ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

17. siječnja 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Pokažite da je za $n \in \mathbb{N}$ rezultat skraćivanja razlomka

$$\frac{2^{2n+1} - 2^{4n+3} + 2^{6n+3}}{2^{2n} - 2^{4n+1}}$$

cijeli broj.

Rješenje.

Izlučimo u brojniku i nazivniku zajednički faktor i skratimo razlomak.

$$\frac{2^{2n+1} - 2^{4n+3} + 2^{6n+3}}{2^{2n} - 2^{4n+1}} =$$

$$\frac{2^{2n+1}(1 - 2^{2n+2} + 2^{4n+2})}{2^{2n}(1 - 2^{2n+1})} = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\frac{2(1 - 2^{2n+1})^2}{(1 - 2^{2n+1})} = \qquad \text{(2 boda)}$$

(1bod za skraćivanje 2^{2n+1} i 2^{2n}, a drugi bod za prepoznavanje kvadrata binoma)

$$2(1 - 2^{2n+1}) = 2 - 2^{2n+2} \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je n prirodan broj, dobiveni je izraz cijeli broj. (1 bod)

Zadatak B-1.2. Dokažite da je izraz $n^5 - 5n^3 + 4n$ djeljiv sa 120 za sve prirodne brojeve n.

Rješenje.

$$n^5 - 5n^3 + 4n =$$

$$n(n^4 - 5n^2 + 4) = \qquad \text{(1 bod)}$$

$$n(n^4 - 4n^2 + 4 - n^2) =$$

$$n[n^2(n^2 - 1) - 4(n^2 - 1)] = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$n(n^2 - 1)(n^2 - 4) =$$

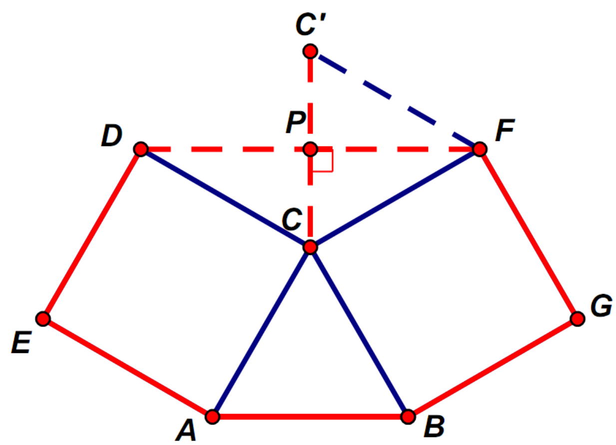
$$n(n + 1)(n - 1)(n + 2)(n - 2) = \qquad \text{(1 bod)}$$

$$(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$$

Dobiveni je izraz umnožak pet uzastopnih cijelih brojeva. Među njima je jedan koji je djeljiv s 2, jedan koji je djeljiv s 3, jedan s 4, te jedan koji je djeljiv s 5. Stoga je njihov umnožak djeljiv sa $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. (2 boda)

Zadatak B-1.3. Nad stranicama AC i BC jednakostraničnog trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $ACDE$ i $BCFG$. Ako je $|AB| = 4$ cm, koliko iznosi opseg dobivenog šesterokuta $ABGFDE$?

Rješenje.



Stranice šesterokuta (i kvadrata) BG, GF, DE, EA imaju istu duljinu kao i stranica AB, trokuta ABC. Stoga opseg šesterokuta $ABGFDE$ računamo kao

$$o = 5 \cdot |AB| + |DF|$$

(1 bod)

Duljinu stranice DF računamo iz jednakokračnog trokuta CFD.
Kut $\measuredangle DCF = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$, a (1 bod)
$\measuredangle PCF = 60°$ pa je trokut CFC' je jednakostraničan, duljine stranice 4 cm. (1 bod)

Tada je duljina $|PF|$ jednaka duljini visine trokuta CFC', a $|DF| = 2|PF|$.
$|DF| = 2 \cdot \sqrt{4^2 - 2^2} = 4\sqrt{3}$. (2 boda)

Tada je traženi opseg $o = 5 \cdot 4 + 4\sqrt{3} = (20 + 4\sqrt{3})$ cm. (1 bod)

Zadatak B-1.4. Trgovac je odlučio nabaviti suhe šljive za daljnju prodaju. Za polovinu svog trenutno raspoloživog novca kupio je šljive kod proizvođača čija je cijena 30 kn za kilogram. S drugom je polovinom novca otišao do drugog proizvođača i uspio kupiti za polovinu količine šljiva više nego kod prvog. Šljive je izmiješao. Po kojoj cijeni za kilogram treba trgovac sada prodavati šljive kako bi zaradio 5 kn po prodanom kilogramu šljiva?

Rješenje.
Uvedimo sljedeće oznake.

x – količina kupljenih šljiva kod 1. proizvođača (u kilogramima)

$x + \dfrac{1}{2}x$ – količina kupljenih šljiva kod 2. proizvođača (u kilogramima)

c_2 – cijena kod drugog proizvođača
c – cijena mješavine.

Tada je $x \cdot 30 = \left(x + \dfrac{1}{2}x\right) \cdot c_2$, (1 bod)
odnosno $c_2 = 20$ kn. (1 bod)

Cijenu mješavine računamo iz sljedeće jednakosti.
$x \cdot 30 + \left(x + \dfrac{1}{2}x\right) \cdot 20 = \left(x + x + \dfrac{1}{2}x\right) \cdot c.$ (2 boda)

Nakon sređivanja dobivamo
$120x = 5xc$.
Slijedi $c = 24$ kn. (1 bod)

Da bi trgovac zaradio 5 kn po prodanom kilogramu, šljive mora prodavati po $24 + 5 = 29$ kn za kilogram. (1 bod)

Zadatak B-1.5. Ako zbroju znamenaka nekog dvoznamenkastog broja dodamo kvadrat tog zbroja, dobit ćemo ponovno taj dvoznamenkasti broj. Odredite sve takve dvoznamenkaste brojeve.

