

DIJELJENJE TROKUTA NA JEDNAKE DIJELOVE I U ZADANOM OMJERU

Branko Škiljan

Dubrovnik, 3.4.2013.

OŠ „Podrute“, Novi Marof

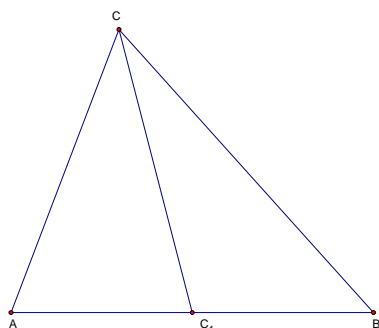
DIJELJENJE TROKUTA NA JEDNAKE DIJELOVE I U ZADANOM OMJERU

Dužine možemo podijeliti na jednake dijelove i u zadanom omjeru primjenjujući Talesov poučak o proporcionalnim dužinama. Koristeći, između ostalog i taj poučak, i trokute možemo podijeliti na dijelove (mnogokute) jednakih površina ili na dijelove čije su površine u zadanom omjeru, ili kraće na jednake dijelove i u zadanom omjeru.

Dijeljenje trokuta na dva jednaka dijela

Razmatrati ćemo četiri slučaja:

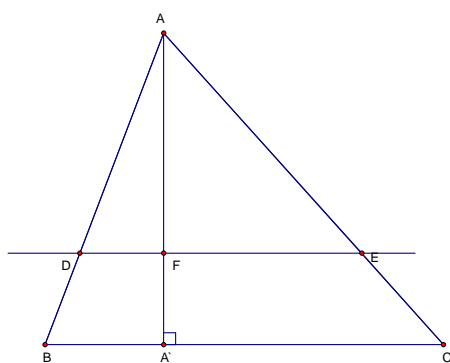
1 ° Podjela trokuta na dva jednaka dijela težišnicom



Točka C_1 je polovište stranice \overline{AB} , pa je $|AC_1| = |C_1B|$.

Trokuti AC_1C i C_1BC imaju zajedničku visinu iz vrha C i jednake duljine osnovica. Prema tome i jednake površine. Znači da težišnica trokuta dijeli taj trokut na dva jednaka dijela.

2 ° Podjela trokuta na dva jednaka dijela pravcem paralelnim s jednom stranicom



Pravac DE paralelan sa stranicom \overline{BC} dijeli taj trokut na sličan trokut DEA i trapez $BCED$.

Neka je dužina $\overline{AA'}$ visina trokuta ABC duljine v , a dužina \overline{AF} visina trokuta DEA .

Zbog sličnosti trokuta ABC i DEA vrijedi:

$$|AF| : |AA'| = k = \frac{m}{n} \Rightarrow |AF| = \frac{m}{n} v$$

$$|DE| : |BC| = k = \frac{m}{n} \Rightarrow |DE| = \frac{m}{n} a$$

Površine nastalih likova:

$$P_{\square ADE} = \frac{|AF| \cdot |DE|}{2} = \frac{\frac{m}{n} a \cdot \frac{m}{n} v}{2} = \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{av}{2}$$

$$P_{BCED} = \frac{|BC| + |DE|}{2} \cdot |A'F| = \frac{a + \frac{m}{n} a}{2} \cdot (v - \frac{m}{n} v) = \frac{an + am}{2n} \cdot \frac{vn - vm}{n} = \frac{a(n+m) \cdot v(n-m)}{2n^2} = \frac{n^2 - m^2}{2n^2} \cdot \frac{av}{2}$$

Kako su te dvije površine jednake, vrijedi:

$$\frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{av}{2} = \frac{n^2 - m^2}{n^2} \cdot \frac{av}{2} / : \frac{av}{2n^2}$$

$$m^2 = n^2 - m^2$$

$$n^2 = 2m^2$$

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{1}{2} / \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} = k$$

Znači da je koeficijent sličnosti ta dva trokuta $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pa se može konstruirati traženi paralelni pravac koji će zadani trokut podijeliti na dva jednaka dijela.

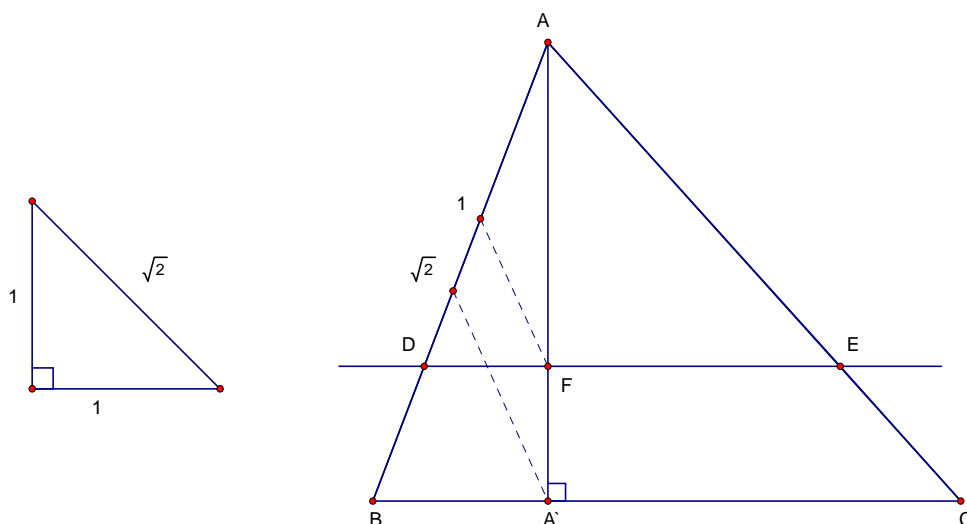
Do istog rezultata mogli smo doći koristeći činjenicu da se površine sličnih trokuta odnose kao kvadrati duljina odgovarajućih dužina, odnosno:

$$\frac{P_{\triangle ADE}}{P_{\triangle ABC}} = k^2, \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

