dvije mogućnosti:

$\frac{5x}{12}-8=21$ ili $\frac{5x}{12}-9=21$.

Iz $\frac{5x}{12}-8=21$ slijedi $x=\frac{29\cdot 12}{5}\notin\mathbb{N}$.

Iz $\frac{5x}{12}-9=21$ slijedi $x=\frac{30\cdot 12}{5}=72$.

Janica je imala 72 bombona.

Drugi način:

Prije nego što je Petri dala bombone Janica je imala $21 + 6 = 27$ bombona.

Prije toga je izgubila 2 ili 3 bombona, a to znači da je prije toga imala $27 + 2 = 29$ bombona ili $27 + 3 = 30$ bombona.

Nakon što je bratu dala bombone, pojela je $\frac{1}{6}$ ostatka, a ostalo joj je $\frac{5}{6}$ tog ostatka. Dakle, $\frac{5}{6}$ tog ostatka je 29 ili 30.

S obzirom da je samo 30 djeljiv s 5, $\frac{5}{6}$ tog ostatka je 30, a ostatak je 36.

Budući da je bratu dala polovinu bombona, Janica je na početku imala $36\cdot 2 = 72$ bombona.

Treći način:

Označimo broj bombona s x.

Tada iz uvjeta zadatka slijedi $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}x + a + 6 + 21 = x$, pri čemu je a jednako 2 ili 3.

Pomnožimo li gornju jednakost s 12, dobit ćemo $6x + x + 12a + 27\cdot 12 = 12x$ odnosno

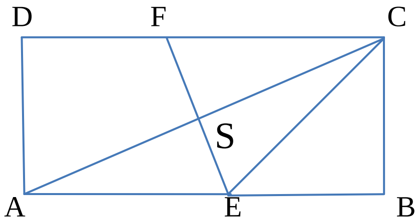
$5x = 324 + 12a$.

Za $a = 2$ je $5x = 348$ što je nemoguće jer x mora biti prirodan broj.

Za $a = 3$ je $5x = 360$ odakle slijedi $x = 72$.

Janica je imala 72 bombona.

2. Prvi način:



Kako je trokut EBC jednakokračan pravokutan, vrijedi $|\angle ECB| = |\angle BEC| = 45°$.

Budući da je $ABCD$ pravokutnik, slijedi $|\angle FCE| = 90° - |\angle ECB| = 45°$.

S obzirom da točka E pripada simetrali EF dijagonale $\overline{AC}$, onda je $|EA| = |EC|$ što znači da je

trokut AEC jednakokračan.

Tada je $|\angle ACE| = |\angle EAC|$.

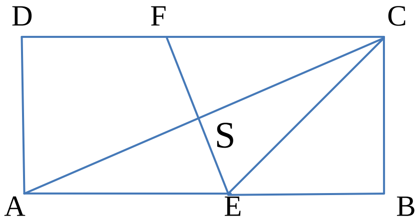
Dalje vrijedi $|\angle EAC| = |\angle FCA|$ jer su to šiljasti kutovi s usporednim kracima.

Dakle, $|\angle ACE| = |\angle FCA| = \frac{|\angle FCE|}{2} = \frac{45°}{2} = 22.5°$.

Kako je $\angle DFE$ vanjski kut trokuta CFS, vrijedi

$|\angle DFE| = |\angle CSF| + |\angle FCA| = 90° + 22.5° = 112.5°$.

Drugi način:



Kako je trokut EBC jednakokračan i pravokutan, vrijedi $|\angle ECB| = |\angle BEC| = 45°$.

Pravac FE je simetrala dijagonale $\overline{AC}$ pa je S polovište dužine $\overline{AC}$ i vrijedi $\overline{FE} \perp \overline{AC}$. Zato je

$\Delta AES \cong \Delta CES$ (prema poučku S-K-S – jedna zajednička kateta, pravi kut i $|AS| = |SC|$).

Slijedi da je $|\angle SEA| = |\angle CES|$. Kako je $|\angle SEA| + |\angle CES| + |\angle BEC| = 180°$, slijedi

$2|\angle CES| = 180° - 45°$ odnosno $|\angle CES| = \dfrac{135°}{2} = 67.5°$.