Rješenje.
Neka je dvoznamenkasti broj $\overline{xy} = 10x + y$.
Tada vrijedi
$$x + y + (x + y)^2 = 10x + y, \quad x \neq 0.$$
(2 boda)

Odatle je $(x + y)^2 = 9x$.
Dakle, umnožak prve znamenke i broja 9 je kvadrat zbroja znamenaka.
Lako ćemo ispisati sve umnoške broja 9 s $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ i provjeriti koji su od njih kvadrati prirodnih brojeva. Kvadrati se dobiju za $x = 1$, $x = 4$ i $x = 9$.
$9 \cdot 1 = 9$, $9 \cdot 4 = 36$, $9 \cdot 9 = 81$. (2 boda)
Tada za $x = 1$ iz $(x + y)^2 = 9x$ slijedi $y = 2$, a $\overline{xy} = 12$.
Analogno se dobije za $x = 4$, $\overline{xy} = 42$ i za $x = 9$, $\overline{xy} = 90$. (2 boda)
Traženi dvoznamenkasti brojevi su : 12, 42 i 90.

Napomena.
Ako je netko pogodio sva tri broja, bez postupka dati 3 boda. Ako je netko ispisao sve dvoznamenkaste brojeve i tako dobio rješenje, dati svih 6 bodova.

Zadatak B-1.6. Marko pokušava pogoditi tri broja koja su zamislile i zapisale Andrea, Barbara i Dora. Ne žele mu otkriti koliko ti brojevi imaju znamenaka, već samo da su sva tri broja zapisana različitim znamenkama u rastućem poretku. Svaka je znamenka, osim nule, negdje korištena. Nakon nekoliko postavljenih pitanja Marko je doznao da Andrein i Barbarin broj imaju zajedničke jedino znamenke 3 i 8, Andrein i Dorin jedino znamenke 8 i 9, a Barbarin i Dorin jedino znamenku 8. Svaku od znamenaka $1, 2, 3, 4, 8$ i

9 koristila je Andrea ili Barbara (barem jedna od njih dvije). Isto tako svaku od znamenaka $1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9$ koristila je Andrea ili Dora, a svaku od znamenaka $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ koristila je Barbara ili Dora. Marko je saznao dovoljno i sada može pogoditi brojeve. Koji je broj zamislila koja od djevojaka?

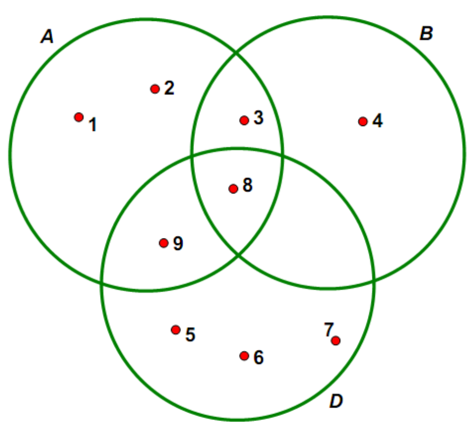
Rješenje.
Zadatak rješavamo koristeći skupove i Vennove dijagrame. Neka je A skup znamenaka broja kojeg je zamislila Andrea, B skup znamenaka broja kojeg je zamislila Barbara i D skup znamenaka broja kojeg je zamislila Dora. Tražimo skupove brojeva A, B, D sa sljedećim svojstvima.
$A \cap B = \{3, 8\}$
$A \cap D = \{8, 9\}$
$B \cap D = \{8\}$

(2 boda)

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$
$A \cup D = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$B \cup D = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(2 boda)

Iz prve tri jednakosti zaključujemo da je znamenka 6 zajednička svim skupovima. Nakon toga je lako pomoću Vennovih dijagrama doći do skupova A, B, D.

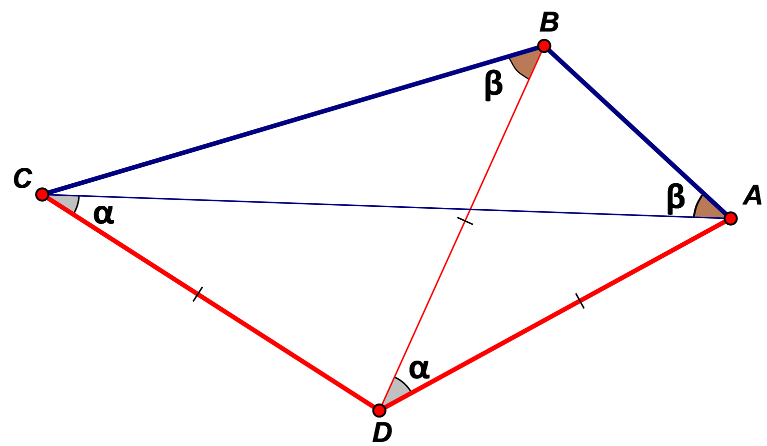


(3 boda)

Konačno
$$A = \{1, 2, 3, 8, 9\}, \quad B = \{3, 4, 8\}, \quad D = \{5, 6, 7, 8, 9\},$$
što znači da je Andrea zamislila broj 12389, Barbara broj 348, a Dora broj 56789. (3 boda)

Zadatak B-1.7. Neka je $ABCD$ četverokut kojemu su svi kutovi manji od 180°. Stranice AD, CD i dijagonala BD, su jednakih duljina, mjera kuta $\measuredangle ADB$ jednaka je mjeri kuta $\measuredangle DCA$ i mjera kuta $\measuredangle CBD$ jednaka je mjeri kuta $\measuredangle BAC$. Odredite mjere kutova četverokuta $ABCD$.

