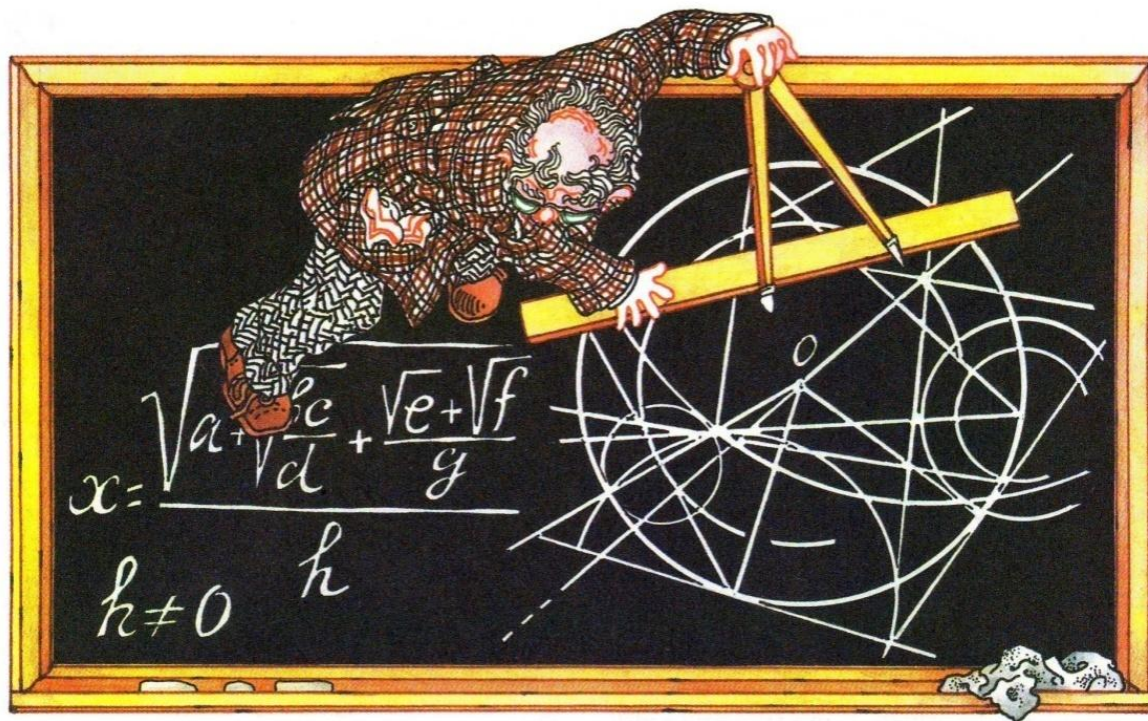


Arbelos, zlatni rez i pravilni poligoni



Milan Kabić
S. Š. Dugo Selo

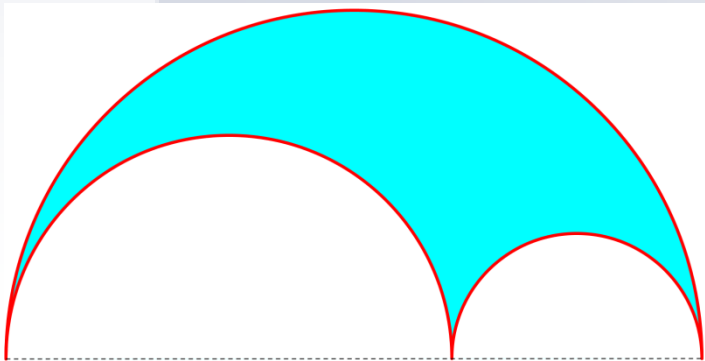
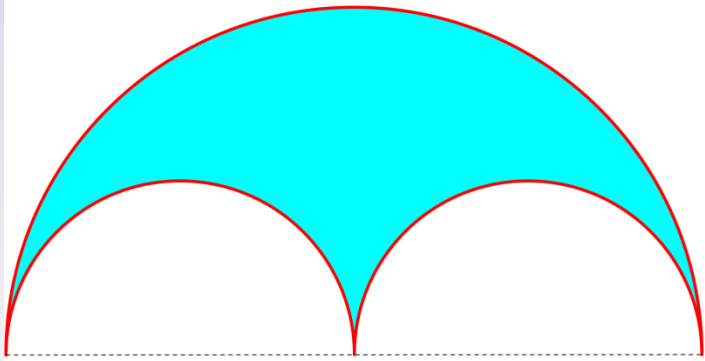
Sadržaj:

1. U svom izlaganju ću dotaknuti nekoliko zanimljivih matematičkih tema koje su bile u fokusu pažnje matematičara u antici, ali zbog bogatstva sadržaja i zbog svoje ljepote i danas privlače pozornost profesionalnih matematičara i matematičara amatera. Pokazuje se da su mnogi sadržaji iz tzv. “stare” matematike pogodni za rad sa nadarenom djecom
2. Posebno mjesto zauzima dio u kojem ću pokazati kako se izvode geometrijske konstrukcije, kod kojih se pokazuju mogućnosti nove tehnologije u lijepom, preglednom, preciznom i brzom prikazu geometrijskih crteža. Pri tom ću koristiti GeoGebru, programski paket namijenjen matematičkoj edukaciji.

1. TAJNE ARBELOSA

U matematici arbelos je lik omeđen trima polukružnicama koje se dodiruju i imaju kolinearna središta.

Arbelos je kožarski nož.

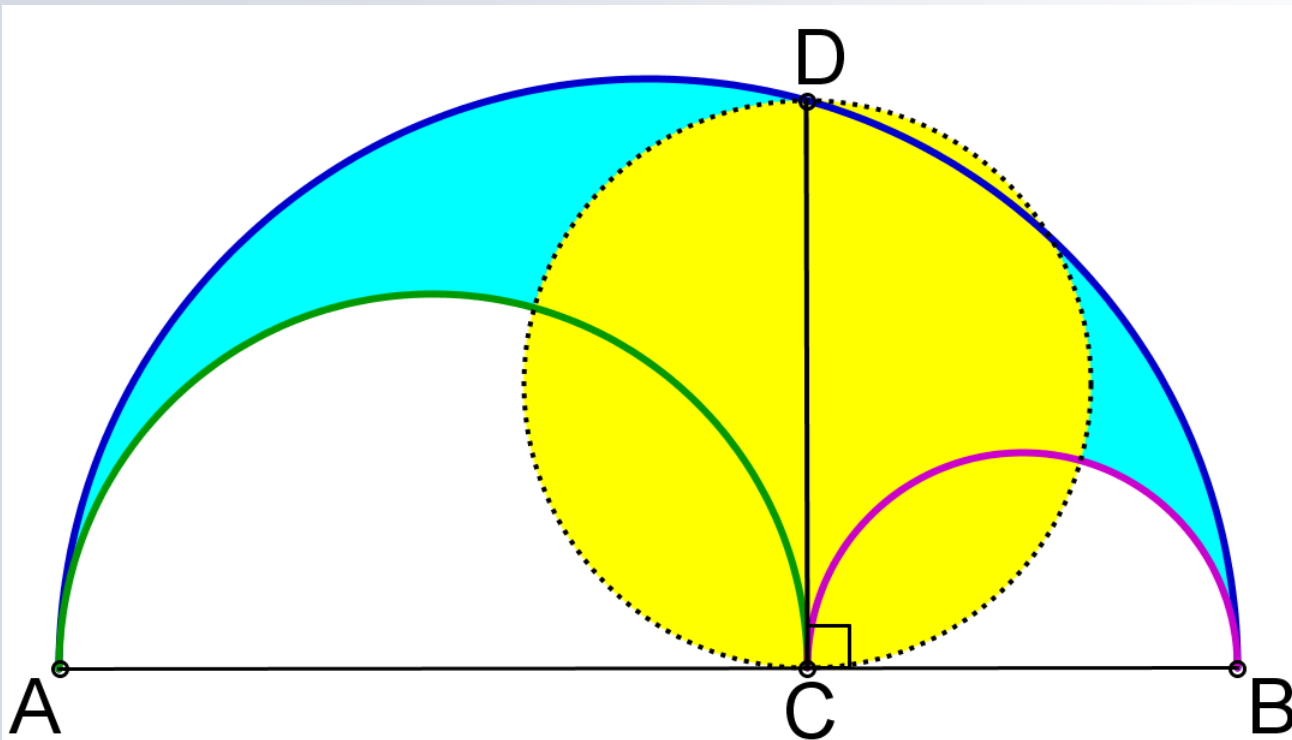




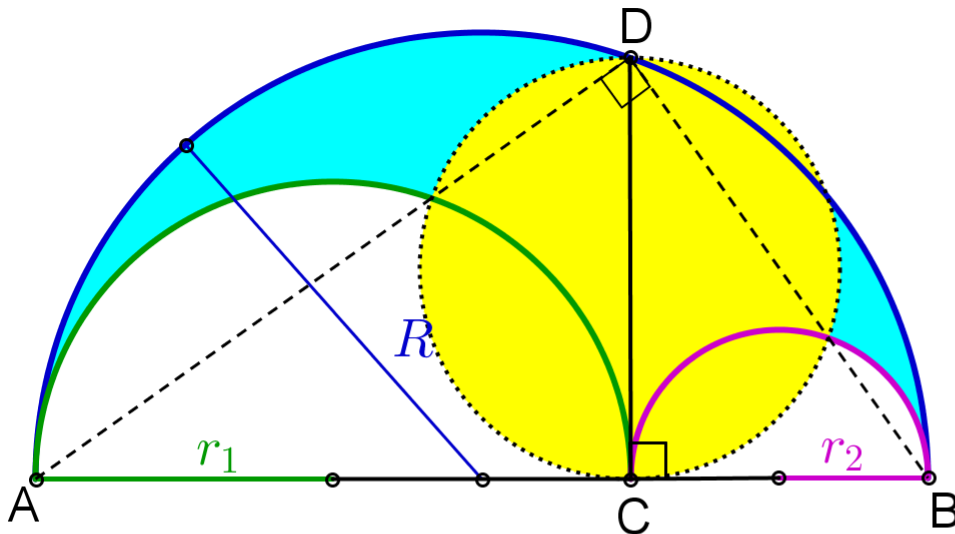
Museum of Fine, Boston: Amfora nastala oko 500.– 490. g. pr. Kr. Mlada žena lagano zadiže haljinu kako bi postolar mogao uzeti mjere njezinog stopala. U ruci postolara je arbelos.

Arhimed (grč. *Arhimedes*, oko 287. – 212. g. pr. Kr.) je u *Propoziciji 4* u svojoj ***Knjizi lema*** dokazao sljedeću tvrdnju:

Ako je dužina \overline{CD} okomita na promjer \overline{AB} onda je površina kružnice čiji je promjer \overline{CD} jednaka površini arbelosa.



Dokaz Arhimedove propozicije



$$P_a = \frac{1}{2}R^2\pi - \frac{1}{2}r_1^2\pi - \frac{1}{2}r_2^2\pi =$$

$$\frac{1}{2}[(r_1 + r_2)^2\pi - r_1^2\pi - r_2^2\pi] =$$

$$\frac{1}{2}(r_1^2\pi + 2r_1r_2\pi + r_2^2\pi - r_1^2\pi - r_2^2\pi)$$

$$P_a = r_1r_2\pi$$

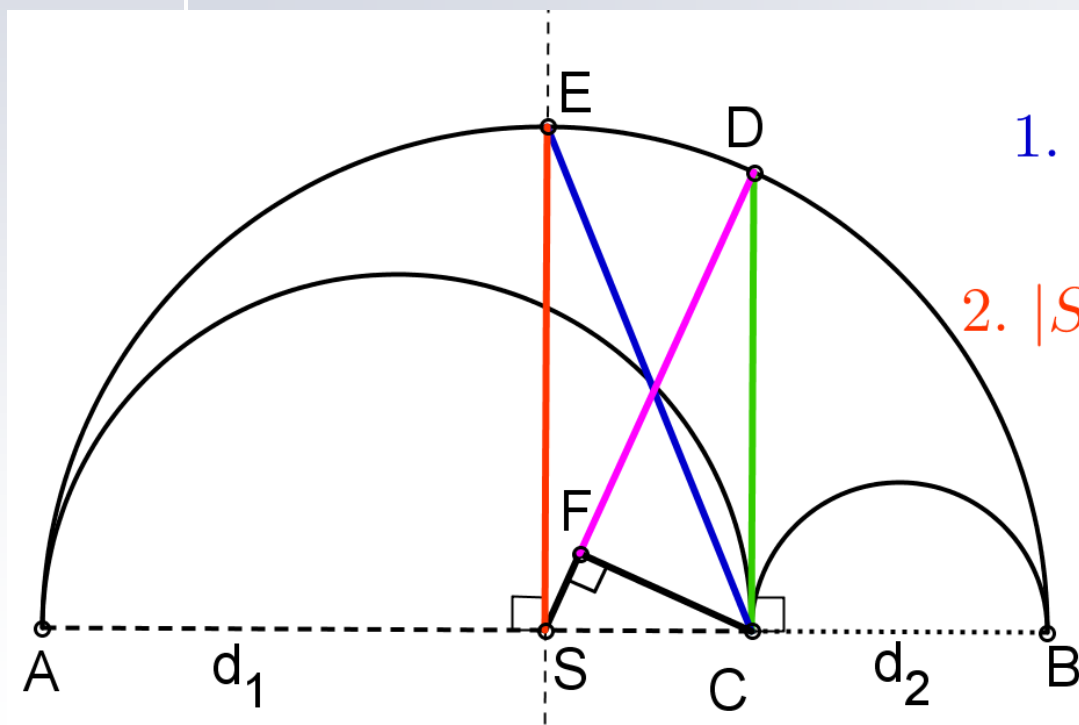
Euklidov poučak : $|CD|^2 = |AC| \cdot |BC| = 4r_1r_2$

$$P_k = \left(\frac{1}{2}|CD|\right)^2 \pi = \frac{1}{4}|CD|^2 \pi = \frac{1}{4} \cdot 4r_1r_2\pi = r_1r_2\pi$$

$$P_k = r_1r_2\pi$$

U arbelosu ćemo naći sve četiri sredine: kvadratnu, aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu. Sa slike je očigledno da vrijede poznati odnosi između tih sredina:

$$d_1 \geq K(d_1, d_2) \geq A(d_1, d_2) \geq G(d_1, d_2) \geq H(d_1, d_2) \geq d_2.$$



$$1. |CE| = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}} = K(d_1, d_2)$$