Konačno, kako je $ABCD$ pravokutnik, to je $AB \parallel CD$, a za kutove s paralelnim kracima vrijedi

$|\angle DFE| = |\angle BEF| = |\angle CEF| + |\angle BEC| = 67.5° + 45° = 112.5° = 112°30'$.

3. Prvi način:

U tim se brojevima svaka od tih znamenaka pojavljuje na svakom dekadskom mjestu

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ puta.

Zato je zbroj znamenaka na svakom dekadskom mjestu jednak

$336 \cdot 9 + 336 \cdot 8 + 336 \cdot 7 + 336 \cdot 6 + 336 \cdot 5 + 336 \cdot 4 + 336 \cdot 3 + 336 \cdot 2 + 336 \cdot 1 =$

$= 336 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 336 \cdot 45 = 15120$.

Onda je zbroj svih tih brojeva

$15120 \cdot 1000 + 15120 \cdot 100 + 15120 \cdot 10 + 15120 \cdot 1 = 15120 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) =$

$= 15120 \cdot 1111 = 16\,798\,320$.

Drugi način:

U tim se brojevima svaka od tih znamenaka pojavljuje na svakom dekadskom mjestu

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ puta.

Zato svaka znamenka $x \in \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ \}$ pridonosi ukupnom zbroju s

$336 \cdot x \cdot 1000 + 336 \cdot x \cdot 100 + 336 \cdot x \cdot 10 + 336 \cdot x \cdot 1 =$

$= 336 \cdot x \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 336 \cdot x \cdot 1111.$

Onda je zbroj svih tih brojeva

$336 \cdot 1111 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 336 \cdot 1111 \cdot 45 = 16\ 798\ 320.$

4. Kako je $6 = 2 \cdot 3$, traženi brojevi trebaju biti djeljivi i s 2 i s 3.

Budući da je traženim brojevima zbroj znamenaka djeljiv sa 6, onda je zbroj znamenaka djeljiv i s 3, a to znači da su djeljivi s 3.

Da bi bili djeljivi s 2 znamenka jedinica treba biti 0, 2, 4, 6 ili 8.

Zbroj znamenaka troznamenkastog broja može biti najviše 27.

S obzirom da je zbroj znamenaka traženih brojeva djeljiv sa 6, zbroj znamenaka traženih brojeva može biti 6, 12, 18 ili 24.

Ako je zbroj 6, znamenke mogu biti iz skupova {0, 1, 5}, {0, 2, 4}, {1, 2, 3}.

Traženi brojevi su: 150, 510, 204, 240, 402, 420, 312, 132.

Ako je zbroj 12, znamenke mogu biti iz skupova {0, 3, 9}, { 1, 2, 9}, {0, 4, 8}, { 1, 3, 8}, { 0, 5, 7}, {1, 4, 7}, { 2, 3, 7}, { 1, 5, 6 }, { 2, 4, 6}, {3, 4, 5}.

Traženi brojevi su: 390, 930, 192, 912, 408, 480, 804, 840, 138, 318, 570, 750, 174, 714, 372, 732, 156, 516, 246, 264, 426, 462, 624, 642, 354, 534.

Ako je zbroj 18, znamenke mogu biti iz skupova {1, 8, 9}, {2, 7, 9}, {3, 6, 9}, {4, 5, 9}, {3, 7, 8}, {4, 6, 8}, {5, 6, 7}.

Traženi brojevi su: 198, 918, 792, 972, 396, 936, 594, 954, 378, 738, 468, 486, 648, 684, 846, 864, 576, 756.

Ako je zbroj 24, znamenke mogu biti iz skupa {7, 8, 9}.

Traženi brojevi su: 798, 978.

Ukupan broj traženih brojeva je 54.

5. Prvi način:

U 1. mogućem slučaju natjecatelji žive u 18 ili više različitih naselja.

Tada iz nekih 18 različitih naselja u kojima žive odaberemo po 1 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U 2. mogućem slučaju natjecatelji žive u 17 različitih naselja.

U tom slučaju nije moguće odabrati 18 učenika koji žive u 18 različitih naselja.

Kada bi u svakom od tih naselja bilo najviše po 17 učenika, tada bi u tih 17 naselja bilo najviše $17 \cdot 17 = 289$ učenika. Kako je ukupan broj učenika 290, u nekom od tih 17 naselja živi barem 18 učenika. Iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U 3. mogućem slučaju natjecatelji žive u 16 ili manje različitih naselja.

