

Wythoffova igra, primjer igre za proširenje analize igara i uvođenje Grundyjeve funkcije

Ratko Višak, Križevci

11. travnja 2013.

Sažetak

Primjer igre kod koje nakon otkrivanja pobjedničke strategije analiziramo tablicu pobjedničkih pozicija.

1 Uvod

U prošlogodišnjem predavanju obrađene su igre kod kojih se do pobjedničke strategije dolazi analizom ispisanog niza i otkrivanjem periodičnosti. Predavanje je tiskano u zborniku radova petog kongresa nastavnika matematike.

2 Wythoffova igra

Na stolu su dvije hrpe kamenčića. Dva igrača igraju igru tako da igrač na potezu može iz jedne hrpe uzeti koliko želi, najmanje 1 pa do čitave hrpe, ili iz obje jednak broj kamenčića, također obavezno barem po 1. Pobjednik je onaj igrač koji isprazni stol.

Rješenje:

Zapišimo brojeve kamenčića na hrpama kao uređene parove (x, y) .

Oznake za pobjedničke pozicije igrača na potezu su S a za gubitničke P , i svaki potez iz P pozicije je u S poziciju dok za S poziciju uvijek postoji potez u P poziciju. Tako je $(0, 0)$ P pozicija dok su $(0, 1)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$ S pozicije, općenito su $(0, n)$, $(n, 0)$ i (n, n) S pozicije jer igrač na potezu iz obje hrpe može maknut jednak broj kamenčića i tako pobijediti.

Pozicija $(1, 2)$ je P pozicija jer svaki potez vodi u neku od ranije nabrojanih S pozicija.

Relacija pridruživanja pozicije uređenom paru je simetrična npr. $(2, 1)$ je također P pozicija, u daljnjem tekstu kao i u tablici nećemo isticati oba para. Svaka pozicija $(n-1, n)$ za $n \geq 3$ je P pozicija. Prvih nekoliko P pozicija odredimo izravno i one su upisane u tablicu na idućoj strani.

U tablici je upisano nekoliko najnižih P pozicija:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x(n)$	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19
$y(n)$	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31

Iz tablice vidimo da je x_n najmanji prirodan broj koji se još nije pojavio u nizu x_i niti u nizu y_i , za $i = 1, 2, \dots, n-1$, i da je $y_n = x_n + n$.

Crtajući točke (n, x_n) u koordinatnoj ravnini dobiva se $x_n \approx \phi n$, tada je $y_n \approx \phi(n+1)$.

Dobiva se da je $\phi \approx 1.6$, precizno $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Za izračunavanje P pozicija dobiva se elegantna formula:

$$x_n = \lfloor \phi n \rfloor \text{ i } y_n = \lfloor \phi(n+1) \rfloor.$$

To su dva komplementarna niza jer im koeficijenti $\alpha = \phi$ i $\beta = \phi + 1$ zadovoljavaju uvjet:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Budući da je $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Fidijin broj zlatnog reza, primjenom jednadžbe zlatnog reza $\phi^2 = \phi + 1$ slijedi gornji uvjet za komplementarnost.

Iz dobivene analize slijede uvjeti koje smo postavili na nizove x_n i y_n , tj. $(x_n, y_n) = (\lfloor \phi n \rfloor, \lfloor \phi^2 n \rfloor)$, ovako definirane uređene parove zovemo *Wythoffovi parovi*.

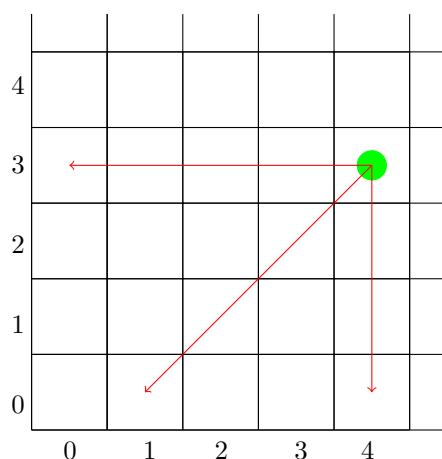
U sljedećoj tablici parovima su pridružena slova pozicija, *Wythoffovi parovi*, tj. P pozicije su istaknute.

11	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
10	N	N	N	N	N	N	P	N	N	N	N	N	N
9	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
8	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
7	N	N	N	N	P	N	N	N	N	N	N	N	N
6	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	P	N	N
5	N	N	N	P	N	N	N	N	N	N	N	N	N
4	N	N	N	N	N	N	N	P	N	N	N	N	N
3	N	N	N	N	N	P	N	N	N	N	N	N	N
2	N	P	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
1	N	N	P	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
0	P	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
y/x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

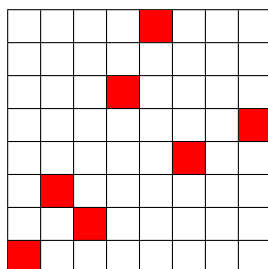
3 Wythoffova igra na šahovskoj ploči

Neka je dana beskonačna šahovska ploča s poljima numeriranim kao na slici. Igrač na potezu može figuru pomicati lijevo, dolje i dijagonalno lijevo-dolje.

