Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

17. siječnja 2013.

1. (6) Pokažite da je za $n \in \mathbb{N}$ rezultat skraćivanja razlomka $\frac{2^{2n+1}-2^{4n+3}+2^{6n+3}}{2^{2n}-2^{4n+1}}$ cijeli broj.

2. (6) Dokažite da je izraz $n^5 - 5n^3 + 4n$ djeljiv sa 120 za sve prirodne brojeve n.

3. (6) Nad stranicama AC i BC jednakostraničnog trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $ACDE$ i $BCFG$. Ako je $|AB| = 4$ cm, koliko iznosi opseg dobivenog šesterokuta $ABGFDE$?

4. (6) Trgovac je odlučio nabaviti suhe šljive za daljnju prodaju. Za polovinu svog trenutno raspoloživog novca kupio je šljive kod proizvođača čija je cijena 30 kn za kilogram. S drugom je polovinom novca otišao do drugog proizvođača i uspio kupiti za polovinu količine šljiva više nego kod prvog. Šljive je izmiješao. Po kojoj cijeni za kilogram treba trgovac sada prodavati šljive kako bi zaradio 5 kn po prodanom kilogramu šljiva?

5. (6) Ako zbroju znamenaka nekog dvoznamenkastog broja dodamo kvadrat tog zbroja, dobit ćemo ponovno taj dvoznamenkasti broj. Odredite sve takve dvoznamenkaste brojeve.

6. (10) Marko pokušava pogoditi tri broja koja su zamislile i zapisale Andrea, Barbara i Dora. Ne žele mu otkriti koliko ti brojevi imaju znamenaka, već samo da su sva tri broja zapisana različitim znamenkama u rastućem poretku. Svaka je znamenka, osim nule, negdje korištena. Nakon nekoliko postavljenih pitanja Marko je doznao da Andrein i Barbarin broj imaju zajedničke jedino znamenke 3 i 8, Andrein i Dorin jedino znamenke 8 i 9, a Barbarin i Dorin jedino znamenku 8. Svaku od znamenaka $1, 2, 3, 4, 8$ i 9 koristila je Andrea ili Barbara (barem jedna od njih dvije). Isto tako svaku od znamenaka $1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9$ koristila je Andrea ili Dora, a svaku od znamenaka $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ koristila je Barbara ili Dora. Marko je saznao dovoljno i sada može pogoditi brojeve. Koji je broj zamislila koja od djevojaka?

7. (10) Neka je $ABCD$ četverokut kojemu su svi kutovi manji od $180°$. Stranice AD, CD i dijagonala BD, su jednakih duljina, mjera kuta $\measuredangle ADB$ jednaka je mjeri kuta $\measuredangle DCA$ i mjera kuta $\measuredangle CBD$ jednaka je mjeri kuta $\measuredangle BAC$. Odredite mjere kutova četverokuta $ABCD$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

17. siječnja 2013.

1. (6) Zadan je kompleksni broj $z = \dfrac{(x+i\sqrt{3})^4}{1-i}$. Odredite sve realne brojeve x za koje je $|z| = 8\sqrt{2}$.

2. (6) Jedno rješenje jednadžbe $ax^2 + bx + 5 = 0$ je pet puta veće od drugog. Koeficijenti a i b su prirodni brojevi manji od 20. Odredite sve takve jednadžbe.

3. (6) U nekom je gradu 10 restorana i n kazališta. Jedna je grupa turista provela nekoliko dana u tom gradu. Tijekom svog boravka posjećivali su restorane i kazališta. Na kraju svog boravka ustanovili su da su svaki restoran posjetila 4 turista, a u svakom je kazalištu bilo po 6 turista. Ako je svaki turist posjetio točno 5 restorana i 3 kazališta, odredite koliko ima kazališta u gradu.

4. (6) U deltoid kojemu su duljine dijagonala $d_1 = 24$ cm i $d_2 = 8$ cm upisan je pravokutnik tako da su njegove stranice paralelne s dijagonalama deltoida. Odredite dimenzije tako upisanog pravokutnika koji ima najveću površinu.