U tom slučaju (analogno kao u 2. slučaju) u nekom od tih naselja živi barem 18 učenika pa iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i imamo traženi odabir.

Drugi način:

Pretpostavimo da se ne može odabrati 18 učenika koji žive u istom naselju niti 18 učenika koji dolaze iz 18 različitih naselja.

To znači da svi učenici dolaze iz najviše 17 naselja i iz svakog naselja dolazi najviše 17 učenika.

U tom slučaju bi najveći mogući broj učenika bio $17 \cdot 17 = 289$, a na natjecanju je 290 učenika (jedan više).

Dakle, pretpostavka je bila netočna pa iz jednog naselja dolazi (barem) 18 učenika ili se može odabrati 18 učenika iz 18 različitih naselja, a što je i trebalo dokazati.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je c cijena ulaznice prije, a C nakon poskupljenja i neka je z zarada prije, a Z nakon poskupljenja te neka je n broj gledatelja prije, a N poslije poskupljenja.

Cijena ulaznica povećala se 40% pa je $C = 1.4\,c$, a zarada se povećala 26% pa je $Z = 1.26\,z$.

Broj gledatelja je manji i iznosi p% broja gledatelja prije poskupljenja cijene ulaznica pa vrijedi da je $N = p\% \cdot n = \frac{p}{100} \cdot n$.

Zarada prije poskupljenja je $z = n \cdot c$, a zarada poslije poskupljenja je $Z = N \cdot C$.

Dalje vrijedi $Z = N \cdot C = \frac{p}{100} \cdot n \cdot 1.4 \cdot c = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot (n \cdot c) = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot z$.

Dalje je $1.26 \cdot z = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot z$ odnosno $1.26 = 1.4 \cdot \frac{p}{100}$ te konačno $\frac{p}{100} = \frac{1.26}{1.4} = \frac{126}{140} = \frac{90}{100}$.

Prema tome je $N = 90\ \%\ n$. Dakle, broj gledatelja smanjio se za 10 %.

Drugi način.

Neka je c cijena ulaznice prije, a C nakon poskupljenja i neka je z zarada prije, a Z nakon poskupljenja te neka je n broj gledatelja prije, a N poslije poskupljenja.

Tada vrijedi $z = n \cdot c$ i $Z = N \cdot C$.

Cijena ulaznica povećala se 40% pa je $C = 1.4\,c$, a zarada se povećala 26% pa je $Z = 1.26\,z$.

Dalje vrijedi $Z = N \cdot C = N \cdot 1.4c$ i $Z = 1.26z = 1.26\,n \cdot c$ odnosno $N \cdot 1.4c = 1.26\,n \cdot c$.

Zaključujemo da je

$$\frac{N}{n} = \frac{1.26c}{1.4c} = \frac{1.26}{1.4} = 0.9 \text{ ili } N = 0.9n.$$

Prema tome je $N = 90\ \%\ n$. Dakle, broj gledatelja smanjio se za 10 %.

2. Prvi način.

Jednakosti $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}$ mogu se zapisati kao tri jednadžbe.

1. $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4} \Rightarrow 4a+4b=3b+3c \Rightarrow b=3c-4a$
2. $\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5} \Rightarrow 5b+5c=4c+4a \Rightarrow c=4a-5b$
3. $\frac{a+b}{3}=\frac{c+a}{5} \Rightarrow 5a+5b=3c+3a \Rightarrow 2a=3c-5b$

Koristeći drugu i treću jednadžbu dobiva se:

$c=4a-5b=2\cdot 2a-5b=2\cdot(3c-5b)-5b=6c-10b-5b=6c-15b \Rightarrow 5c=15b \Rightarrow \underline{c=3b}$.

Dalje, iz treće jednadžbe dobiva se: $2a=3c-5b=3\cdot 3b-5b=9b-5b=4b \Rightarrow \underline{a=2b}$.

Nakon uvrštavanja dobivamo redom:

$\overline{abc}=100\cdot a+10\cdot b+c=100\cdot 2b+10\cdot b+3b=200b+10b+3b=213b$.

Budući da su *a*, *b* i *c* znamenke, postoje tri troznamenkasta broja za $b\in\{1,2,3\}$, a traženi brojevi su

213, 426, 639.

Drugi način.