Pobjednik je onaj koji stavi figuru u lijevi donji kut, tj. na polje $(0, 0)$. Koordinate polja odgovaraju broju kamenčića na hrpama, a potezi su oduzimanje kamenčića s hrpe, lijevo s prve, dolje s druge i dijagonalno s obje. Na sljedećoj slici prikazani su dopušteni smjerovi poteza iz neke pozicije, duljina poteza je proizvoljna, a najmanje mora biti pomak za 1.



Slika obične šahovske ploče 8×8 s istaknutim P-pozicijama, za igrača na potezu koji zna strategiju, bijela polja su pobjednička.



4 Svojstva Whythoffovih parova

U tablici s Wythoffovim parovima, $(\lfloor \phi n \rfloor, \lfloor \phi^2 n \rfloor)$, uočimo svojstva koja su prikazana u sljedeće dvije tablice.

n	Δx_n	n	Δx_n
0	1	7	1
1	2	8	2
2	1	9	2
3	2	10	1
4	2	11	2
5	1	12	2
6	2	13	1

n	Δy_n	n	Δy_n
0	2	7	2
1	3	8	3
2	2	9	3
3	3	10	2
4	3	11	3
5	2	12	3
6	3	13	2

U tablicama su upisane razlike dvaju uzastopnih članova nizova x_n i y_n , tj. $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ i $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$.

Preostala kasnije nabrojana svojstva nisu posebno prikazana, također ovdje nije dokazano niti jedno svojstvo. Dokazi se mogu postaviti kao zasebni zadaci.
Svojstva Wythoffovih parova:

1. $y_n - x_n = n$;
2. $x_{x_n+1} - x_{x_n} = 2$ i $x_{y_n+1} - x_{y_n} = 1$;
3. $y_{x_n+1} - y_{x_n} = 3$ i $y_{y_n+1} - y_{y_n} = 2$;
4. $x_n + y_n = x_{y_n}$;
5. $x_{x_n} + 1 = y_n$;
6. $x_n = 1 + \sum_{i=3}^k \delta_i F_i$, za $\delta_i \in \{0, 1\}$;
7. $y_n = 2 + \sum_{i=4}^m \delta_i F_i$, za $\delta_i \in \{0, 1\}$.

U 6. i 7. svojstvu brojevi F_i su Fibonaccijevi brojevi. Prema Zeckendorfovom teoremu ovaj prikaz je jedinstven.

5 Sprague-Grundyjeva funkcija

Popunjavajući tablicu, za sve uređene parove (x, y) brojeva iz skupa \mathbb{N}_0 , po pravilu da na mjesto (x, y) u tablicu upišemo najmanji broj iz skupa \mathbb{N}_0 koji se nije pojavio lijevo, ispod, niti dijagonalno lijevo-ispod mjesta (x, y) . Dobiva se ovako popunjene tablica:

12	12	13	14	15	11	9	16	17	18	19	7	8	10
11	11	9	10	7	12	14	2	13	17	6	18	15	8
10	10	11	9	8	13	12	0	15	16	17	14	18	7
9	9	10	11	12	8	7	13	14	15	16	17	6	19
8	8	6	7	10	1	2	5	3	4	15	16	17	18
7	7	8	6	9	0	1	4	5	3	14	15	13	17
6	6	7	8	1	9	10	3	4	5	13	0	2	16
5	5	3	4	0	6	8	10	1	2	7	12	14	9
4	4	5	3	2	7	6	9	0	1	8	13	12	11
3	3	4	5	6	2	0	1	9	10	12	8	7	15
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10	14
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9	13
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Označimo sa S skup brojeva koji su lijevo, ispod, i dijagonalno lijevo-ispod mjesta (x, y) .

Definiramo Sprague-Grundyjevu funkciju za mjesto (x, y) :

$$G(x, y) = \min\{\mathbb{N}_0 \setminus S\}.$$

U tablici je istaknuto mjesto $(8, 5)$ (potamnjena 2), crvenom su bojom istaknuti brojevi skupa S .

Iz prethodne definicije dobivamo broj tog mjesta, tj. to je vrijednost Sprague-Grundyjeve funkcije, $G(x, y) = 2$.

U tablici uočimo mjesta gdje je $G(x, y) = 0$, to je u P-pozicijama, tj. to su mjesta gdje su Wythoffovi parovi.