Rješenje. Označimo $\measuredangle ADB = \measuredangle DCA = \alpha$, $\measuredangle CBD = \measuredangle BAC = \beta$.



Trokut DAC je jednakokračan jer je $|DA| = |DC|$. Stoga je $\measuredangle DAC = \measuredangle DCA = \alpha$.
(1 bod)

Trokut DAB je jednakokračan jer je $|DA| = |DB|$. Stoga je $\measuredangle DAB = \measuredangle DBA = \alpha + \beta$.
(1 bod)

Trokut BDC je jednakokračan jer je $|DC| = |DB|$. Stoga je $\measuredangle DBC = \measuredangle DCB = \beta$.
(1 bod)

Odatle je $\measuredangle ACB = \beta - \alpha$. (1 bod)

U trokutu ABC vrijedi

$$\beta + \alpha + \beta + \beta + \beta - \alpha = 180^\circ. \quad \text{(1 bod)}$$

Dakle, $4\beta = 180^\circ$, $\beta = 45^\circ$. (1 bod)

Iz trokuta ADB slijedi

$$2(\alpha + \beta) + \alpha = 180^\circ. \quad \text{(1 bod)}$$

$3\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$. (1 bod)

Kutovi četverokuta su

$$
\begin{aligned}
&\measuredangle DAB = \alpha + \beta = 75^\circ \\
&\measuredangle DCB = \beta = 45^\circ \\
&\measuredangle CBA = \alpha + 2\beta = 120^\circ \\
&\measuredangle ADC = 360^\circ - 120^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 120^\circ
\end{aligned}
$$

(2 boda)

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

17. siječnja 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Zadan je kompleksni broj $z = \frac{(x+i\sqrt{3})^4}{1-i}$. Odredite sve realne brojeve x za koje je $|z| = 8\sqrt{2}$.

Rješenje.

Izračunajmo modul kompleksnog broja z.

$$|z| = \left|\frac{(x+i\sqrt{3})^4}{1-i}\right| = \frac{|x+i\sqrt{3}|^4}{|1-i|} = \frac{(\sqrt{x^2+3})^4}{\sqrt{2}} = \frac{(x^2+3)^2}{\sqrt{2}}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Budući da je $|z| = 8\sqrt{2}$, slijedi

$$\frac{(x^2+3)^2}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} / \cdot \sqrt{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$x^2 + 3 = \pm 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \text{ ili } x^2 = -7 \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako je x realan broj, rješenja su brojevi $x = \pm 1$. (1 bod)

Zadatak B-2.2. Jedno rješenje jednadžbe $ax^2 + bx + 5 = 0$ je pet puta veće od drugog. Koeficijenti a i b su prirodni brojevi manji od 20. Odredite sve takve jednadžbe.

Rješenje.

Iz danog uvjeta $x_1 = 5x_2$ i Vieteovih formula

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

slijedi

$$6x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$5x_2^2 = \frac{5}{a}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Izrazimo li iz prve jednakosti x_2 i uvrstimo u drugu dobit ćemo

$$\left(-\frac{b}{6a}\right)^2 = \frac{1}{a},$$

tj. $b^2 = 36a$. (2 boda)

Kako su a i b prirodni brojevi, a može biti jedino kvadrat nekog prirodnog broja. Obzirom da su a i b manji od 20, slijedi $a = 1$, $b = 6$ ili $a = 4$, $b = 12$ ili $a = 9$, $b = 18$. (1 bod)

Rješenje su jednadžbe
$x^2 + 6x + 5 = 0$, $4x^2 + 12x + 5 = 0$ i $9x^2 + 18x + 5 = 0$. (1 bod)

Zadatak B-2.3. U nekom je gradu 10 restorana i n kazališta. Jedna je grupa turista provela nekoliko dana u tom gradu. Tijekom svog boravka posjećivali su restorane i kazališta. Na kraju svog boravka ustanovili su da su svaki restoran posjetila 4 turista, a u svakom je kazalištu bilo po 6 turista. Ako je svaki turist posjetio točno 5 restorana i 3 kazališta, odredite koliko ima kazališta u gradu.

Rješenje.

Neka je t ukupan broj turista. Broj posjeta restoranima je

$$t \cdot 5 = 4 \cdot 10. \quad \text{(2 boda)}$$

Tada je $t = 8$. (1 bod)

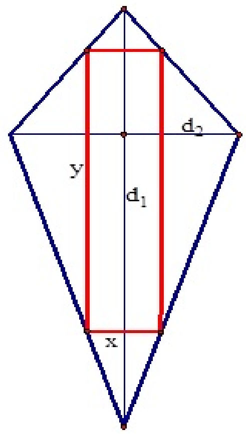
Analogno je broj posjeta kazalištu

$$t \cdot 3 = 6 \cdot n. \quad \text{(2 boda)}$$

Slijedi da je $t = 2n$, odnosno $n = 4$, što znači da je u gradu točno 4 kazališta. (1 bod)

Zadatak B-2.4. U deltoid kojemu su duljine dijagonala $d_1 = 24$ cm i $d_2 = 8$ cm upisan je pravokutnik tako da su njegove stranice paralelne s dijagonalama deltoida. Odredite dimenzije tako upisanog pravokutnika koji ima najveću površinu.