Raspisujući zadani uvjet redom dobivamo:

$$\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}=k, k>0$$
$$\frac{a+b}{3}=k \Rightarrow a+b=3\cdot k \Rightarrow \underline{a=3k-b}$$
$$\frac{c+a}{5}=k \Rightarrow c+a=5\cdot k \Rightarrow c=5k-a=5k-(3k-b)=5k-3k+b \Rightarrow \underline{c=2k+b}$$
$$\frac{b+c}{4}=k \Rightarrow b+c=4\cdot k \Rightarrow b=4k-c=4k-(2k+b)=4k-2k-b=2k-b$$
$$\underline{b=2k-b} \Rightarrow 2b=2k \Rightarrow k=b$$

Prema tome, za znamenke *a*, *b* i *c* vrijedi $a=2k,\ b=k,\ c=3k,\ k\in N$. Uvrštavanjem prirodnih brojeva umjesto *k*, redom dobivamo:

k	1	2	3	4
$a=2k$	2	4	6	8
$b=k$	1	2	3	4
$c=3k$	3	6	9	12
$\overline{abc}$	213	426	639	-

Budući da su a, b i c znamenke postoje tri troznamenkasta broja za $b \in \{1, 2, 3\}$, a traženi brojevi su 213, 426, 639.

3. Prilikom rješavanja koristi se svojstvo množenja cijelih brojeva: *Umnožak cijelih brojeva je cijeli broj*.

Dakle, pomnoži li se razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ brojem 5, dobiveni će umnožak ponovno biti cijeli broj, tj.

zadani razlomak pišemo u obliku $\frac{4x-17}{5x+9} \cdot 5 = \frac{20x-85}{5x+9}$. Brojnik novog razlomka rastavljamo tako da dobijemo dio koji je višekratnik nazivnika:

$$\frac{20x-85}{5x+9} = \frac{20x+36-121}{5x+9} = \frac{20x+36}{5x+9} - \frac{121}{5x+9} = \frac{4\cdot(5x+9)}{5x+9} - \frac{121}{5x+9} = 4 - \frac{121}{5x+9}.$$

Razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ će biti cijeli broj ako je $\frac{121}{5x+9}$ cijeli broj.

Razlomak $\frac{121}{5x+9}$ će biti cijeli broj ako je nazivnik $5x + 9$ djelitelj broja 121.

Djelitelji broja 121 su $1, -1, 11, -11, 121, -121$.

Za pozitivne djelitelje (1, 11 i 121) se ne dobivaju cjelobrojna rješenja.

Za negativne djelitelje (–1, –11 i –121) redom dobivamo:

a) $5x+9=-1 \to 5x=-10 \to x=-2$,

b) $5x+9=-11 \to 5x=-20 \to x=-4$,

c) $5x+9=-121 \to 5x=-130 \to x=-26$.

Uvrštavanjem vrijednosti x u razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ slijedi:

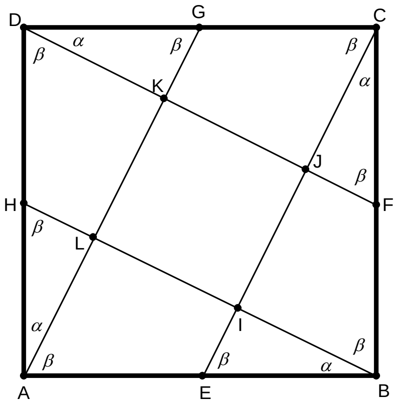
a) za $x=-2$ je $\frac{4x-17}{5x+9} = \frac{-8-17}{-10+9} = \frac{-25}{-1} = 25$, što je cijeli broj;

b) za $x=-4$ je $\frac{4x-17}{5x+9} = \frac{-16-17}{-20+9} = \frac{-33}{-11} = 3$, što je cijeli broj;

c) za $x=-26$ je $\frac{4x-17}{5x+9} = \frac{-104-17}{-130+9} = \frac{-121}{-121} = 1$, što je također cijeli broj.

Dakle, rješenja su cijeli brojevi –2, –4 i –26.

4. Uz oznake kao na slici vrijedi:



Pravokutni trokuti *EBC*, *FCD*, *GDA* i *HAB* međusobno su sukladni prema poučku o sukladnosti trokuta S-K-S jer je $|EB| = |FC| = |GD| = |HA| = 5\text{ cm}$ i $|BC| = |CD| = |DA| = |AB| = 10\text{ cm}$.