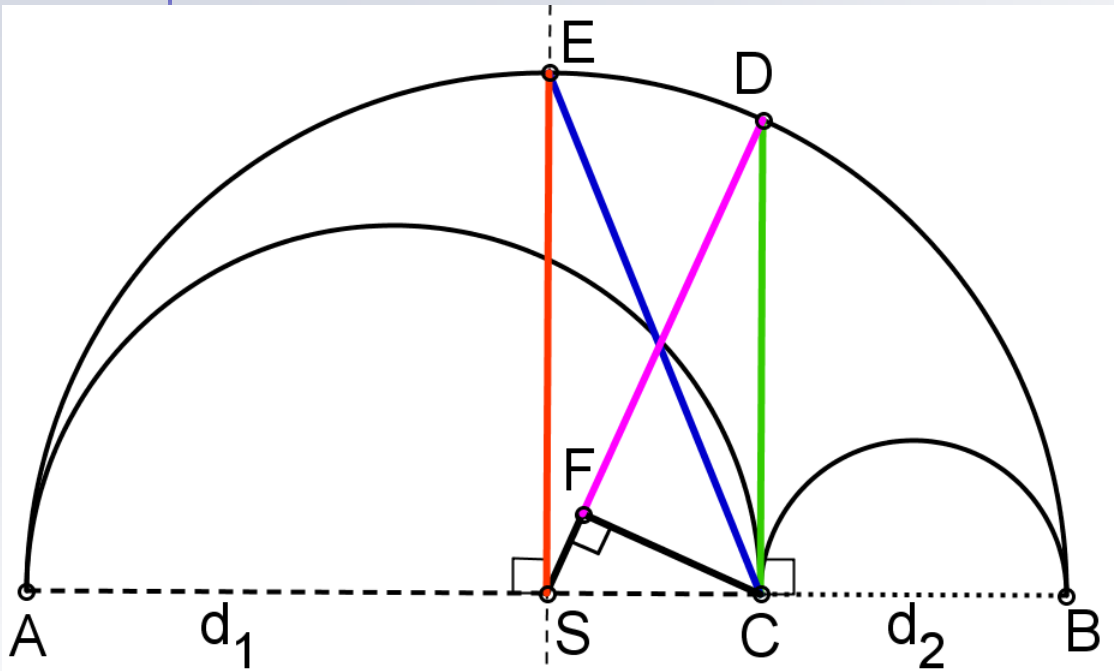
$$2. |SD| = R = \frac{d_1 + d_2}{2} = A(d_1, d_2)$$

$$3. |CD| = \sqrt{d_1 d_2} = G(d_1, d_2)$$

$$4. |DF| = \frac{2}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}} = H(d_1, d_2)$$

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut *CES* slijedi:

$$\begin{aligned} |CE|^2 &= |ES|^2 + |SC|^2 = R^2 + (2r_1 - R)^2 = (r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 \\ &= 2r_1^2 + 2r_2^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{2} \Rightarrow |CE| = K(d_1, d_2). \end{aligned}$$

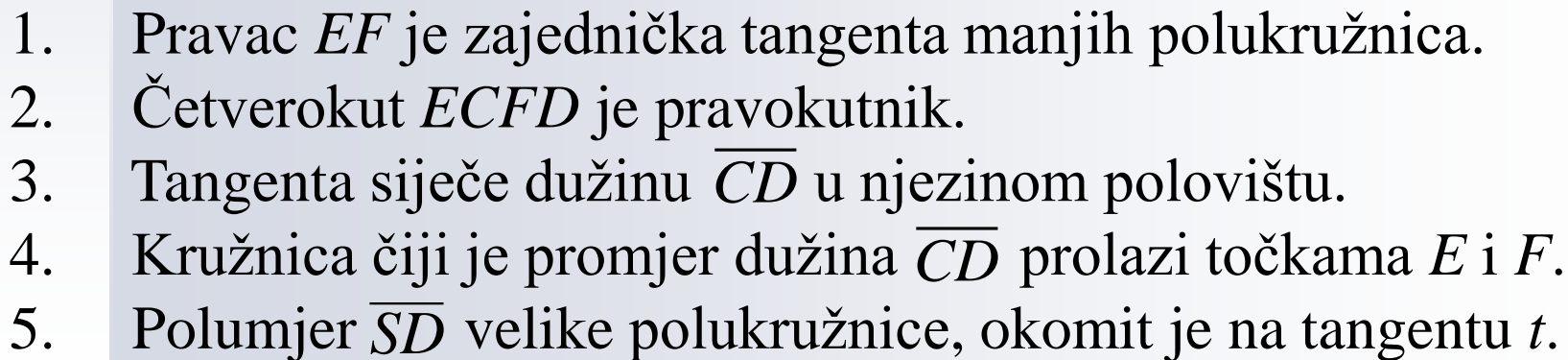


Iz sličnosti trokuta *CDF* i *SDC* slijedi:

$$\frac{|DF|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|SD|}$$

$$|DF| = \frac{|CD|^2}{|SD|} = \frac{d_1 d_2}{\frac{d_1 + d_2}{2}} = \frac{2d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{2}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}} = H(d_1, d_2).$$

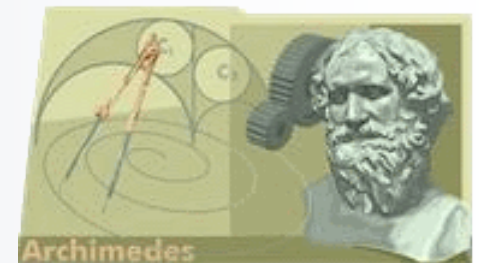
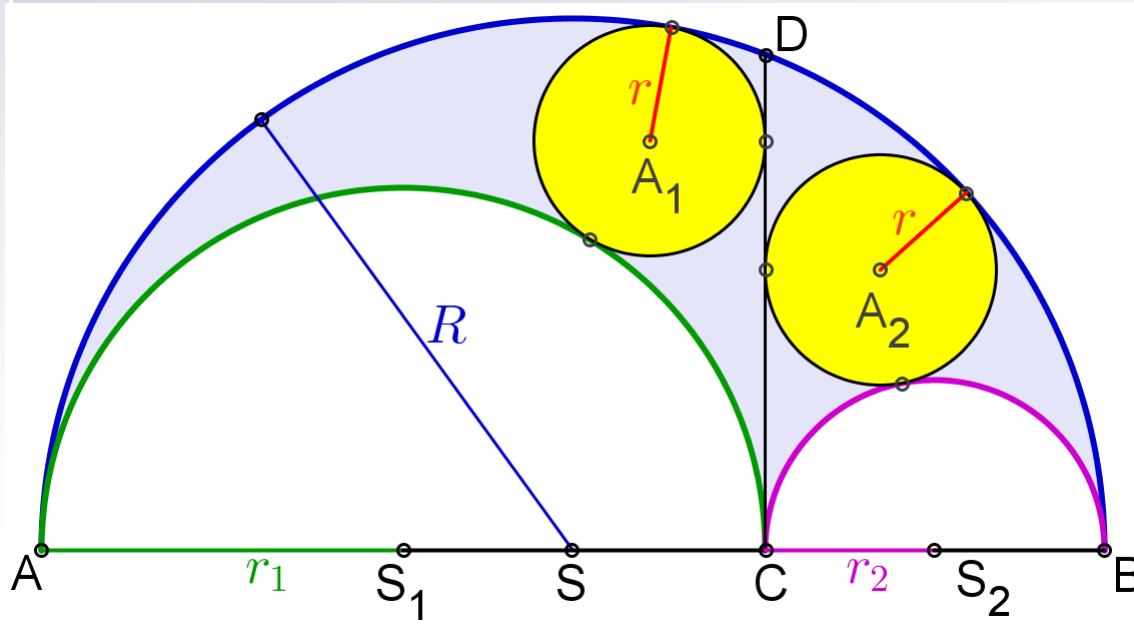
$$\overline{BD} \cap k_2 = F$$



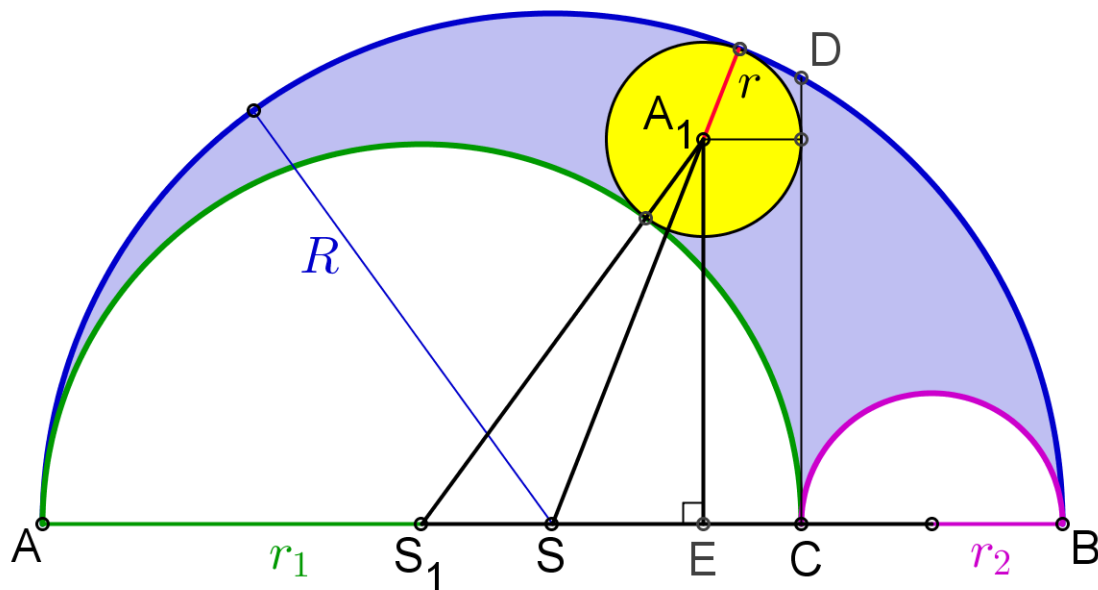
Arhimedove kružnice

(Arhimedovi blizanci, magične kružnice)

Dvije kružnice koje diraju dva luka arbelosa, veliki iznutra i jedan manji s vanjske strane, te pravac CD imaju jednake polumjere. Njihov polumjer je $r = \frac{r_1 r_2}{R}$.