Rješenje.



Neka su x,y duljine stranica pravokutnika. Kako je $y||d_1$ i $x||d_2$ iz sličnosti trokuta slijedi

$$d_1 : y = \frac{d_2}{2} : \left(\frac{d_2 - x}{2}\right) \text{ ili } 24 : y = 4 : \left(4 - \frac{x}{2}\right) \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{d_1(d_2 - x)}{d_2} \text{ ili } y = 24 - 3x.$$

Sada je

$$P = P(x) = x \cdot (24 - 3x) = 24x - 3x^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Površina je najveća za

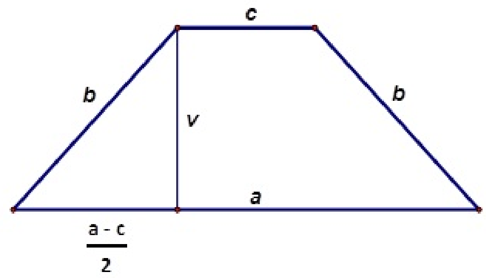
$$x_M = -\frac{24}{2 \cdot (-3)} = 4 \text{ cm} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$y_M = 24 - 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Dakle, najveću moguću površinu ima pravokutnik sa stranicama $x = 4$ cm i $y = 12$ cm.

Zadatak B-2.5. Razlika duljina osnovica jednakokračnog trapeza iznosi 10 cm. Duljina njegovog kraka je aritmetička sredina duljina osnovica. Izračunajte duljine stranica trapeza ako omjer duljina visine na osnovicu i veće osnovice iznosi 2 : 3.

Rješenje.



Zadano je

$$\begin{aligned} a - c &= 10 \\ \frac{a+c}{2} &= b \\ \frac{v}{a} &= \frac{2}{3}. \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz ovog sustava jednadžbi slijedi

$$b = a - 5 \text{ i } v = \frac{2}{3}a. \qquad \text{(1 bod)}$$

Pitagorin poučak daje

$$b^2 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2 \qquad \text{(1 bod)}$$

pa je

$$(a-5)^2 = 5^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi kvadratna jednadžba

$$a^2 - 18a = 0,$$

čije je jedino moguće rješenje $a = 18$ cm. (1 bod)
Tada je $b = a - 5 = 13$ cm, $c = a - 10 = 8$ cm. (1 bod)

Zadatak B-2.6. Za svaki od tri realna broja vrijedi da zbroj jednog od njih i umnoška preostalih dvaju iznosi 2. Odredite sve trojke takvih brojeva.

Rješenje.

Treba riješiti sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} a + bc &= 2 \\ b + ac &= 2 \\ c + ab &= 2. \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Oduzmimo prve dvije jednadžbe.

$$\begin{aligned} a-b+bc-ac&=0\\ a-b-c(a-b)&=0\\ (a-b)(1-c)&=0 \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Imamo dva slučaja: $a=b$ ili $c=1$. (1 bod)

1. slučaj

Ako je $a=b$ tada iz druge dvije jednadžbe sustava slijedi

$$\begin{aligned} a+ac&=2\\ c+a^2&=2. \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Oduzimanjem jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned} a-c-a(a-c)&=0\\ \Rightarrow (a-c)(1-a)&=0 \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Ponovno imamo dva slučaja: $a=c$ ili $a=1$. (1 bod)

- Za $a=c$ iz prve jednadžbe sustava dobivamo

  $$\begin{aligned} a+a^2&=2\\ \Rightarrow a^2+a-2&=0. \end{aligned}$$

  Slijedi

  $$a=1 \text{ ili } a=-2. \qquad \text{(1 bod)}$$

  Kako je $a=b=c$ slijedi $(a,b,c)=(1,1,1)$ ili $(a,b,c)=(-2,-2,-2)$. (1 bod)

- Za $a=1$, a tada i $b=1$ iz prve jednadžbe sustava slijedi

  $$1+c=2 \ \Rightarrow \ c=1,$$

  što daje isto rješenje $(a,b,c)=(1,1,1)$. (1 bod)

2.slučaj

Ako je $c=1$ iz druge dvije jednadžbe sustava slijedi

$$\begin{aligned} a+b&=2\\ 1+ab&=2 \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

što vodi na kvadratnu jednadžbu $a^2-2a+1=0$, s rješenjem $a=1$. Slijedi da je $b=1$ pa ponovno dobivamo rješenje $(a,b,c)=(1,1,1)$. (1 bod)

Jedina rješenja su $(1,1,1)$ i $(2,2,2)$.

Napomena:

Za bilo koji način svođenja na sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, a bez daljnjeg

postupka dati 3 boda.
Ako su rješenja pogođena dati 2 boda (za svako rješenje po 1).

Zadatak B-2.7. Zadan je kompleksan broj $w=-3-i$. Odredite sve kompleksne brojeve oblika $z=n^2+ni$, gdje je $n\in\mathbb{Z}$ i vrijedi

$$Re\left(\frac{z}{w}\right)<-0.4, \quad Im(z\cdot\overline{w})<4.$$

Rješenje.

