

Nives Jozić,
Dubrovnik, 3. travnja 2013.

Predavanje za mentore učenika natjecatelja srednjih škola

Uvod u izoperimetrijski problem u nastavi matematike

Izvorno, izoperimetrijski problem se naziva *Didonin problem*. Prema legendi, problem je nastao u vrijeme osnivanja grada Kartage na obali Sjeverne Afrike. Feničanka Didona, koja se u bijegu od samovolje brata Pigmaliona skrasila na obale Sjeverne Afrike, kupila je od kralja Jarbasa onoliko zemljišta koliko je mogla obuhvatiti kožom jednog bika. Na tom zemljištu izgrađena je Kartagina.

Matematička formulacija Didoninog problema glasi: **Od svih zatvorenih krivulja u ravnini jednake duljine, naći onu koja zatvara najveću površinu.**

Ovim problemom su se bavili brojni matematički umovi, među kojima se najčešće spominje **Steiner** (Jakob Steiner, 1796. – 1863.) koji je pokazao da od svih zatvorenih krivulja u ravnini, najveću površinu zatvara kružnica. No njegov dokaz nije u potpunosti korektan jer on dokazuje da za svaku krivulju koja nije kružnica, postoji druga krivulja koja zatvara strogo veću površinu. Ali, time ne dokazuje da je upravo kružnica ta koja zatvara najveću površinu.

Na temelju tog problema postavljena je izoperimetrijska nejednakost:

$$4\pi P \leq l^2$$

gdje je l duljina jednostavne zatvorene krivulje u ravnini, a P je ploština figure koju ta krivulja zatvara. Ova nejednakost čini jedan spoj geometrije, algebre i analize: problem je geometrijski, nejednakost je algebarska, a za dokaz se koristi analiza (realna, kompleksna: diferencijalni i integralni račun, Fourierovi redovi itd.). Jasno je da se ti sadržaji ne mogu u potpunosti obraditi u nastavi matematike srednje škole jer oni nemaju sva potrebna znanja, ali određeni sadržaji se ipak mogu obraditi.

Učenici, posebno oni koji pohađaju dodatnu nastavu matematike i sudjeluju na matematičkim najtecanjima, susreću se indirektno s tim problemom kroz različite vrste zadataka, ali bi bilo korisno učenike uvesti u širu priču unutar koje ti zadaci nastaju.

Tipični zadaci iz tog područja, među kojima su neki i s prethodnih natjecanja su:

1. U skupu pravokutnih trokuta kojima je zbroj duljina kateta d , odredi onaj: a) s najvećom površinom, b) s najkraćom hipotenuzom. (Rješenje: Najveću površinu ima jednakokrani pravokutni trokut, kada je i hipotenuza najkraća)
2. U zadani kvadrat ABCD upiši kvadrat EFGH najmanje površine. (Rješenje: Površina je najmanja kada su vrhovi u polovištima stranica polaznog kvadrata.)
3. U jednakokrani pravokutan trokut s katetom duljine 2 cm upisan je pravokutnik tako da mu je jedan vrh u vrhu pravog kuta trokuta. Koji od ovih pravokutnika ima najveću površinu? (Rješenje: Pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednake duljine, tj. kada je kvadrat.)
4. U jednakostraničan trokut stranice duljine a upisan je pravokutnik čija je jedna stranica na stranici trokuta, a ostala dva vrha pripadaju po jednoj od dviju ostalih stranica. Koji od tih pravokutnika ima najveću površinu? (Rješenje: Pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednake duljine, tj. kada je kvadrat.)
5. Žicu duljine d treba podijeliti na dva dijela, a zatim od jednog dijela oblikovati kvadrat stranice duljine a te pravokutnik duljina b i širine c tako da je duljina tri puta veća od širine. Gdje treba presjeći žicu tako da zbroj površina kvadrata i pravokutnika bude najmanji? (Rješenje: $a = 6d/56$, $c = 4d/56$)
6. Zadan je trapez opsega d , pri čemu su osnovice duljina a i c , a kutovi uz veću osnovicu trapeza iznose po 60° . Odredite duljine osnovica trapeza za koje će površina trapeza biti maksimalna. (Rješenje: $a = 3d/8$, $c = d/8$)

Prije rješavanja ovih vrsta zadataka, korisno je postaviti osnovnu priču kao uvod u izoperimetrijski problem, a zatim na temelju nje varirati odgovarajuće zadatke.

Izoperimetrijski problem se može formulirati geometrijski na sljedeći način: **Od svih likova jednakog opsega naći onaj koji ima najveću površinu.** Kako se u nastavi matematike najprije obrađuju geometrijski likovi trokut i četverokut, mogu se razmatrati dva nova problema:

1. Od svih trokuta jednakog opsega najveću površinu ima jednakostranični trokut.
2. Od svih četverokuta jednakog opsega najveću površinu ima kvadrat.

Nakon toga se mogu usporediti jednakostranični trokut i kvadrat i dokazati tvrdnju da kvadrat ima veću površinu od jednakostraničnog trokuta jednakog opsega.

Budući da učenici do srednje škole obrade i mnogokute, dalje se mogu razmatrati sljedeći problemi:

3. Od svih peterokuta jednakog opsega najveću površinu ima pravilni peterokut.

4. Među svim pravilnim n -terokutima najveću površinu ima onaj n -terokut koji ima više stranica.

Dalje naslućujemo da bi se problem nastavljao do postavljanja polazne formulacije izoperimetrijskog problema.

Ovdje će biti prikazani različiti pristupi u dokazivanju prvih dviju tvrdnji, a zatim rješavanje nekoliko zadataka primjenom različitih pristupa: geometrijski, algebarski i koristeći graf odgovarajuće funkcije.

Na jednom banalnom primjeru iz realnog života vidjet ćemo kako se poznavanje određenih činjenica izoperimetrijskog problema može primijeniti i u praksi.

Osim što se obradom ovih sadržaja učenici mogu upoznati s izoperimetrijskim problemom, ovi sadržaji su prikladni za samostalni istraživački rad učenika, zaključivanje kroz proces eksperimentiranja, povezivanje različitih matematičkih sadržaja u jednu funkcionalnu cjelinu, itd. Ishod toga su trajnija znanja usvojena s razumjevanjem što i jest jedan od važnijih ciljeva nastave matematike.