Dokaz.



$$|SE| = R - 2r_2 - r = r_1 - r_2 - r$$

$$|SA_1| = R - r = r_1 + r_2 - r$$

$$|S_1E| = r_1 - r$$

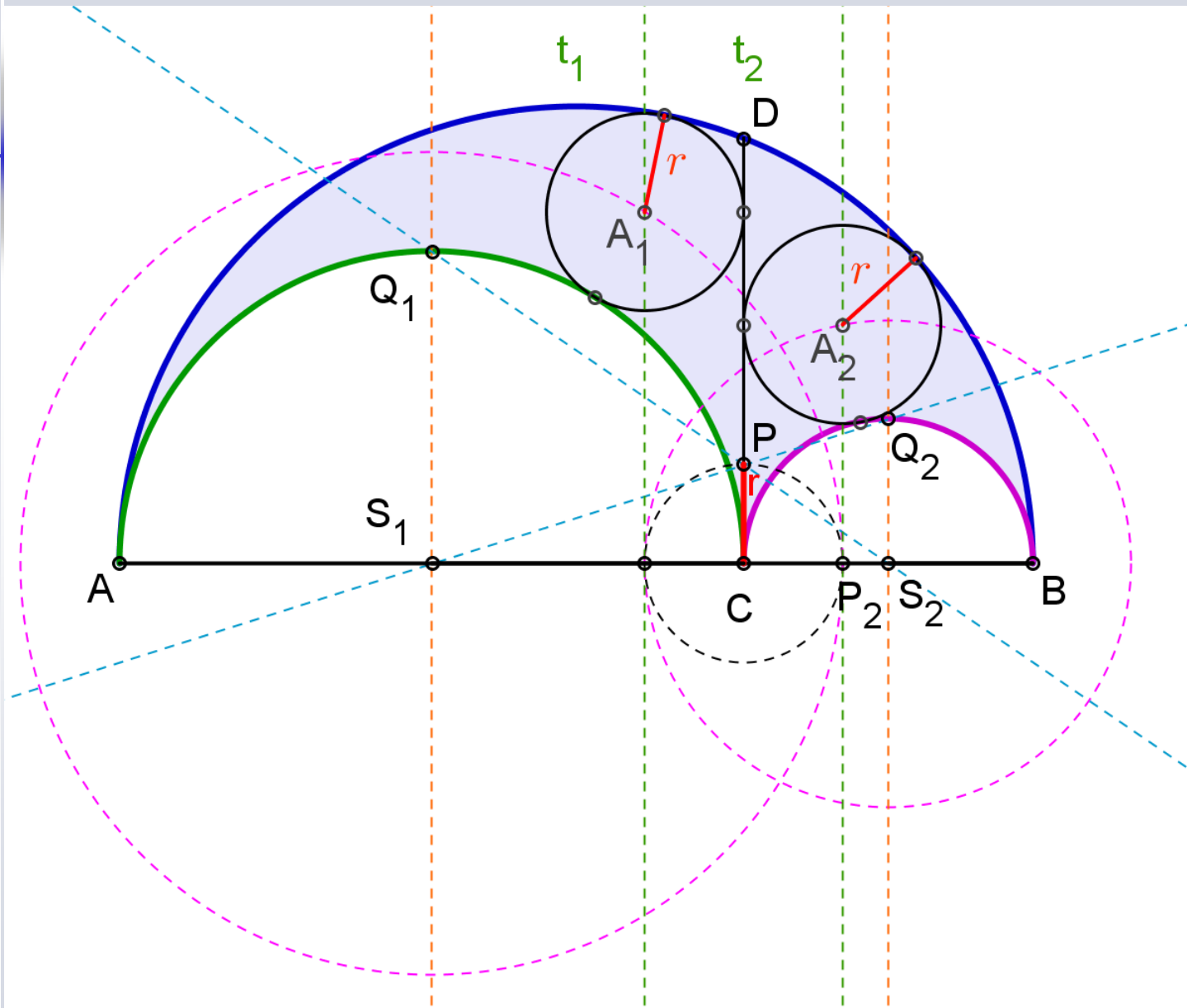
$$|S_1A_1| = r_1 + r$$

$$\Delta S_1EA_1 \Rightarrow |A_1E|^2 = (r_1 + r)^2 - (r_1 - r)^2$$

$$\Delta SEA_1 \Rightarrow |A_1E|^2 = (r_1 + r_2 - r)^2 - (r_1 - r_2 - r)^2$$

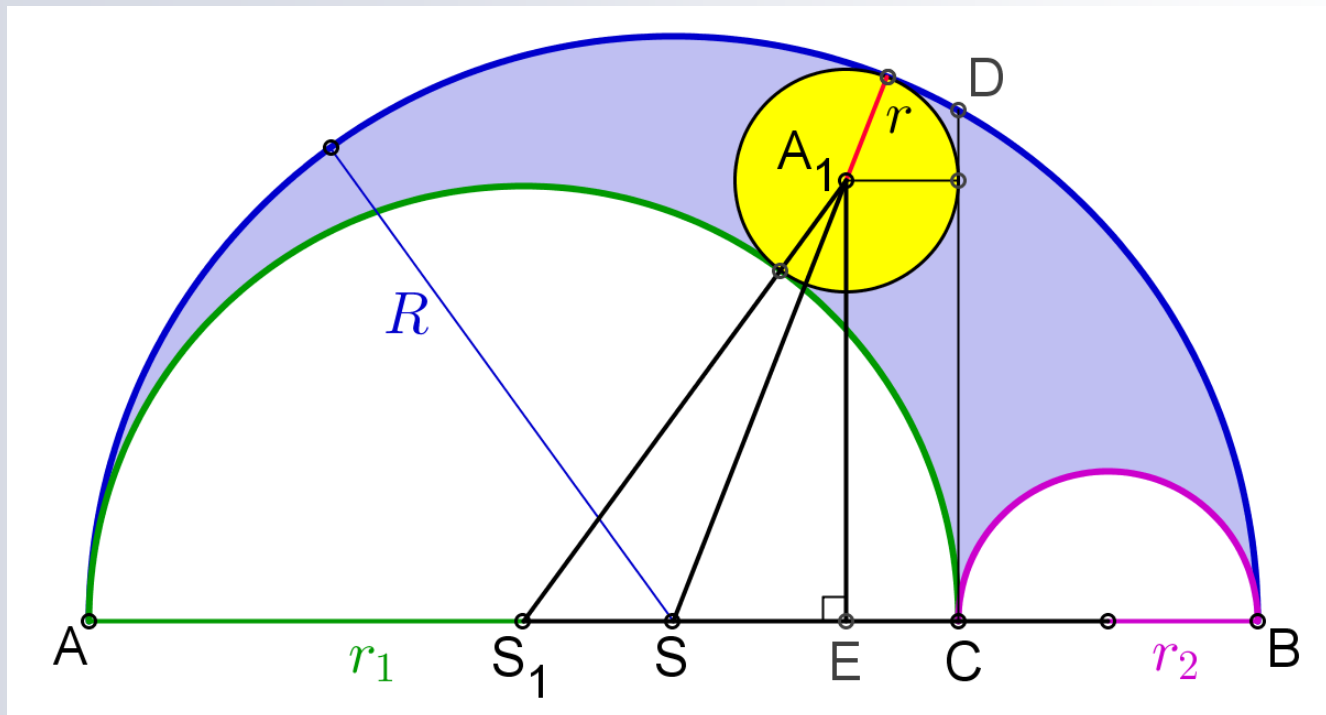
$$(r_1 + r_2 - r)^2 - (r_1 - r_2 - r)^2 = (r_1 + r)^2 - (r_1 - r)^2 \Rightarrow r = \frac{r_1 r_2}{R}.$$

KONSTRUKCIJA ARHIMEDOVIH KRUŽNICA



$$r = \frac{r_1 r_2}{R} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1}{\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{1}{2} H(r_1, r_2).$$

Polumjer Arhimedovih kružnica jednak je polovici harmonijske sredine polumjera manjih lukova arbelosa.

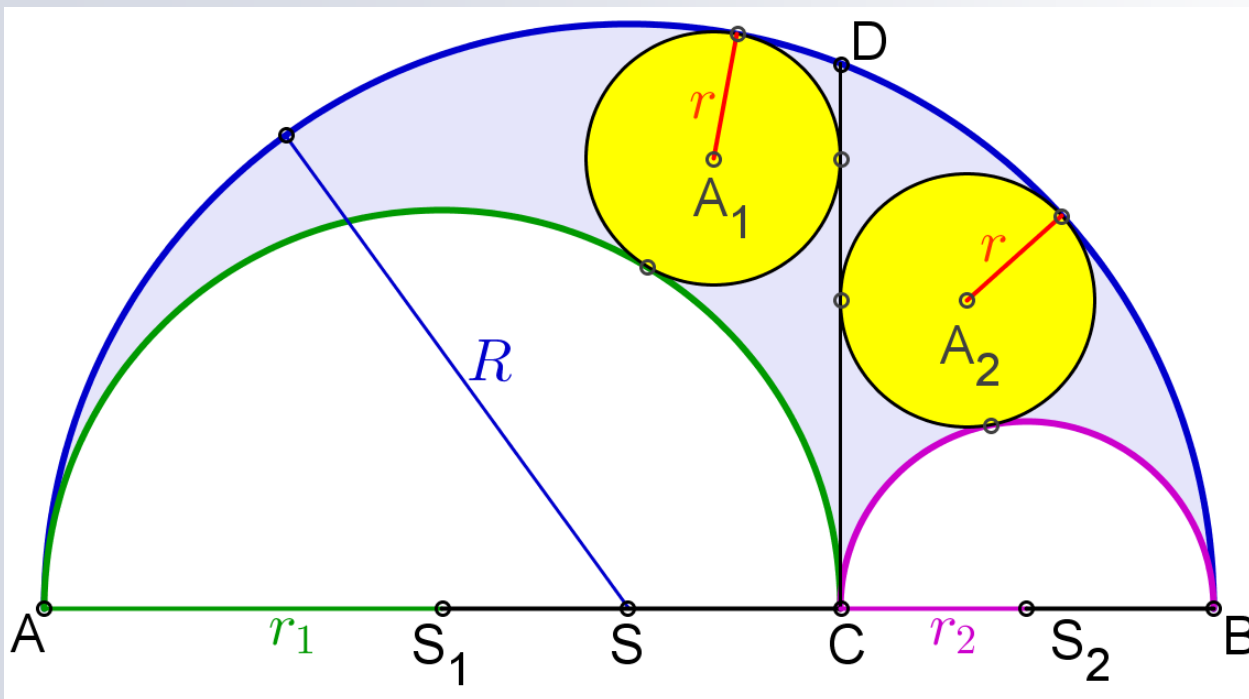


$r_1\pi + r_2\pi = (r_1 + r_2)\pi = R\pi$ - duljina velike polukružnice jednaka je zbroju duljina manjih polukružnica.

$$O_a = 2R\pi \quad P_a = r_1 r_2 \pi$$

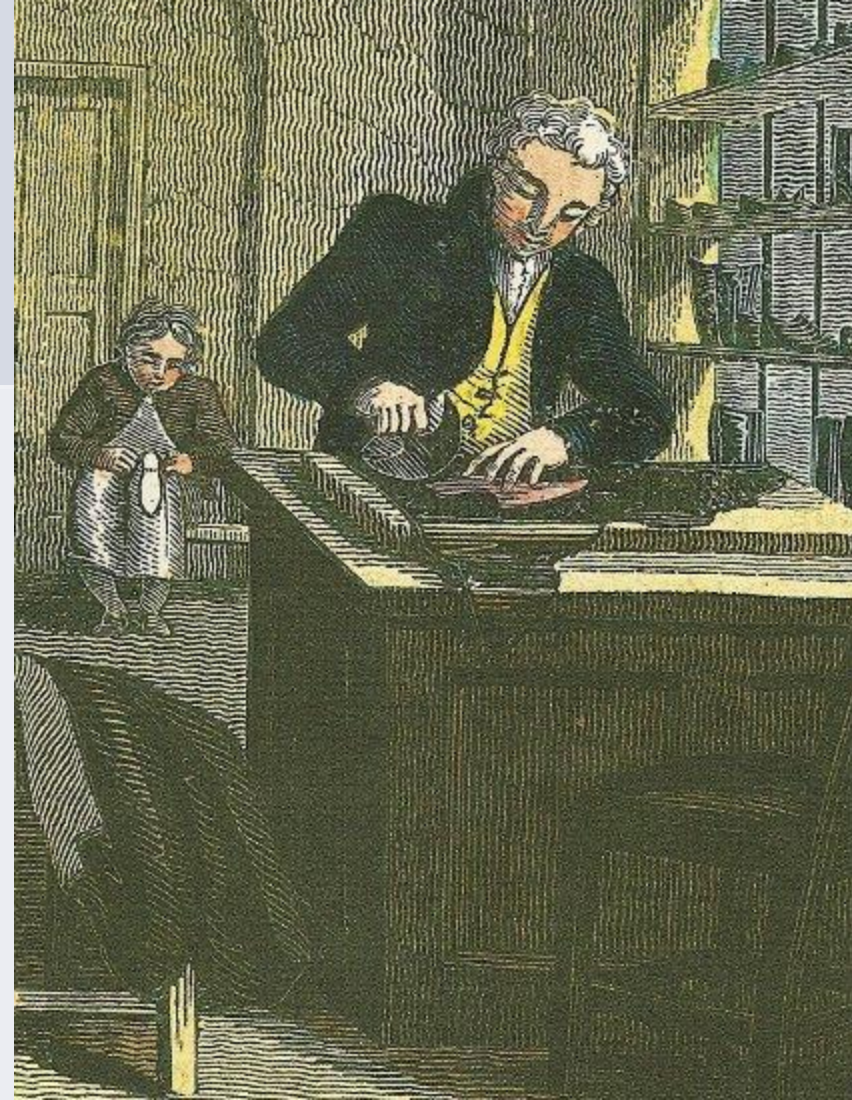
$$\frac{P_a}{O_a} = \frac{r_1 r_2 \pi}{2R\pi} = \frac{r_1 r_2}{2R} = \frac{r}{2}$$

Omjer površine i opsega arbelosa jednak je polovini radijusa Arhimedove kružnice.





Motiv iz antike: Postolar reže kožu arbelosom. Na zidu je još jedan arbelos, čekić i cipele,...