Odredimo prvo količnik $\frac{z}{w}$ i umnožak $z\cdot\overline{w}$.

$$\frac{z}{w}=\frac{n^2+ni}{-3-i}\cdot\frac{-3+i}{-3+i}=\frac{-3n^2-3ni+n^2i-n}{10}=\frac{-3n^2-n}{10}+\frac{-3n+n^2}{10}i \qquad \text{(1 bod)}$$

Njegov realni dio je $Re\left(\frac{z}{w}\right)=\frac{-3n^2-n}{10}$. (1 bod)

$$z\cdot\overline{w}=(n^2+ni)\cdot(-3+i)=-3n^2-n+(-3n+n^2)i. \qquad \text{(1 bod)}$$

Njegov je imaginarni dio $Im(z\cdot\overline{w})=-3n+n^2$. (1 bod)

Treba riješiti sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} Re\left(\frac{z}{w}\right)<-0.4 \\ Im(z\cdot\overline{w})<4 \end{cases}$$

odnosno

$$\begin{cases} \frac{-3n^2-n}{10}<-\frac{4}{10} \\ -3n+n^2<4 \end{cases}$$

Nakon sređivanja imamo

$$\begin{cases} -3n^2-n+4<0 \\ n^2-3n-4<0 \end{cases} \qquad \text{(2 boda)}$$

Rješenje prve nejednadžbe su svi cijeli brojevi n za koje vrijedi

$$n<-\frac{4}{3} \text{ ili } n>1. \qquad \text{(1 bod)}$$

Rješenje druge nejednadžbe su svi cijeli brojevi n za koje je $-1<n<4$. (1 bod)

Presjek ovih skupova rješenja je skup $\{2,3\}$. (1 bod)

Prema tome traženi kompleksni brojevi su $4+2i$ ili $9+3i$. (1 bod)

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

17. siječnja 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite jednadžbu

$$\log_x 8 + \log_{4x} 4 + \log_{2x} 2 = 0.$$

Rješenje.

Da bi jednadžba imala smisla mora biti $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{4}$, $x \neq \frac{1}{2}$. (1 bod)

Početnu jednadžbu pišemo u obliku

$$\frac{3}{\log_2 x} + \frac{2}{2 + \log_2 x} + \frac{1}{1 + \log_2 x} = 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

Uvedimo supstituciju $t = \log_2 x$.

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{2+t} + \frac{1}{1+t} = 0 \qquad \text{(1 bod)}$$

Odatle dobivamo jednadžbu $6t^2 + 13t + 6 = 0$ (1 bod)

kojoj su rješenja $t_1 = -\frac{2}{3}$ i $t_2 = -\frac{3}{2}$. (1 bod)

Nadalje je $\log_2 x = -\frac{2}{3}$, pa je $x_1 = 2^{-\frac{2}{3}}$, $\log_2 x = -\frac{3}{2}$, pa je $x_2 = 2^{-\frac{3}{2}}$. (1 bod)

$$\left(\text{Ili zapis pomoću korijena } x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \right)$$

Zadatak B-3.2. Matko ima 8 kuglica i vagu. Sve su kuglice potpuno iste veličine i boje, ali jedna kuglica ima veću masu od ostalih 7. Može li Matko pomoću točno dva mjerenja, vagom koja nema utege, odrediti koja je to kuglica? Obrazložite.

Rješenje.

Razdijelit ćemo kuglice u tri skupine - dvije skupine po tri kuglice i jedna s dvije kuglice. (1 bod)

Prvo mjerenje. Stavit ćemo skupine s 3 kuglice na svaki kraj vage. Ako je vaga u ravnoteži, onda je svih 6 kuglica koje se nalaze na vagi jednake mase. Očito je tada tražena kuglica jedna od preostale dvije iz treće skupine. (2 boda)

To ćemo lako utvrditi drugim mjerenjem ako na svaki kraj vage stavimo po jednu kuglicu. (1 bod)

Ako vaga pri prvom mjerenju nije u ravnoteži, tražena se kuglica nalazi u težoj skupini. Iz te ćemo skupine uzeti dvije kuglice za drugo mjerenje, na svaku stranu vage po jednu kuglicu.

(1 bod)

Ako je među njima tražena kuglica, vaga će pokazati koja je veće mase, a ako nije, tada je kuglica s većom masom ona koja je preostala iz te skupine.

(1 bod)

Zadatak B-3.3. Odredite realne brojeve a, b i c za koje je funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx - c\sin x\cos x$$

neparna.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx - c\sin x\cos x = ax^2 + bx - \frac{c}{2}\sin 2x. \\ f(-x) &= a(-x)^2 + b(-x) - \frac{c}{2}\sin 2(-x) = ax^2 - bx + \frac{c}{2}\sin 2x. \end{aligned}$$

(1 bod)

Iz $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, slijedi (1 bod)

$$\begin{aligned} ax^2 - bx + \frac{c}{2}\sin 2x &= -ax^2 - bx + \frac{c}{2}\sin 2x \\ ax^2 &= -ax^2. \end{aligned}$$

(2 boda)

Ovo je ispunjeno za sve realne brojeve x ako je

$$a = 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}$$ (2 boda)

Zadatak B-3.4. Ako je $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$ i $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{4}$, koliko iznosi $\cos(\alpha - \beta)$?

Rješenje.

Kvadriramo svaku od jednadžbi $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{4}$.
Tada je

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta &= \frac{1}{4} \\ \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$ (2 boda)

Zbrajanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo

$$1 + 2\cos(\alpha - \beta) + 1 = \frac{5}{16}$$

(2 boda)

Odavde je

$$2\cos(\alpha-\beta) = -\frac{27}{16}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{27}{32} \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-3.5. Zadana je funkcija $f(x) = 2\cos 2x + 4\cos x + 3$. Odredite skup svih vrijednosti koje funkcija f može poprimiti.