Posljedica navedene sukladnosti je jednakost veličina odgovarajućih kutova tih trokuta:

$|\angle HBA| = |\angle ECB| = |\angle FDC| = |\angle GAD| = \alpha$,

$|\angle BEC| = |\angle CFD| = |\angle DGA| = |\angle AHB| = \beta$.

Budući da je $\alpha + \beta = 90°$, slijedi da su kutovi s vrhovima u točkama *I*, *J*, *K* i *L* pravi, tj. da je četverokut *IJKL* pravokutnik te da je $|\angle CBI| = |\angle DCJ| = |\angle ADK| = |\angle BAL| = \beta$.

Pravokutni trokuti *ABL*, *BCI*, *CDJ* i *DAK* sukladni su prema poučku o sukladnosti trokuta K-S-K.

Zaključujemo da je $\overline{EC}$ usporedna s $\overline{AG}$ kao i $\overline{BH}$ s $\overline{FD}$.

Dužina $\overline{JF}$ srednjica je trokuta *BCI* pa je $|IJ| = |CJ| = \frac{1}{2}|IC|$ i $|JF| = \frac{1}{2}|IB| = x$. Analogno vrijedi za duljine stranica preostalih trokuta (*ABL*, *CDJ* i *DAK*), a time i za duljine stranica četverokuta *IJKL*.

Dakle, $|JF| = |KG| = |LH| = |IE| = x$ i $|CJ| = |IJ| = |DK| = |KJ| = |AL| = |LK| = |BI| = |IL| = 2x$.

Dakle, četverokut *IJKL* je kvadrat sa stranicom duljine 2*x*.

Preostaje izračunati površinu kvadrata *IJKL*. To možemo napraviti na više načina.

Prvi način:

Prema gore dokazanom zaključujemo da vrijedi $|EC| = |EI| + |IJ| + |JC| = 5x$ i $|IC| = |IJ| + |JC| = 4x$.

Prema poučku K-K trokut *EBC* sličan je trokutu *BIC* pa vrijedi $|EC| : |BC| = |BC| : |IC|$.

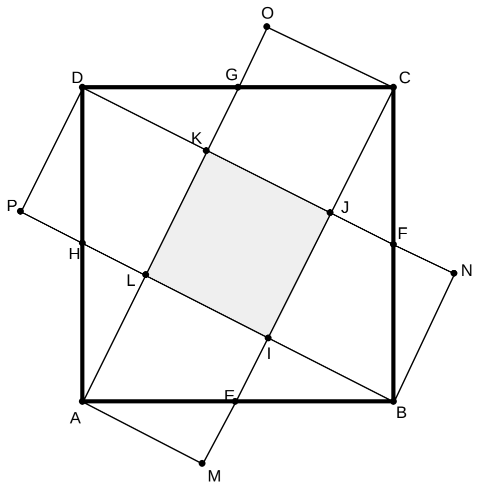
Uvrštavanjem poznatih podataka u taj razmjer dobivamo redom:

$$5x:10=10:4x$$
$$20\cdot x\cdot x=100$$
$$x\cdot x=5$$

Konačno, površina kvadrata *IJKL* jednaka je $P(IJKL)=|IJ|\cdot|JK|=2x\cdot 2x=4\cdot x\cdot x=4\cdot 5=20\text{ cm}^2$.

Drugi način:

Nadopunimo sliku s četiri pravokutna trokuta.

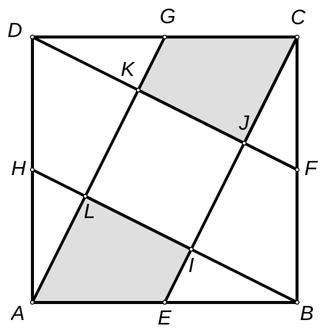


Trapeze *IBFJ*, *JCGK*, *KDHL* i *LAEI* moguće je nadopuniti do kvadrata pravokutnim trokutima *BNF*, *COG*, *DPH* i *AME* koji su sukladni trokutima *CJF*, *DKG*, *ALH* i *BIE*. Jednostavno je uočiti da je površina kvadrata *ABCD* jednaka površini pet manjih kvadrata (*AMIL*, *BNJI*, *COKJ*, *DPLK* i *IJKL* od kojih je jedan osjenčan), a koji su međusobno sukladni.