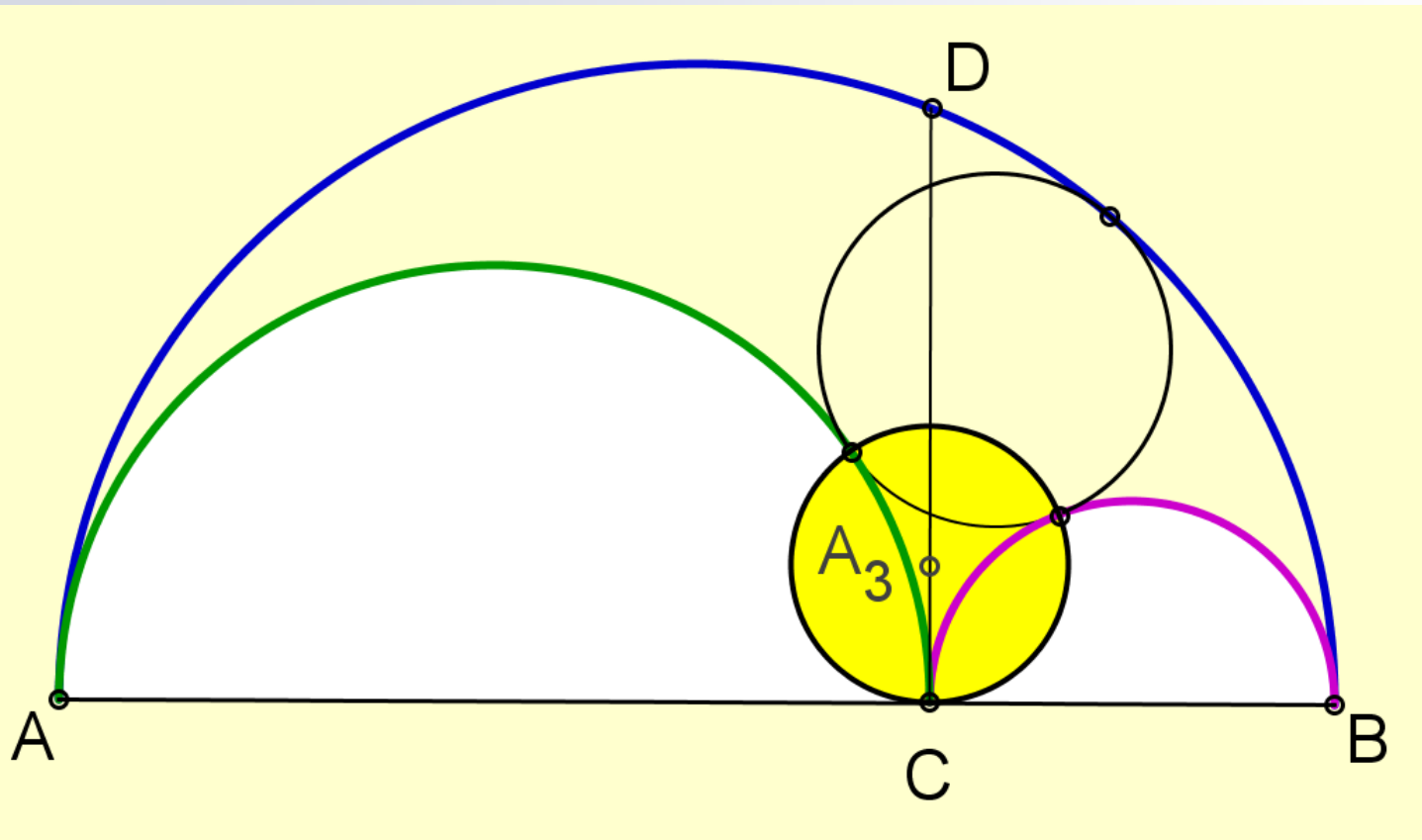


Arbelos nije izgubio svoju vrijednost kao alat, ni u srednjem vijeku, pa čak ni u moderno doba.

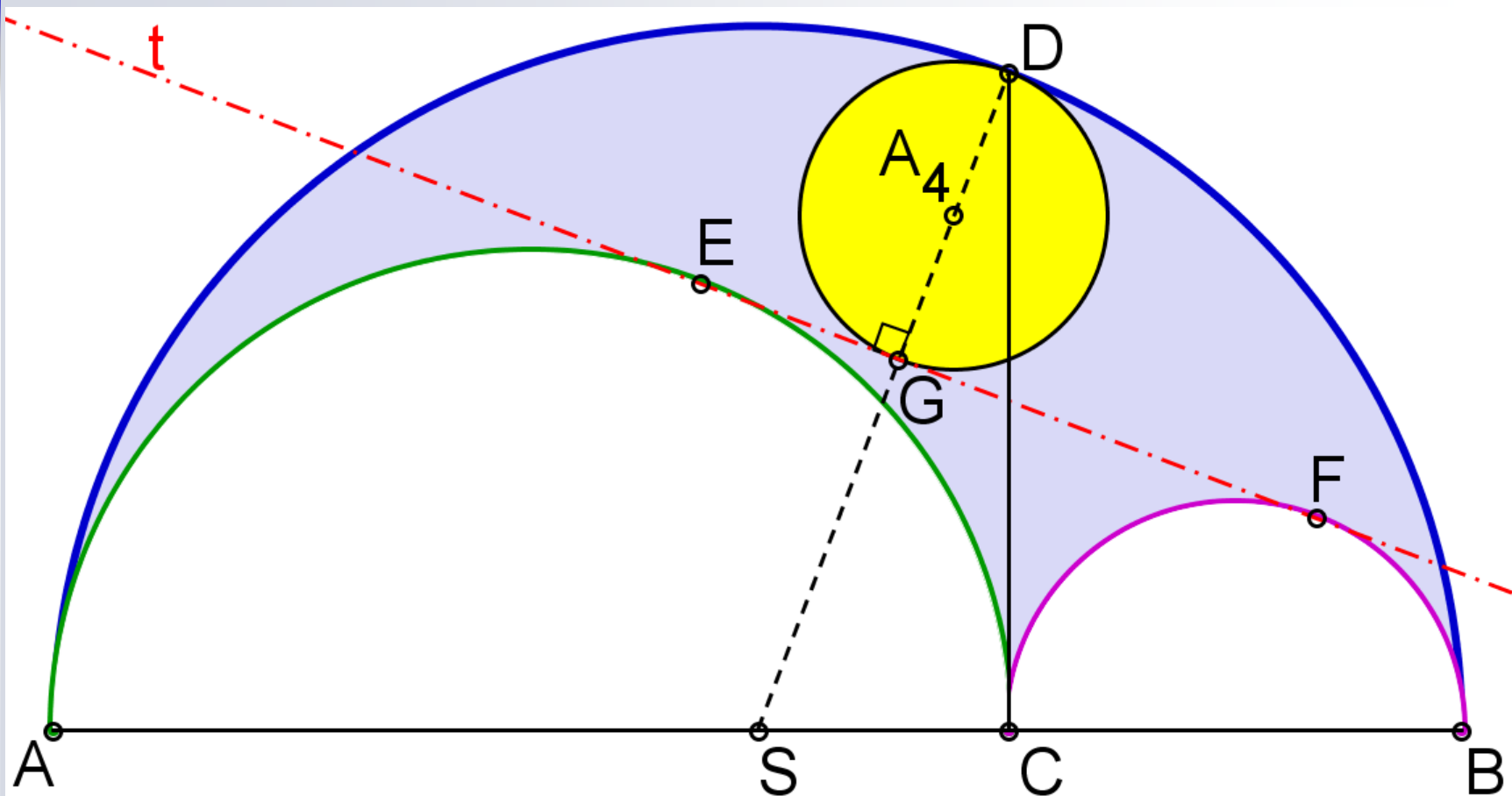
Ali ni zanimanje matematičara...

Nakon 2200 godina Arhimedove kružnice su potakle velik interes za proučavanje arbelosa.

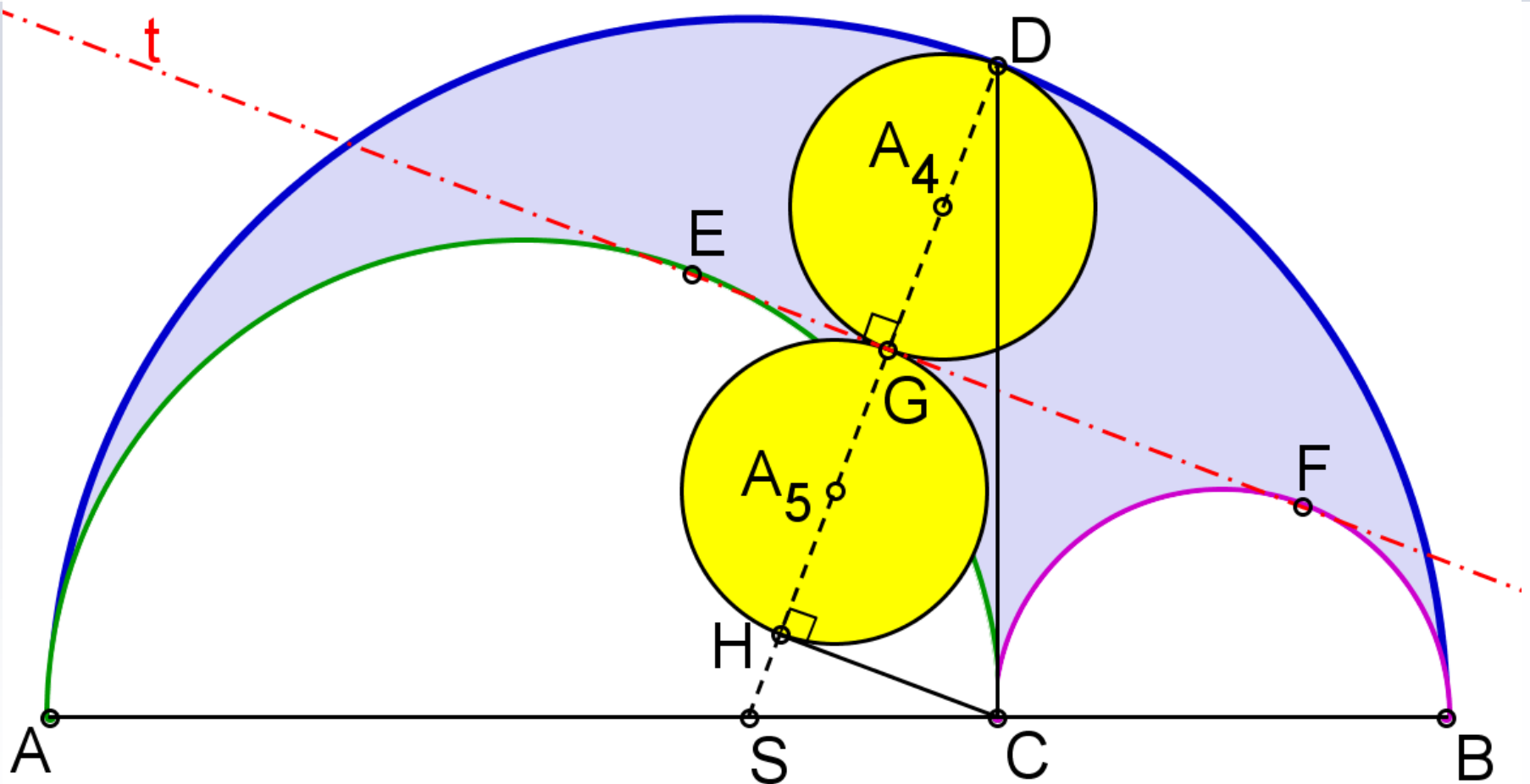
Leon Bankoff (1908.-1997. *američki stomatolog i matematičar amater*), 1974. godine otkriva treću Arhimedovu kružnicu.



Uskoro Bankoff otkriva četvrtu Arhimedovu kružnicu.