Rješenje.
Tražimo najmanju i najveću vrijednost funkcije f. (1 bod)
Zapišimo funkciju f u pogodnijem obliku

$$f(x) = 2\cos 2x + 4\cos x + 3 = 2(2\cos^2 x - 1) + 4\cos x + 3 = (2\cos x + 1)^2$$

(2 boda)

Funkcija f će imati najveću vrijednost kada kosinus ima najveću vrijednost, odnosno kada je $\cos x = 1$. Dakle, maksimum je $(2+1)^2 = 9$. (1 bod)
Minimum je očito 0 jer je $f(x) \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$, a $f(x) = 0$ za $\cos x = -0.5$.
(Ili gledamo kao apscisu tjemena grafa kvadratne funkcije.) (1 bod)
Zaključak $f(x) \in [0, 9]$. (1 bod)

Zadatak B-3.6. Na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ riješite sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y \end{cases}.$$

Rješenje.
Zbrajanjem danih jednadžbi imamo.

$$\frac{\cos x}{\cos y} + \frac{\sin x}{\sin y} = 2$$

(1 bod)

Nakon množenja sa $\sin y \cos y$ slijedi

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = 2\sin y \cos y$$
$$\sin(x+y) = \sin 2y \qquad \text{(1 bod)}$$

Imamo dva slučaja:

Prvi slučaj. Iz $x + y = 2y$ slijedi $x = y$, pa imamo (1 bod)

$$\frac{\sin x}{\sin x} = 2\sin^2 x$$
$$2\sin^2 x = 1$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

Jednadžba $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ ima rješenje $x_1 = \frac{\pi}{4}$.
Jedno je rješenje sustava $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$. (2 boda)

Drugi slučaj. Iz $x + y = \pi - 2y$ slijedi $x = \pi - 3y$, pa je (1 bod)

$$\frac{\sin(\pi - 3y)}{\sin y} = 2\sin^2 y$$
$$\frac{\sin 3y}{\sin y} = 2\sin^2 y \qquad \text{(1 bod)}$$
$$\frac{3\sin y - 4\sin^3 y}{\sin y} = 2\sin^2 y$$
$$3 - 4\sin^2 y = 2\sin^2 y$$
$$6\sin^2 y = 3$$
$$2\sin^2 y = 1$$
$$\sin^2 y = \frac{1}{2} \qquad \text{(1 bod)}$$

Jednadžba $\sin y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ ima rješenje $y_1 = \frac{\pi}{4}$. (1 bod)
A to nam opet daje isto rješenje sustava.

Drugo rješenje.
Na isti način svodimo sustav na jednadžbu

$$\sin(x + y) = \sin 2y.$$

Ovu jednadžbu možemo riješiti koristeći formule pretvorbe.

$$\sin(x + y) - \sin 2y = 0$$
$$2\cos\frac{x + 3y}{2}\sin\frac{x - y}{2} = 0.$$

Tada je

$$\cos\frac{x + 3y}{2} = 0 \quad \text{ili} \quad \sin\frac{x - y}{2} = 0.$$

Slijedi

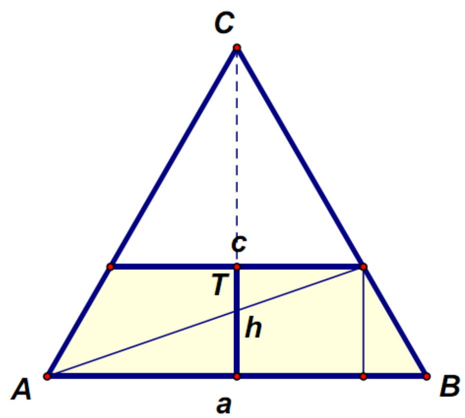
$$\frac{x + 3y}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ili} \quad \frac{x - y}{2} = 0.$$

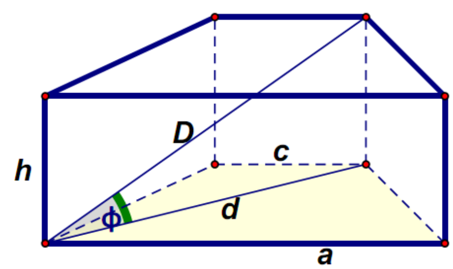
Odatle je $x = \pi - 3y$ ili $x = y$.

Dalje ide analogno kao i u prvom rješenju.

Zadatak B-3.7. Duljina stranice jednakostraničnog trokuta iznosi 6 cm. Njegovim je težištem povučena paralela s jednom od stranica. Izračunajte obujam uspravne prizme čija je baza nastali trapez, a duljina visine prizme jednaka je duljini visine trapeza. Odredite kosinus kuta kojeg prostorna dijagonala prizme zatvara s ravninom baze.

Rješenje.





(Ako je označen jasno kut između dijagonale i baze) (2 boda)

Kako težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1, a težišnica se podudara s visinom jednakostraničnog trokuta, to je visina dobivenog trapeza

$$h = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

(2 boda)

Isto tako vrijedi

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$
$$c = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ cm}.$$

(1 bod)

Površina trapeza je

$$B = \frac{a+c}{2} \cdot h = 5\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

(1 bod)

Obujam prizme je

$$V = B \cdot h = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 15 \text{ cm}^3.$$

(1 bod)

Kako bismo mogli izračunati traženi kosinus, izračunajmo duljinu dijagonale baze i duljinu prostorne dijagonale.

$$d = \sqrt{5^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{28} \text{ cm.} \qquad (1 \text{ bod})$$

$$D = \sqrt{28 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{31} \text{ cm.} \qquad (1 \text{ bod})$$

Sada je

$$\cos\varphi = \frac{d}{D} = \sqrt{\frac{28}{31}}.$$

(1 bod)

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

17. siječnja 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Odredite onaj član u razvoju binoma

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2x}{\sqrt{y}}}-\sqrt{\frac{y}{2\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}, \quad x, y>0$$

koji sadrži x i y s istim eksponentom.