Dakle, površina osjenčanog kvadrata jednaka je $100:5=20\text{ cm}^2$.

Treći način:

Kvadrat *ABCD* možemo podijeliti na dva sukladna pravokutna trokuta *AGD* i *CEB*. Svaki od njih ima površinu 25 cm^2. To znači da je površina paralelograma *AECG* jednaka 50 cm^2.

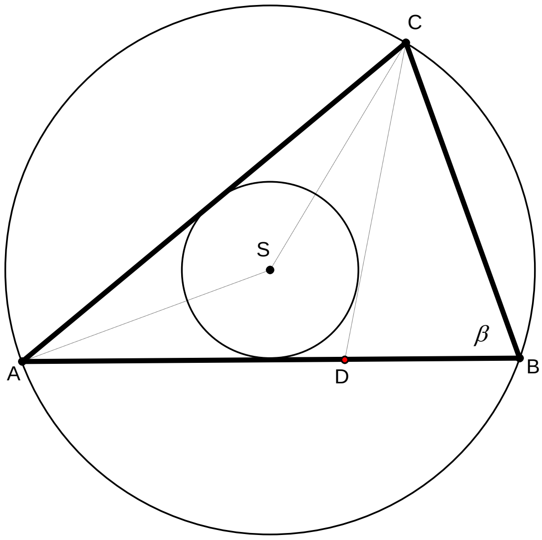


Paralelogram *AECG* sastavljen je od kvadrata *IJKL* (čiju površinu tražimo) i dvaju pravokutnih trapeza *AEIL* i *JCGK*. Duljine osnovica tih trapeza su $2x$ i x, a duljina visine im je jednaka $2x$. To znači da svaki od njih ima površinu $\frac{(2x+x)\cdot 2x}{2}=3x\cdot x=3x^2$, a površina kvadrata jednaka je $2x \cdot 2x = 4x \cdot x = 4x^2$.

Prema tome, vrijedi $3x^2 + 3x^2 + 4x^2 = 50$, tj. $10x^2 = 50$, odakle je $4x^2 = 20$.

Površina kvadrata *IJKL* je 20 cm^2.

5.



Neka je *S* središte upisane kružnice trokuta *ADC* i središte opisane kružnice trokuta *ABC* i neka je $|\angle ABC|=\beta$. Kutovi $\angle ASC$ i $\angle ABC$ su središnji i pripadni obodni kut nad tetivom $\overline{AC}$. Na temelju poučka o središnjem i obodnom kutu vrijedi da je $|\angle ASC|=2\beta$.

Iz trokuta *ASC*, koji je jednakokračan jer je $|SA|=|SC|$, može se zaključiti da je

$|\angle SAC|=|\angle SCA|=\frac{180°-2\beta}{2}=90°-\beta$.

Pravac *AS* je simetrala unutarnjeg kuta trokuta *ADC* (*ABC*) pri vrhu *A* pa je

$\alpha=|\angle CAB|=2\cdot(90°-\beta)=180°-2\beta$.

Na isti način vrijedi $|\angle ACD|=2\cdot(90°-\beta)=180°-2\beta$.

Dalje možemo nastaviti na više načina.

Prvi način:

Pravac *CD* je simetrala kuta trokuta pri vrhu *C* pa je $\gamma = |\angle ACB| = 2 \cdot (180° - 2\beta) = 360° - 4\beta$.

Iz zbroja kutova trokuta *ABC* redom slijedi

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\beta + (180° - 2\beta) + (360° - 4\beta) = 180° \rightarrow 5\beta = 360° \rightarrow \beta = 72°$$

$$\alpha = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$$

$$\gamma = 180° - (72° + 36°) = 72°$$

Trokut *ABC* je jednakokračan s kutovima veličina 72º, 72º i 36º.

Drugi način:

Budući da je $|\angle CAB| = |\angle ACD| = 180° - 2\beta$, trokut *ADC* je jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$.

Kut $\angle BDC$ je vanjski kut trokuta *ADC* i vrijedi da je

$|\angle BDC| = |\angle DAC| + |\angle ACD| = 2(180° - 2\beta) = 360° - 4\beta$.