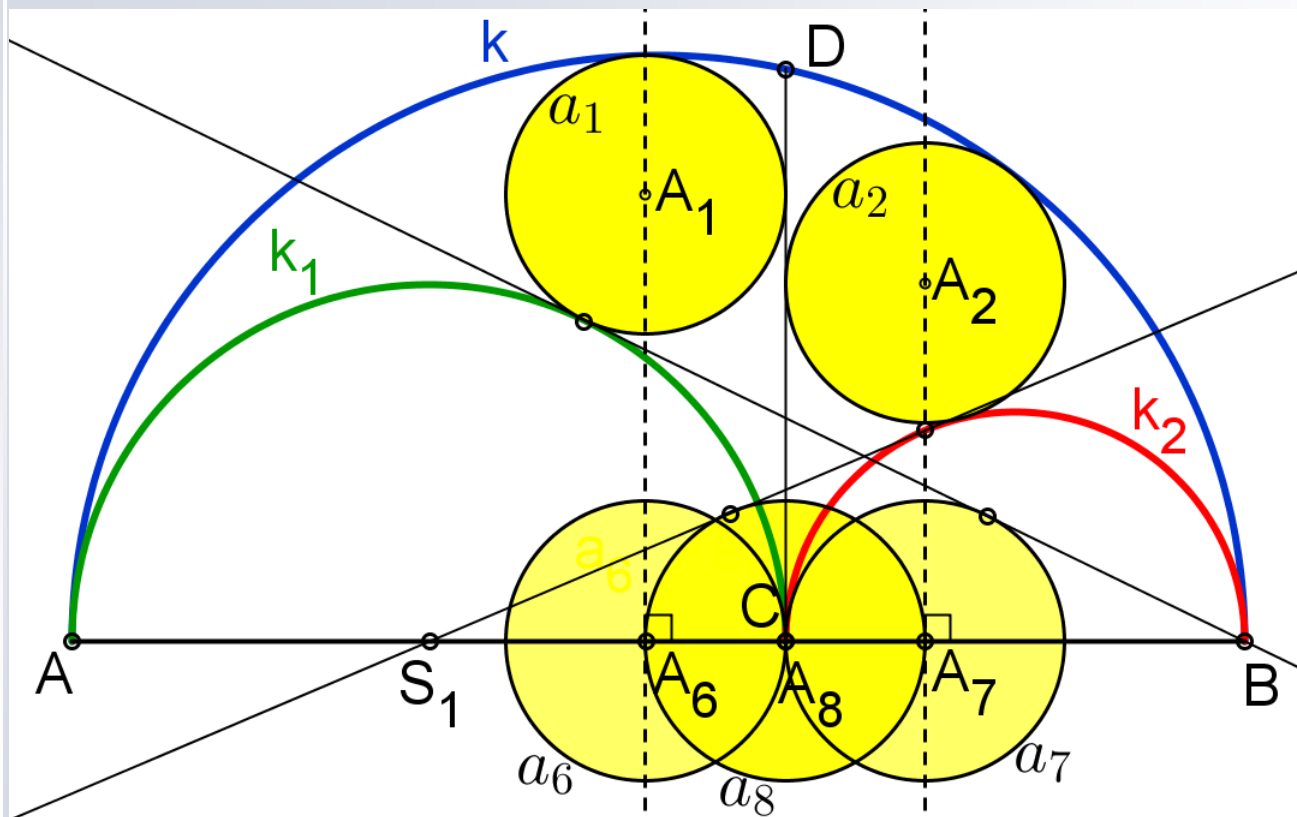


Clayton Dodge otkriva petu Arhimedovu kružnicu.
Ubrzo iza toga pronašao je još 10 Arhimedovih
kružnica.

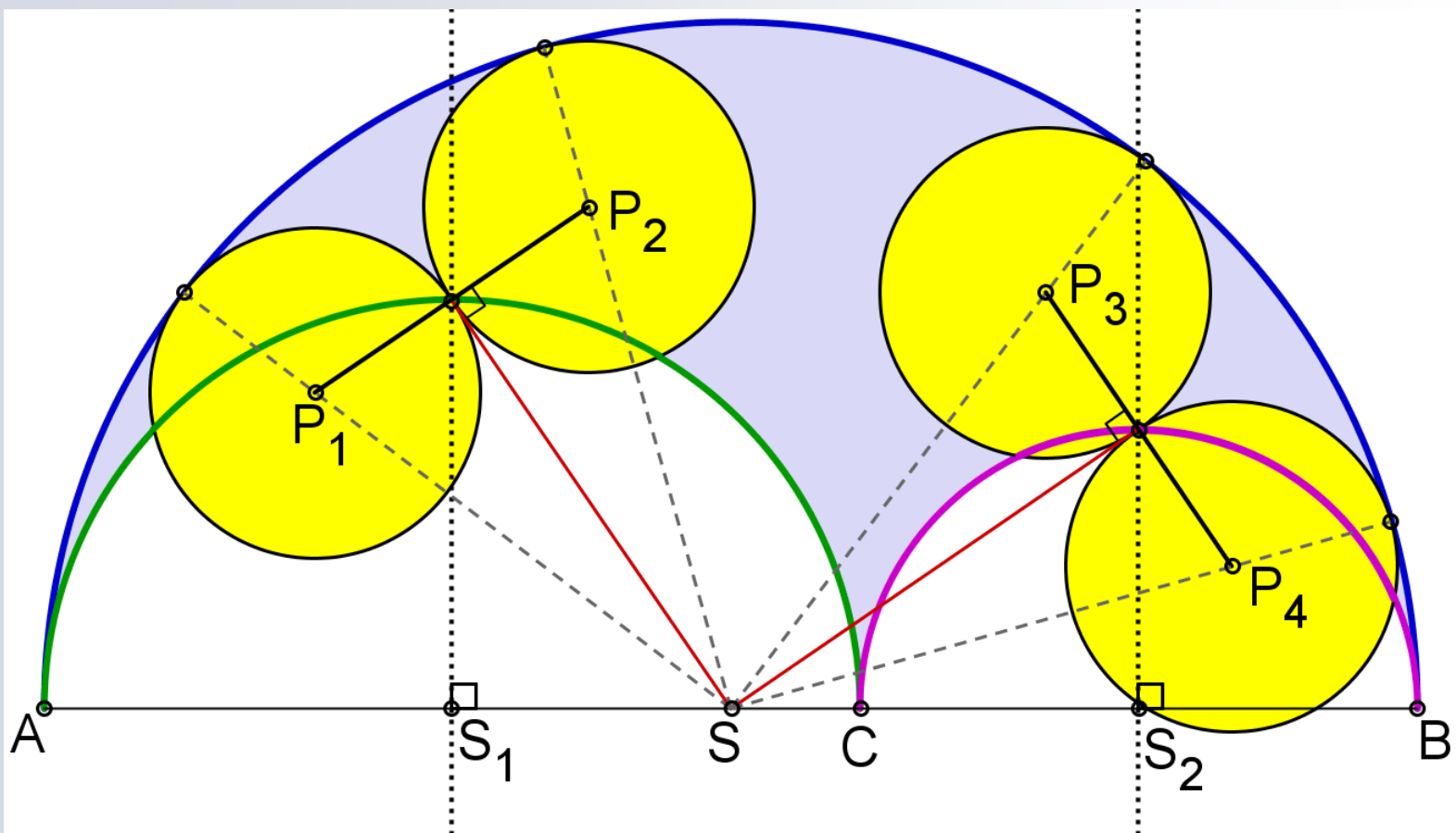


Tri kružnice koje je otkrio Dodge i Arhimedove blizance povezuje zanimljivo svojstvo:

Zajednička tangenta polukružnice k_1 i Arhimedove kružnice a_7 prolazi kroz točku B. Zajednička tangenta polukružnice k_2 i Arhimedove kružnice a_8 prolazi kroz središte kružnice k_1 .

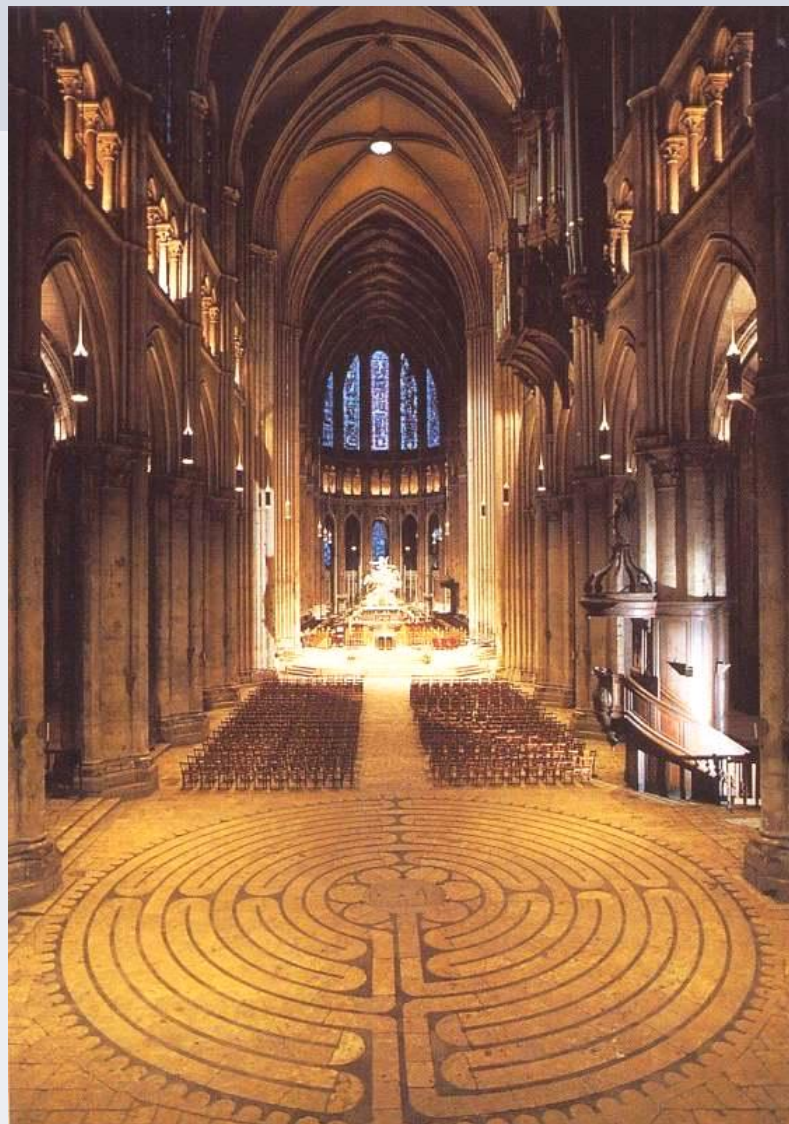
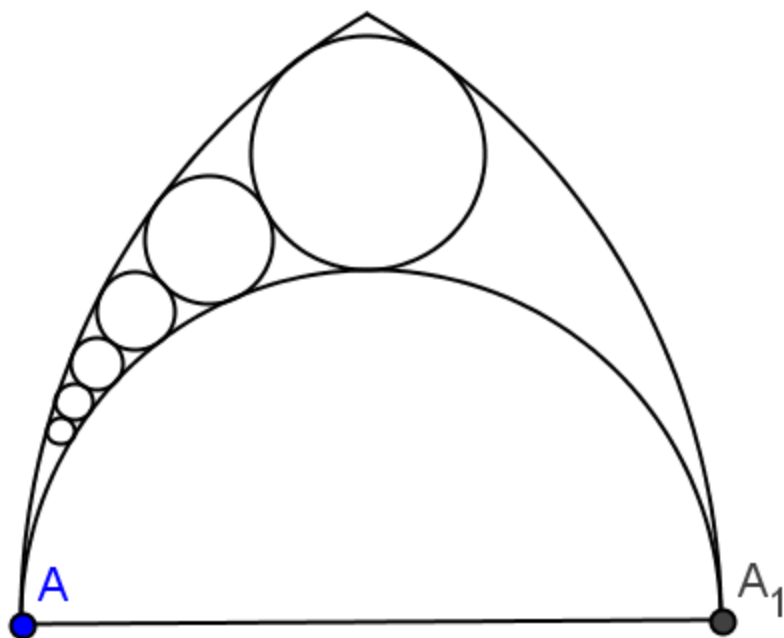


Frank Power je 1998. i 2005. godine otkrio četiri Arhimedove kružnice.



- **Peter Y. Woo** (*američki matematičar, profesor na Sveučilištu Biola*) je 1999. i 2001. godine pronašao beskonačno mnogo Arhimedovih kružnica sa središtima na Schochovom pravcu.
- **Zvonko Čerin** 2004. godine objavljuje rad o zlatnom rezu u arbelosu.
- **Paul Yiu** (*američki matematičar, profesor na Sveučilištu u Floridi*), 2005. godine objavljuje članak o novim kružnicama.
- **Floor Van Lamoen** (*nizozemski matematičar*) objavljuje 2006. i 2007. godine članke u kojima navodi niz novih Arhimedovih kružnica.
- **Hiroshi Okumura i Masayuki Watanabe** (*japanski matematičari, profesori na Maebashi Institute of Technology* u člancima objavljenim 2004. i 2006. godine, generalizacijom postojećih Arhimedovih kružnica, otkrivaju nizove novih kružnica.
-

Arbelos u umjetnosti - gotički (gotski) luk.