5. (6) Razlika duljina osnovica jednakokračnog trapeza iznosi 10 cm. Duljina njegovog kraka je aritmetička sredina duljina osnovica. Izračunajte duljine stranca trapeza ako omjer duljina visine na osnovicu i veće osnovice iznosi 2 : 3.

6. (10) Za svaki od tri realna broja vrijedi da zbroj jednog od njih i umnoška preostalih dvaju iznosi 2. Odredite sve trojke takvih brojeva.

7. (10) Zadan je kompleksan broj $w = -3 - i$. Odredite sve kompleksne brojeve oblika $z = n^2 + ni$, gdje je $n \in \mathbb{Z}$ i vrijedi

$$Re\left(\frac{z}{w}\right) < -0.4, \quad Im(z \cdot \overline{w}) < 4.$$

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

17. siječnja 2013.

1. (6) Riješite jednadžbu
$$\log_x 8 + \log_{4x} 4 + \log_{2x} 2 = 0.$$

2. (6) Matko ima 8 kuglica i vagu. Sve su kuglice potpuno iste veličine i boje, ali jedna kuglica ima veću masu od ostalih 7. Može li Matko pomoću točno dva mjerenja, vagom koja nema utege, odrediti koja je to kuglica? Obrazložite.

3. (6) Odredite realne brojeve a, b i c za koje je funkcija $f(x) = ax^2 + bx - c\sin x\cos x$ neparna.

4. (6) Ako je $\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{2}$ i $\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{1}{4}$, koliko iznosi $\cos(\alpha - \beta)$?

5. (6) Zadana je funkcija $f(x) = 2\cos 2x + 4\cos x + 3$. Odredite skup svih vrijednosti koje funkcija f može poprimiti.

6. (10) Na intervalu $\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\rangle$ riješite sustav jednadžbi
$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y \end{cases}.$$

7. (10) Duljina stranice jednakostraničnog trokuta iznosi 6 cm. Njegovim je težištem povučena paralela s jednom od stranica. Izračunajte obujam uspravne prizme čija je baza nastali trapez, a duljina visine prizme jednaka je duljini visine trapeza. Odredite kosinus kuta kojeg prostorna dijagonala prizme zatvara s ravninom baze.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

17. siječnja 2013.

1. (6) Odredite onaj član u razvoju binoma

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2x}{\sqrt{y}}} - \sqrt{\frac{y}{2\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}, \quad x, y > 0$$

koji sadrži x i y s istim eksponentom.

2. (6) U jednoj je skupini, od ukupno 112 učenika svaka četvrta osoba djevojka. U drugoj je skupini ukupno 53 učenika, a omjer broja mladića i djevojaka iznosi $2:1$. U obje je skupine jednak broj djevojaka. Kako je to moguće i koliko je u tom slučaju djevojaka u svakoj skupini?

3. (6) Odredite sve brojeve $z \in \mathbb{C}$ koji su rješena jednadžbe $z^3 + i^{2013} = 0$. Izračunajte površinu lika čiji su vrhovi u Gaussovoj ravnini određeni rješenjima te jednadžbe.

4. (6) Odredite vrijednost sinusa broja, kojemu je kosinus jednak njegovom tangensu.

5. (6) Nad tetivom $\overline{AB}$ kružnice $k(S, r)$ konstruirana su s iste strane tetive dva jednakokračna trokuta kojima je zajednička osnovica tetiva $\overline{AB}$. Jednom je treći vrh središte S, a drugom točka C na kružnici. Ako je omjer njihovih površina $3 : (2\sqrt{3} + 3)$, izračunajte mjeru kuta između krakova trokuta ΔABS.

6. (10) Izračunajte površinu četverokuta omeđenog zajedničkim tangentama krivulja $x^2 + 2y^2 = 2$ i $4x^2 - 9y^2 = 36$.

7. (10) Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}.$$