Za kutove trokuta *DBC* vrijedi:

$$|\angle BDC| + |\angle CBD| + |\angle DCB| = 180°$$
$$(360° - 4\beta) + \beta + (180° - 2\beta) = 180°$$
$$5\beta = 360°$$
$$\beta = 72°$$

Dalje slijedi da je $\gamma = 72°$ i $\alpha = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

Treći način:

Zbog činjenice da je u trokutu *ABC* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ i da je $\alpha = |\angle CAB| = 180° - 2\beta$, vrijedi

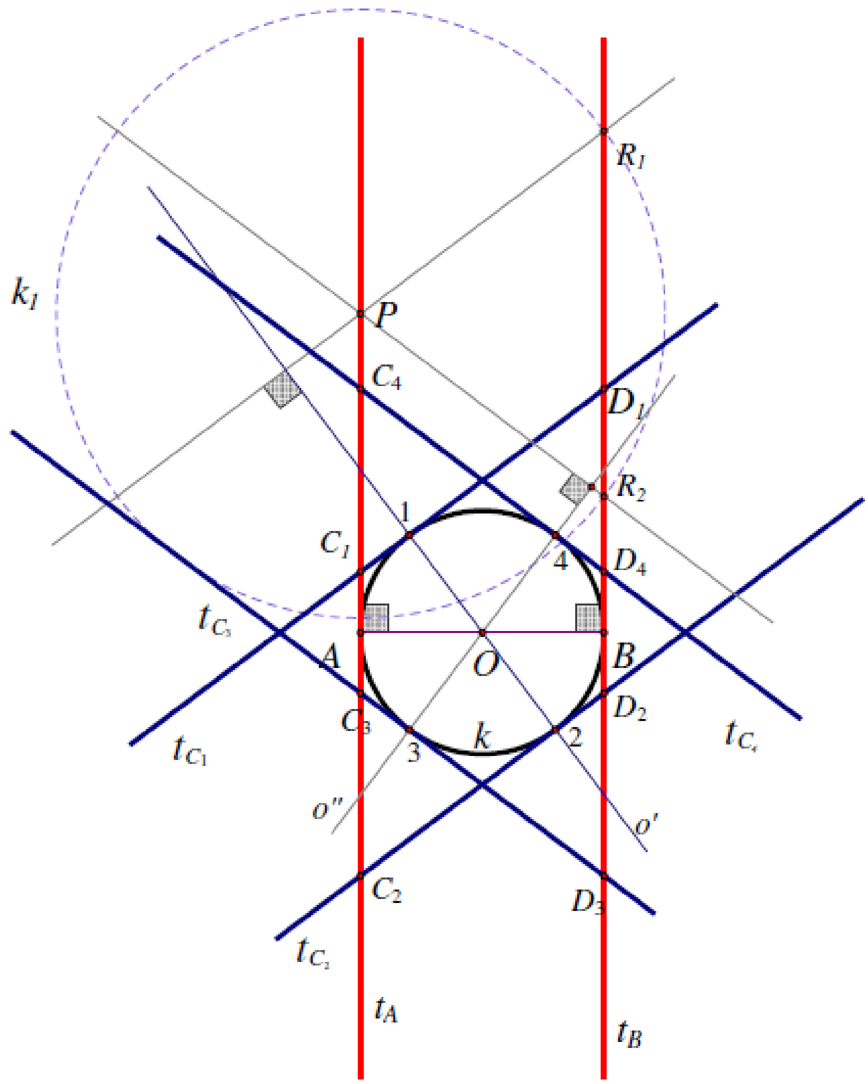
$180° - 2\beta + \beta + \gamma = 180°$ odnosno $-\beta + \gamma = 0$ što znači da je $\beta = \gamma$ i da je trokut *ABC*

jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$.

Budući da je pravac *CD* simetrala kuta $\angle BCA$, zaključujemo da je $\gamma = 2\alpha$, a onda je i $\beta = 2\alpha$.

Konačno, uvrštavanjem dobivenih relacija u izraz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ redom dobivamo:

$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, $5\alpha = 180°$, $\alpha = 36°$ i $\beta = \gamma = 2 \cdot 36° = 72°$.



k_1
R_1
P
C_4
D_1
R_2
1
C_1
4
D_4
t_{C_3}
A
O
B
C_3
D_2
t_{C_4}
3
k
2
t_{C_1}
o''
o'
C_2
D_3
t_{C_2}
t_A
t_B