Rješenje.

U razvoju binoma

$$\left(\sqrt[3]{\frac{2x}{\sqrt{y}}}-\sqrt{\frac{y}{2\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$$

opći je član $\binom{21}{k} a^{21-k} b^{k}$, gdje je

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt[3]{\frac{2x}{\sqrt{y}}}=2^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{6}}, \\
b &= -\sqrt{\frac{y}{2\sqrt[3]{x}}}=-2^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{2}}. && \text{(1 bod)}
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\binom{21}{k} a^{21-k} b^{k} &= \binom{21}{k}\left(2^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k} \cdot\left(-2^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{2}}\right)^{k} \\
&= \binom{21}{k}(-1)^{k}\left(2^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{2}}\right)\left(x^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}}\right)\left(y^{\frac{k-21}{6}+\frac{k}{2}}\right) && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Kako bi x i y imali isti eksponent vrijedi sljedeće

$$\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}=\frac{k-21}{6}+\frac{k}{2}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Odatle dobivamo $k=9$ pa je traženi član

$$-\binom{21}{9} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{5}{2}}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-4.2. U jednoj je skupini, od ukupno 112 učenika svaka četvrta osoba djevojka. U drugoj je skupini ukupno 53 učenika, a omjer broja mladića i djevojaka iznosi 2 : 1. U obje je skupine jednak broj djevojaka. Kako je to moguće i koliko je u tom slučaju djevojaka u svakoj skupini?

Rješenje.

Odredimo bazu sustava u kojem je zadatak moguć.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}112_{(b)} &= \frac{1}{3}53_{(b)}\\ 3(b^2+b+2) &= 4(5b+3) \qquad \text{(2 boda)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3b^2-17b-6 &= 0\\ b &= 6. \qquad \text{(2 boda)}\end{aligned}$$

Zadatak je moguć u sustavu s bazom 6.
Broj djevojaka označimo s x. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}53_{(6)} &= x\\ 5\cdot 6+3 &= 3x\\ x &= 11 \qquad \text{(1 bod)}\end{aligned}$$

U dekadskom sustavu broj djevojaka je 11. U sustavu s bazom 6 broj djevojaka je 15.
(1 bod)

Priznati bilo koji od ta dva odgovora.

Zadatak B-4.3. Odredite sve brojeve $z \in \mathbb{C}$ koji su rješena jednadžbe $z^3 + i^{2013} = 0$. Izračunajte površinu lika čiji su vrhovi u Gaussovoj ravnini određeni rješenjima te jednadžbe.

Rješenje.

$$\begin{aligned}z^3+i^{2013} &= 0\\ z^3 &= -i^{2013}\\ z^3 &= -i\end{aligned}$$

Prikažimo $-i$ u trigonometrijskom obliku.

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je

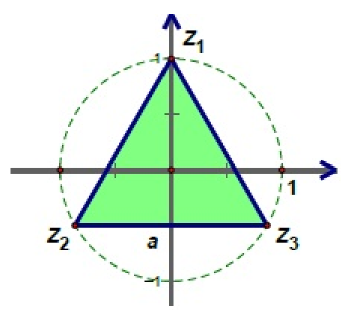
$$z = \sqrt[3]{-i} = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2. \qquad \text{(1 bod)}$$

Dakle, rješenja jednadžbe su sljedeći brojevi

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i; \\ z_2 &= \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i; \\ z_3 &= \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i. \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Oni određuju vrhove jednakostraničnog trokuta

$$Z_1(0,1),\ Z_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ Z_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right). \qquad \text{(1 bod)}$$



Duljina stranice tog trokuta iznosi

$$a = |\overline{Z_2 Z_3}| = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada njegova površina iznosi

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-4.4. Odredite vrijednost sinusa broja, kojemu je kosinus jednak njegovom tangensu.

Rješenje.

Ako je $\cos x = \operatorname{tg} x$, tada je

$$\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi

$$\cos^2 x = \sin x,$$

$$1 - \sin^2 x = \sin x \text{ ili } \sin^2 x + \sin x - 1 = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Tada je

$$\sin x = t, \quad t^2 + t - 1 = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su

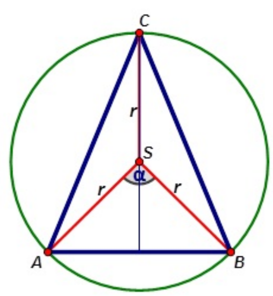
$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je $\sin x \in [-1, 1]$, jedino rješenje je

$$\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-4.5. Nad tetivom $\overline{AB}$ kružnice $k(S, r)$ konstruirana su s iste strane tetive dva jednakokračna trokuta kojima je zajednička osnovica tetiva $\overline{AB}$. Jednom je treći vrh središte S, a drugom točka C na kružnici. Ako je omjer njihovih površina $3 : (2\sqrt{3} + 3)$ izračunajte mjeru kuta između krakova trokuta ΔABS.

Prvo rješenje.