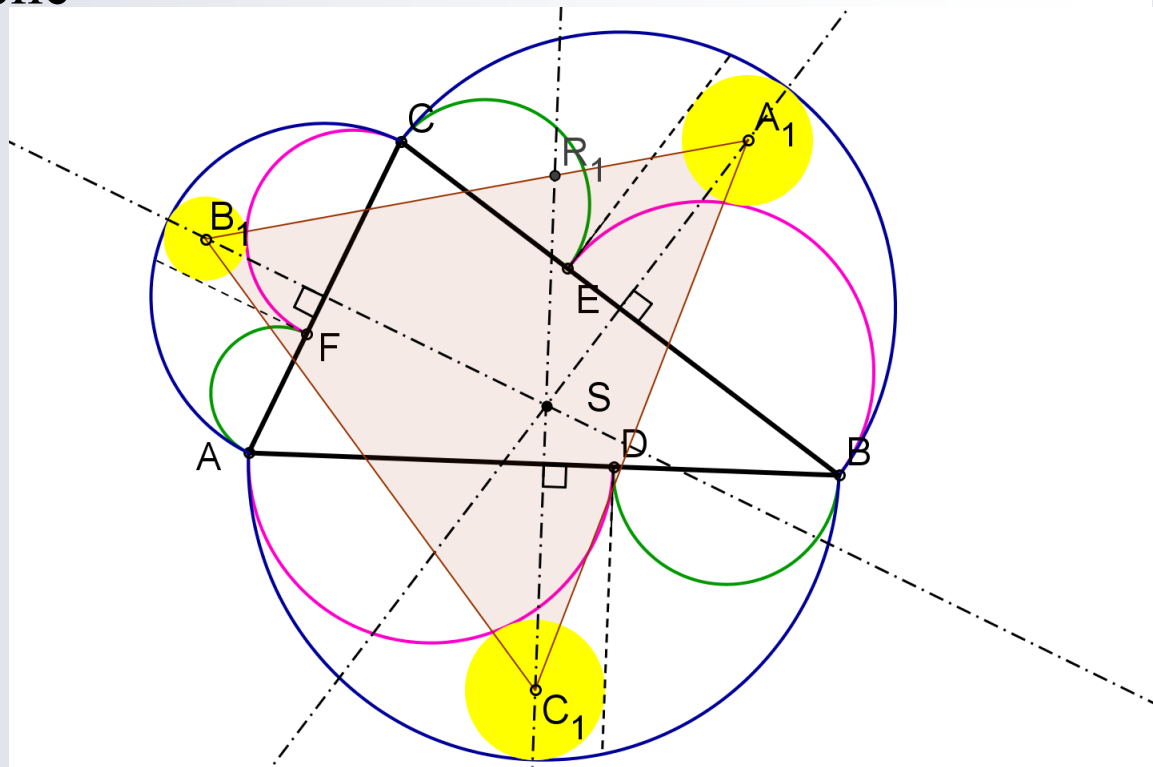
Arbelos će i dalje privlačiti pozornost profesionalnih matematičara i amatera, zaljubljenika u matematiku.



Apstraktna skulptura oblika arbelosa u Nizozemskoj.

ZLATNI REZ I ARBELOS

Neka su nad stranicama trokuta ABC konstruirana tri arbelosa i neka su A_1 , B_1 i C_1 središta “desnih” Arhimedovih kružnica arbelosa nad stranicama \overline{BC} , \overline{AC} i \overline{AB} . Točke E , F i D dijele stranice \overline{BC} , \overline{AC} i \overline{AB} u zlatnom omjeru ako i samo ako su trokuti ABC i $A_1B_1C_1$ ortogonalni, tj. ako se okomice spuštene iz vrhova A_1 , B_1 i C_1 na stranice \overline{BC} , \overline{AC} i \overline{AB} , sijeku u jednoj točki S .



2. SKRIVENO ZLATO KEOPSOVE PIRAMIDE

Grčki povjesničar i pisac Herodot (484. – 424. g. pr. Kr.)



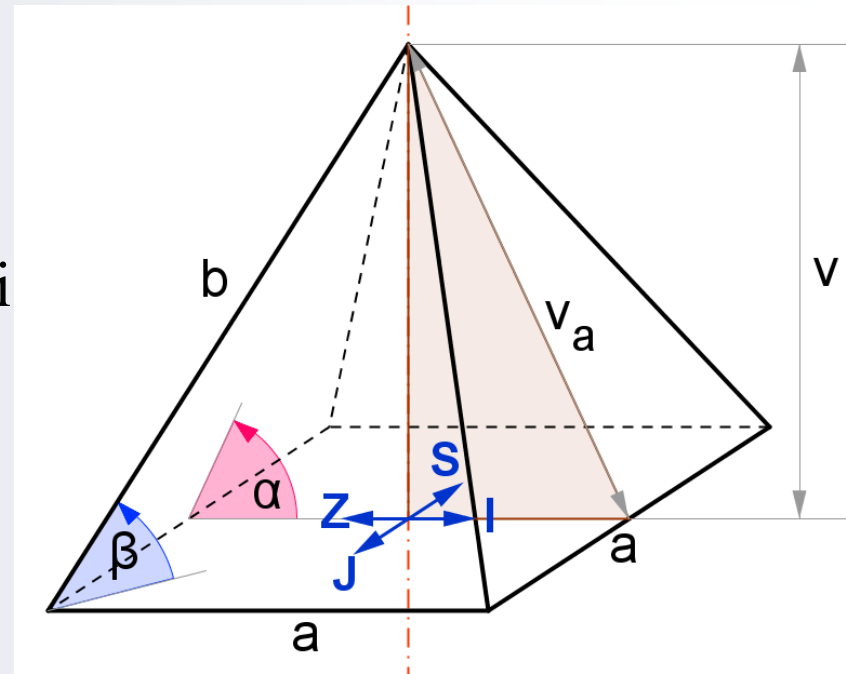
tijekom boravka u Egiptu oko 440. g. pr. Kr. iz razgovora sa svećenicima iz Heliopolisa (sjeveroistočni dio današnjeg Kaira) saznao je i zapisao:

„Jedan egipatski svećenik govoreći o obliku Keopsove piramide spomenuo mi je da je kvadrat nad njezinom visinom jednak površini bočnog trokuta.“

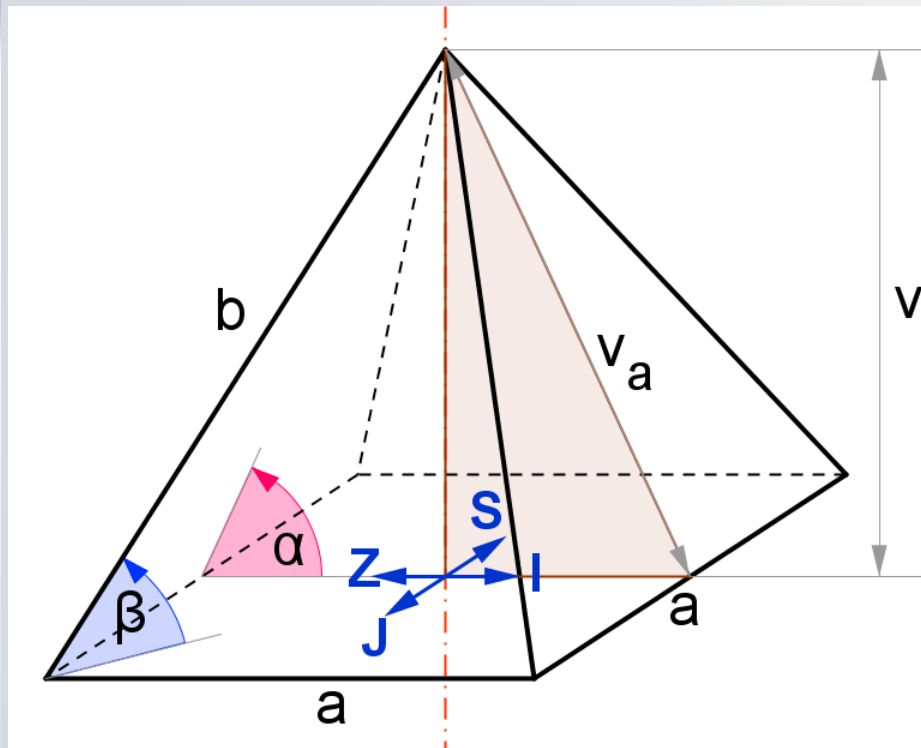
Na osnovu Herodotovog zapisa možemo postaviti sljedeći zadatak:

Pravilna uspravna četverostrana piramida ima osnovni brid duljine a . Kvadrat njezine visine jednak je površini pobočke.

- a) Odredi duljinu visine pobočke
- b) Odredi duljinu visine piramide
- c) Odredi duljinu bočnog brida
- d) Odredi kut što ga sa ravninom osnovke zatvaraju bočni bridovi
- e) Odredi kut što ga sa ravninom osnovke zatvaraju pobočke.



Rješenja:



$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033989...$$

$$a) \quad v_a = \frac{a}{2} \varphi$$

$$b) \quad v = \frac{a}{2} \sqrt{\varphi}$$

$$c) \quad b = \frac{a}{2} \sqrt{\varphi + 2}$$

$$d) \quad \alpha = \arctg \sqrt{\varphi}$$

$$e) \quad \beta = \arctg \sqrt{\frac{\varphi}{2}}$$

Herodotovu tvrdnju možemo zapisati ovako:

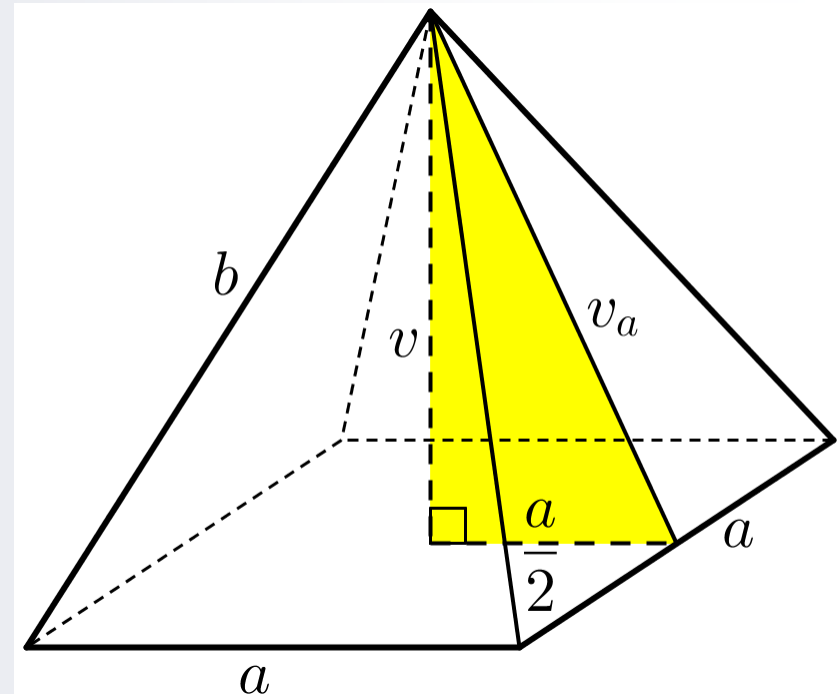
$$v^2 = \frac{a}{2} v_a.$$

$$v_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = v^2 \Rightarrow v_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a}{2} v_a \Rightarrow v_a^2 - \frac{a}{2} v_a - \frac{a}{4} = 0$$

Pozitivno rješenje ove kvadratne jednačbe je $v_a = \frac{a}{2} \varphi$.

$$\frac{v_a}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi.$$

Omjer visine pobočke i polovine osnovnog brida jednak je zlatnom rezu.



Je li svećenik iz Heliopolisa govorio istinu?

MINISTRY OF FINANCE, EGYPT.

Survey of Egypt.

**Determination of the Exact
Size and Orientation of the
Great Pyramid of Giza.**

By

J. H. COLE B.A., (Cantab) F.R.G.S
Inspector, Computation Office.

SURVEY OF EGYPT PAPER No. 39.

Government Press, Cairo, 1925.

To be obtained, either directly or through any Bookseller, from
the GOVERNMENT PUBLICATIONS OFFICE, Ministry of Finance
(Dawakin P.O.), Cairo.

Price - - - - P.T. 10.

ES

Britanski topograf J. H. Cole, utemeljitelj modernog sustava triangulacije u Egiptu, je sa svojim geodetskim timom izvodio višegodišnja opsežna mjerenja Velikih piramida u Gizi. Nakon dovršenja tog ogromnog posla, objavio je u Kairu 1925. godine u svome radu „*Survey of Egypt, Paper No. 39*”, rezultate od kojih se jedan mali dio nalazi u tablici koja slijedi.

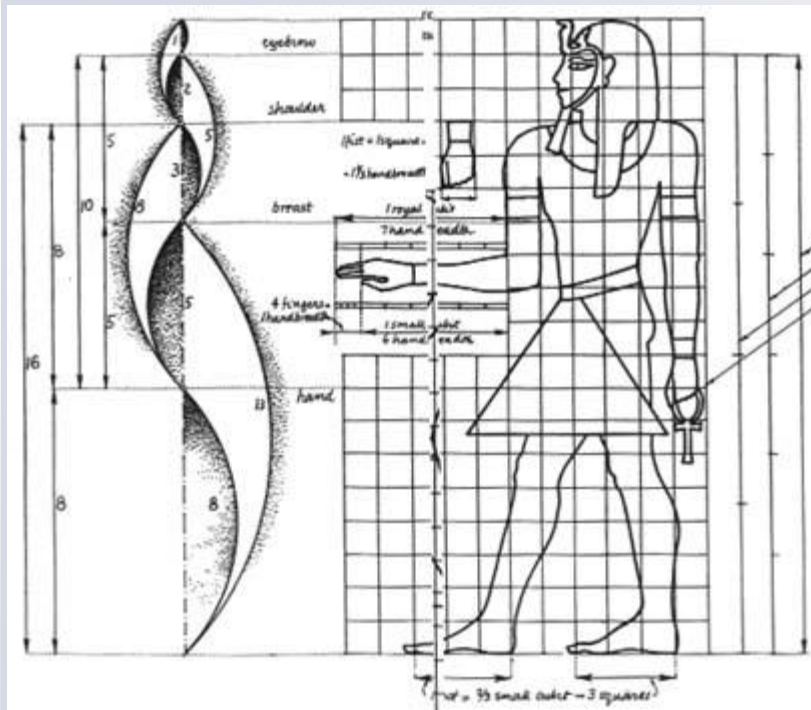
Prva stranica Coleove studije

Da li je svećenik iz Heliopolisa govorio istinu?