Slika. (1 bod)

Neka je $a = \overline{AB}$. Ako visinu na osnovicu trokuta ΔABS označimo s x, onda je visina trokuta ΔABC jednaka $r + x$.

Vrijedi $x = r \cos \dfrac{a}{2}$. (1 bod)

Za površine danih trokuta vrijedi

$$\frac{\frac{(r+x)\cdot a}{2}}{\frac{x \cdot a}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Nakon sređivanja tog izraza slijedi

$$\frac{r}{x}+1=\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$$

$$\frac{x}{r}=\frac{3}{2\sqrt{3}} \qquad \text{(1 bod)}$$

Odatle je

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tada je $\alpha=60^\circ$. (2 boda)

Drugo rješenje.

Slika. (1 bod)

Površina manjeg trokuta ΔABS je $P_1=\frac{1}{2}r^2\sin\alpha$, (1 bod)

a površina većeg trokuta ΔABC je

$$\begin{aligned} P_2=P_1+2P_{\Delta ASC} &= \frac{1}{2}r^2\sin\alpha+\frac{1}{2}r^2\sin\left(180^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)= \\ &=\frac{1}{2}r^2\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+r^2\sin\frac{\alpha}{2}= \\ &=r^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right) \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Sada je

$$P_1:P_2=\frac{\frac{1}{2}r^2\sin\alpha}{r^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)} \qquad \text{(2 boda)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+1}=\frac{3}{2\sqrt{3}+3} \quad \Rightarrow \quad \alpha=60^\circ \qquad \text{(1 bod)}$$

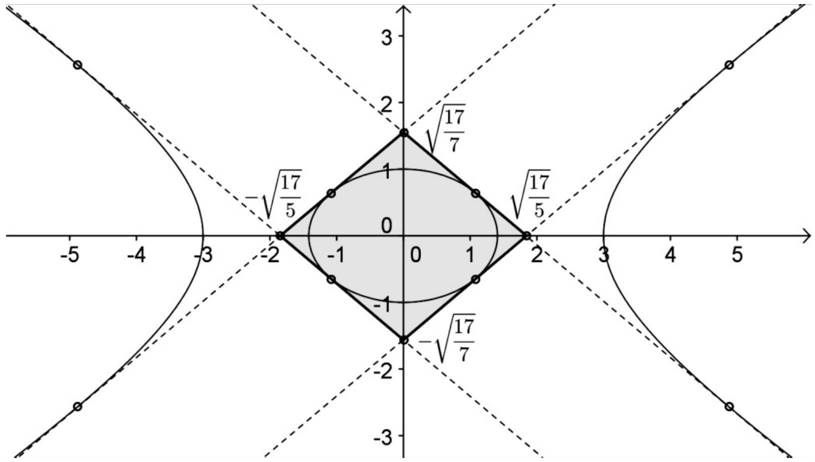
Zadatak B-4.6. Izračunajte površinu četverokuta omeđenog zajedničkim tangentama krivulja
$x^2+2y^2=2$ i $4x^2-9y^2=36$.

Rješenje.

Slika. (2 boda)

Krivulja $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$ je elipsa i vrijedi $a^2=2$, $b^2=1$. Koristeći uvjet dodira $a^2k^2+b^2=l^2$ pravca i elipse, dobivamo

$$2k^2+1=l^2.(*) \qquad \text{(1 bod)}$$



Krivulja $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ je hiperbola i vrijedi $a^2 = 9$, $b^2 = 4$. Koristeći uvjet dodira $a^2k^2 - b^2 = l^2$ pravca i hiperbole dobivamo

$$9k^2 - 4 = l^2.(**)$$ (1 bod)

Iz sustava što ga čine jednadžbe (*) i (**) dobivamo rješenja:

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{7}} \text{ i } l_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{17}{7}}$$ (2 boda)

Jednadžbe zajedničkih tangenti su

$$t_{1,2,3,4} \ldots y = \pm\sqrt{\frac{5}{7}}x \pm \sqrt{\frac{17}{7}}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{5}{7}}x \mp \sqrt{\frac{17}{7}}$$ (1 bod)

Izračunajmo njihove odsječke na koordinatnim osima.

Na osi x za $y = 0$ dobivamo

$$x_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{17}{5}}$$ (1 bod)

$$d_1 = x_2 - x_1 = 2\sqrt{\frac{17}{5}}.$$

Na osi y, za $x = 0$ dobivamo

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{17}{7}}$$ (1 bod)

$$d_1 = y_2 - y_1 = 2\sqrt{\frac{17}{7}}.$$

Tada je tražena površina

$$P = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{17}{5}} \cdot \sqrt{\frac{17}{7}} = \frac{34\sqrt{35}}{35}.$$ (1 bod)

Zadatak B-4.7. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Rješenje.

Zadanu jednakost dokažimo matematičkom indukcijom.
Provjerimo tvrdnju za $n=1$

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Baza indukcije je zadovoljena. (2 boda)

Pretpostavimo da zadana jednakost vrijedi za neki proizvoljan prirodni broj n te dokažimo da vrijedi i za njegovog sljedbenika $n+1$. (2 boda)

Treba dokazati da je

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.$$

Krenimo od lijeve strane gornje jednakosti i primjenimo na ovaj izraz pretpostavku indukcije

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}= \\
=&\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}= && \text{(2 boda)}\\
=&\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)= && \text{(1 bod)}\\
=&\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}. && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Time smo pokazali da tvrdnja vrijedi za $n+1$, a tada i za svaki prirodni broj n.(1 bod)