Veličina	Podaci koje je mjeranjem dobio J. H. Cole	Rezultati koji proizlaze iz Herodotovog zapisa
a – duljina osnovnog brida	$230.36\,m \pm 0.02\,m$	
v – visina piramide	$146.72\,m \pm 0.22\,m$	
v_a – visina pobočke	$186.53\,m \pm 0.02\,m$	
$\frac{v_a}{\frac{a}{2}}$	1.6194545	$\varphi = 1.6180339\dots$
α – kut između pobočke i baze	$51^\circ 52' 00'' \pm 2''$	$\alpha = 51^\circ 49' 38''$

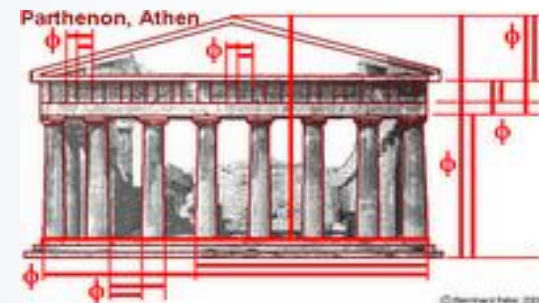
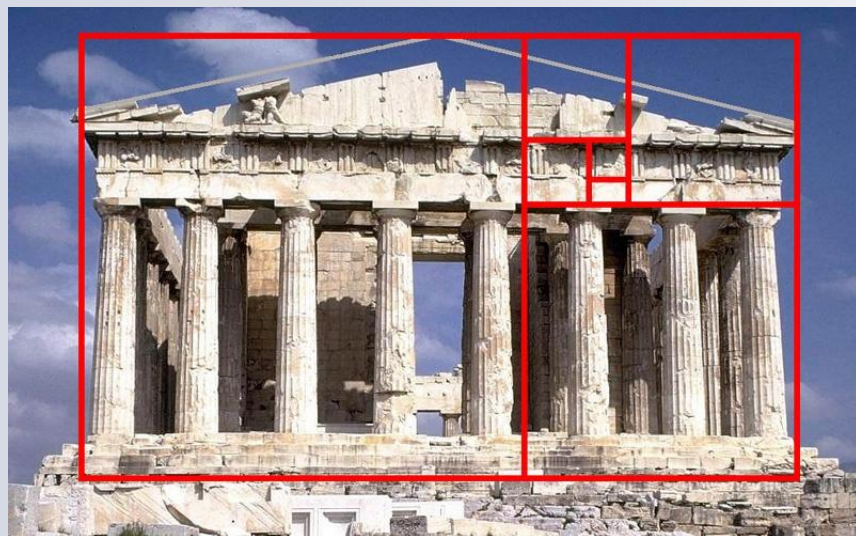
Staroegipatski artefakti sa zlatnim rezom

Mnoge studije povjesničara umjetnosti ukazuju na to da su stari Egipćani osim u građevinarstvu, koristili zlatni rez u slikarstvu i kiparstvu.



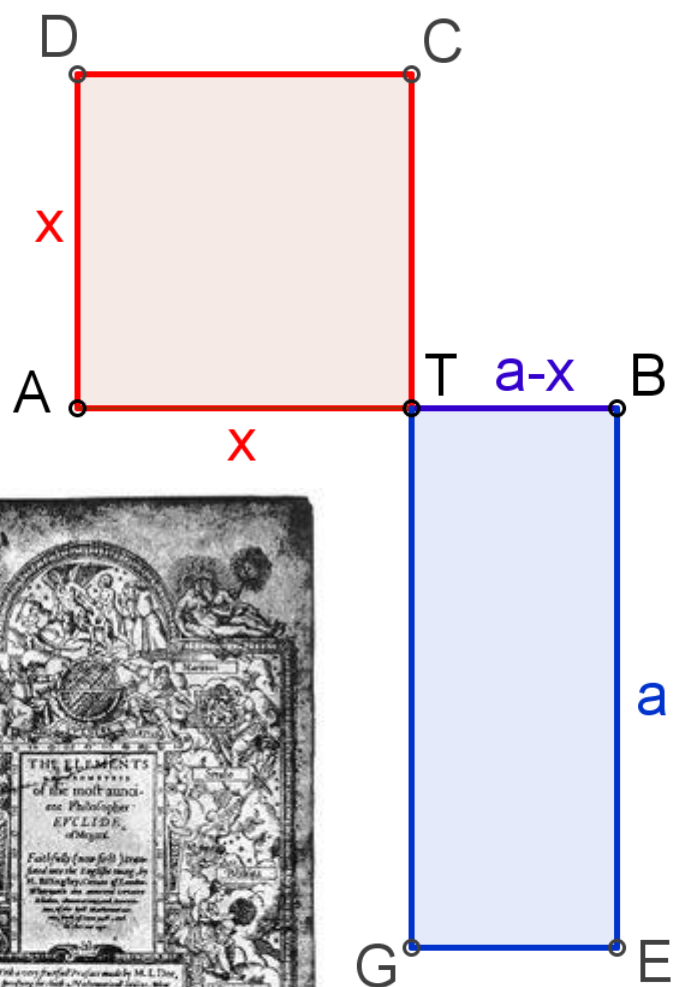
Zlatni rezovi u proporcijama egipatskih likova.

Je li zlatni rez iz umjetnosti došao
u matematiku ili obratno?



Iktin (*Iktinos*),
Kalikrat (*Callicrates*)
Fidija (*Pheidias*):
Partenon (*Djevičin hram*)
448. - 438. g. pr. Kr.

3. GDJE SE PRVI PUT SPOMINJE ZLATNI REZ



Propozicija 11. iz II. knjige Euklidovih „*Elementa*“ glasi:
„Danu dužinu podijeliti tako da pravokutnik obuhvaćen cijelom dužinom i jednim odsječkom, bude jednak kvadratu na drugom odsječku.“

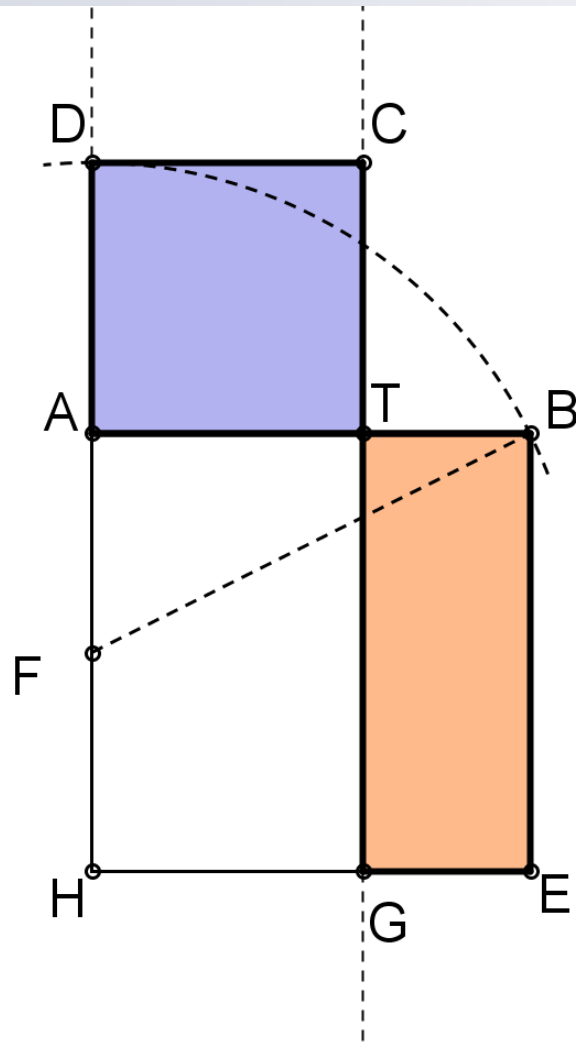
$$a(a - x) = x^2$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} a$$

$$\frac{|AT|}{|BT|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Euklidova konstrukcija zlatnog reza



EUKLIDOVA DEFINICIJA

- U *Elementima*, knjiga VI. def. 3. Euklid podjelu dužine po zlatnom rezu naziva „...dijeljenje dužine u krajnjem i srednjem omjeru” (gr. *ἀκρὸν καὶ μέσων λόγον*) i „neprekidna podjela dužine.”
 - Fra Luca Pacioli (1446. – 1510.) tiskao u Veneciji 1509. djelo „*De divina proportione*” koje je imalo veliki utjecaj i nakon kojeg zlatni rez doživljava pravu renesansu. U njemu opisuje harmonijska svojstva „**božanskog omjera**” ili „**božanske proporcije**”. Knjigu je ilustrirao Leonardo da Vinci.
 - Martin Ohm 1835. g. u drugom izdanju udžbenika „*Die reine Elementar-Mathematik*” („Čista elementarna matematika”) prvi put koristi termin zlatni rez.
 - Oznaku φ je 1909. g. predložio američki matematičar Mark Barr u čast slavnog starogrčkog kiparu Fidiji (Phidias, gr. Φειδίας 480. - 430. g. pr. Kr.). Rjeđe se za oznaku koristi slovo τ , kao prvo slovo riječi što znači *rez*.

Euklidova propozicija interpretirana na suvremenom matematičkom jeziku glasi: *Ako dužinu \overline{AB} njezina točka T dijeli na dva dijela, tako da se cijela dužina \overline{AB} odnosi prema većem dijelu \overline{AT} , kao što se taj veći dio \overline{AT} odnosi prema ostatku \overline{BT} dužine \overline{AB} , onda kažemo da točka T dijeli dužinu \overline{AB} u zlatnom rezu.*



$$|AB|:|AT|=|AT|:|BT| \Rightarrow a:x=x:(a-x)$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow |AT| = x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}a$$

$$\frac{|AT|}{|BT|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

$$|BT| = a - x = a - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}a$$

Pravilna petokraka zvijezda - pentagram, koristi se od davnina pa do danas kao magijski simbol, tajna lozinka, amblem, grb ... Pitagorejci su ga koristili kao simbol bratstava.



*Mezopotamija
2700. g. pr. Kr.*



Babilon 900. g. pr. Kr.



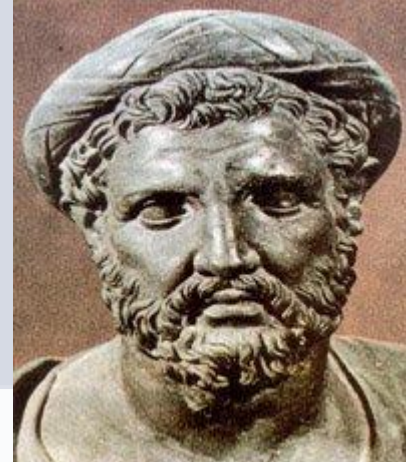
Mysia 400. g. pr. Kr.



Grčka 300. g. pr. Kr.

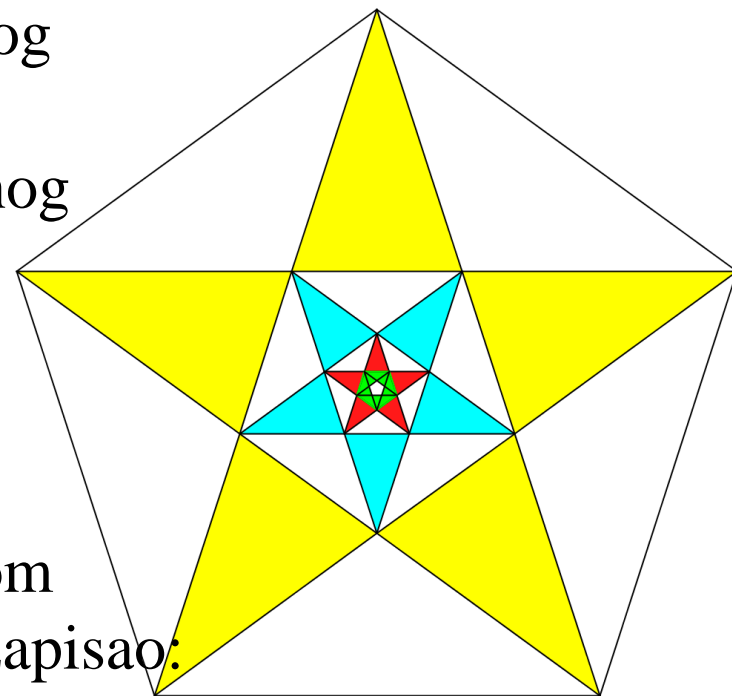
Neki autori navode da su nesumjerljive dužine otkrivene pri proučavanju svojstava pentagrama i pravilnog peterokuta, tj. da je prvi otkriveni iracionalni broj upravo zlatni rez.

4. TAJNO ZLATO PITAGORINOG BRATSTVA

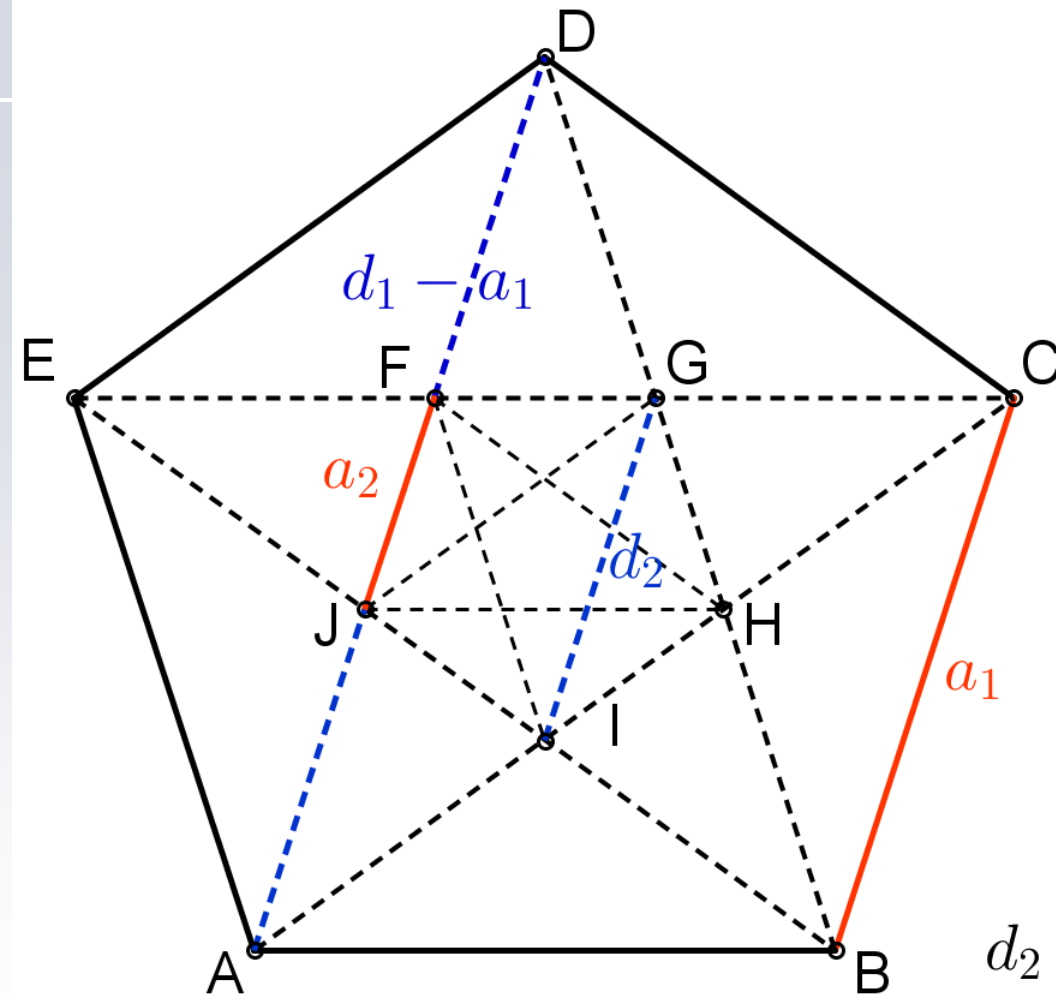


Hipas iz Metaponta, rani pitagorejac (oko 500. god. pr. Kr.) dolazi do jednog od najvažnijih otkrića u matematici: dijagonala i stranica kvadrata (pravilnog peterokuta ???) su *nesumjerljive* (*inkomensurabilne*) dužine.

Jamblih iz Halkide u Kalesiriji (oko 245. - 325.) - neoplatonist, u svom „Zborniku pitagorejskih učenja” je zapisao:
„Hipas se utopio jer je neposvećenim odao tajnu bratstva o nesumerljivosti dijagonale i stranice ... ”



PRED ČIM SU PITAGOREJCI USTUKNULI ?



$$|AF| = |BC| = a_1$$

$$d_1 - a_1 = |FD|$$

$$d_1 - a_1 = d_2 = |IG|$$

$$a_2 = |AF| - |AJ|$$

$$a_2 = a_1 - d_2$$

$$d_2 - a_2 = ??? \text{ ponovo}$$

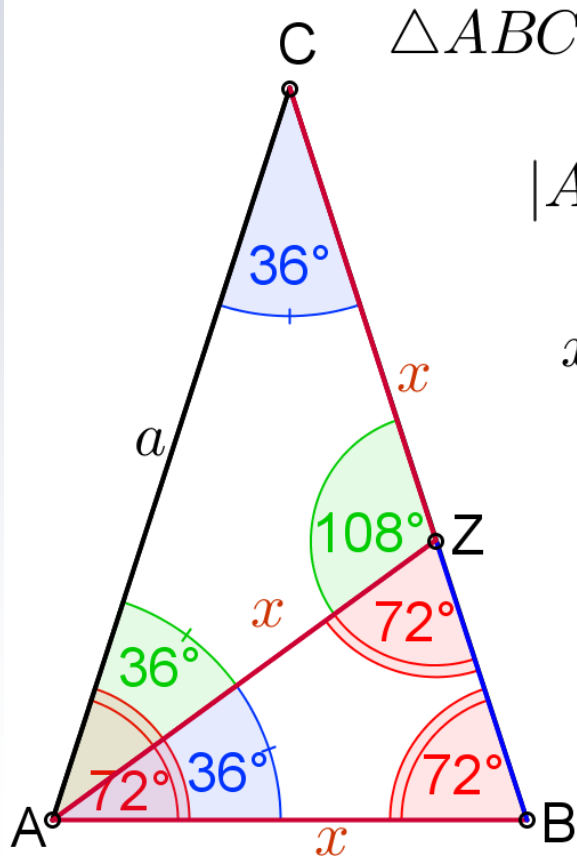
razlika dijagonale i stranice



ZLATNI TROKUT

Jednakokrani trokut čiji su kutovi 36° , 72° i 72° zovemo *zlatni trokut*.

Njegova je osnovica sukladna zlatnom rezu kraka.



$$\triangle ABC \sim \triangle BZA \implies |CB| : |AB| = |AB| : |BZ|$$

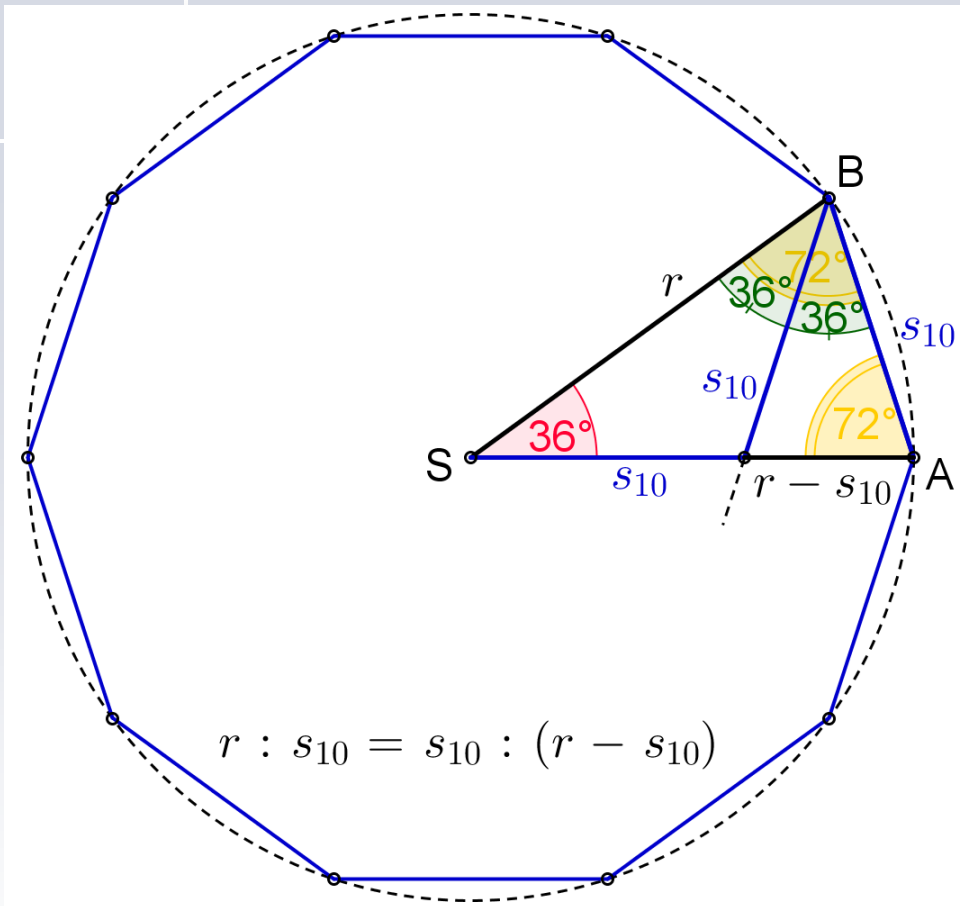
$$|AB| = |CZ| \implies |CB| : |CZ| = |CZ| : |ZB|$$

$$x : a = (a - x) : x \implies x^2 + ax - a^2 = 0$$

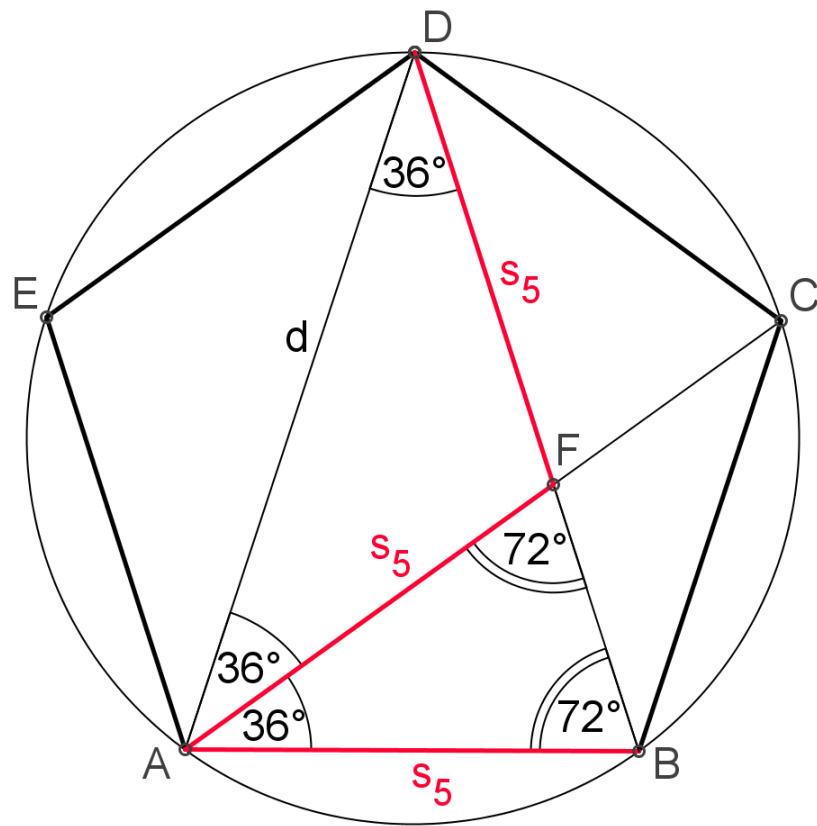
$$x = |AB| = |CZ| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$$

$$\frac{|CB|}{|CZ|} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

ZLATNI REZ I KONSTRUKCIJE PRAVILNOG PETEROKUTA I PRAVILNOG DESETEROKUTA

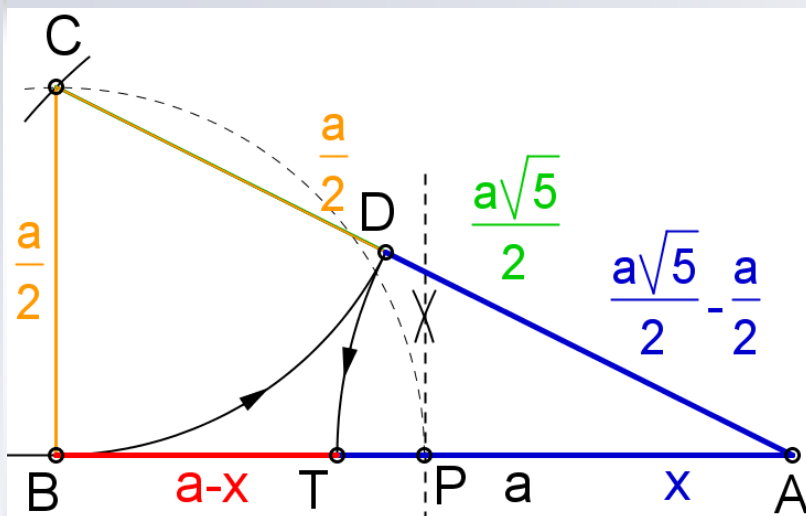


Stranica pravilnog deseterokuta,
jednaka je zlatnom rezu polumjera,
njemu opisane kružnice.



Dijagonale pravilnog peterokuta
sijeku se u točki koja ih dijeli u
zlatnom rezu. Zlatni rez
dijagonale jednak je stranici.

Heronova konstrukcija zlatnog reza



U pravokutnom trokutu u kojem je jedna kateta dvostruko dulja od druge, zlatni rez dulje katete jednak je razlici hipotenuze i kraće katete.

5. NESTANDARDNE KONSTRUKCIJE PRAVILNOG PETEROKUTA I PRAVILNOG DESETEROKUTA