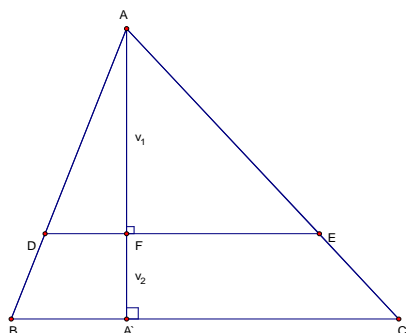
Konstrukcija:

Visinu $\overline{AA'}$ Podijelimo u omjeru $1 : \sqrt{2}$ tako da je $|AF| : |FA'| = 1 : \sqrt{2}$.

Točkom F konstruiramo okomicu na visinu $\overline{AA'}$. Pravac DE je traženo rješenje.



3° Podjela trokuta na dva jednaka dijela dužinom paralelnom sa jednom stranicom, a kojoj su rubne točke na ostale dvije stranice. Zadatak je odrediti veličinu te dužine.



Prema slici vrijedi:

a - duljina osnovice trokuta ABC

v - duljina visine na osnovicu a

x - duljina osnovice trokuta DEA

v_1 - duljina visine na osnovicu x

v_2 - duljina visine trapeza $BCED$

Kako je $P_{\square ABC} = P = P_{\square DEA} + P_{BCED}$ i $P_{\square DEA} = P_{BCED} = \frac{1}{2}P$ slijedi:

$$P_{\square ABC} = \frac{av}{2} = P \Rightarrow v = \frac{2P}{a}$$

$$P_{\square DEA} = \frac{xv_1}{2} = \frac{P}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{P}{x}$$

$$P_{BCED} = \frac{a+x}{2}v_2 = \frac{P}{2} \Rightarrow v_2 = \frac{P}{a+x}$$

$$v = v_1 + v_2$$

$$\frac{2P}{a} = \frac{P}{x} + \frac{P}{a+x}$$

$$2x(a+x) = a(a+x) + ax$$

$$2ax + 2x^2 = a^2 + ax + ax$$

$$2x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2}$$

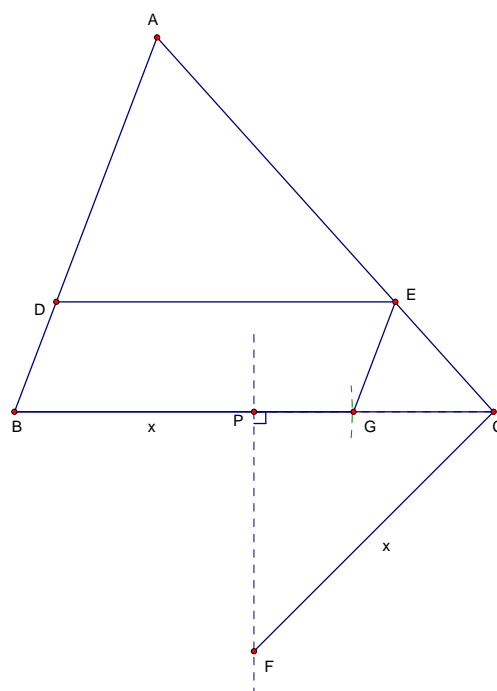
$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Iz dobivenog izraza je jasno da je duljina x tražene dužine \overline{DE} stranica kvadrata čija je dijagonala stranica \overline{BC} .

Konstrukcija:

1. Konstrukcija polovišta stranice \overline{BC} , točke P .
2. Konstrukcija točke F tako da je $|PC| = |PF|$.
3. Na stranici \overline{BC} određujemo točku G tako da je $|FC| = |BG|$.
4. Točkom G konstruiramo paralelu sa stranicom \overline{AB} . Presjek sa stranicom \overline{CA} je točka E .
5. Konstrukcija točke D tako da je $|GE| = |BD|$. Dužina \overline{DE} je tražena dužina.



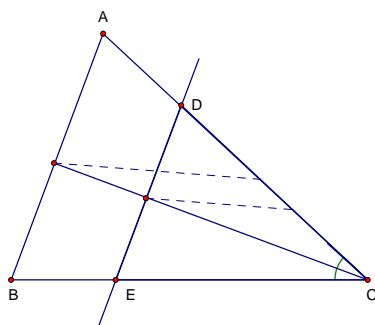
4° Podjela trokuta na dva jednaka dijela pravcem okomitim na jednu stranicu

a)

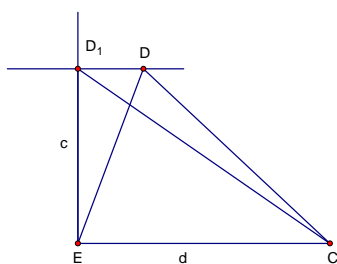
1. Na drugi ili treći način trokut ABC podijelimo na dva jednaka dijela.
2. Dobiveni sličan trokut pretvorimo u jednak pravokutan trokut.
3. Taj pravokutni trokut zatim pretvorimo u pravokutni trokut kome je jedan šiljasti kut iste veličine kao i zajednički šiljasti kut sličnih trokuta.

Pravac koji sadrži katetu nasuprot tog šiljastog kuta dijeli zadani trokut na dva jednaka dijela.

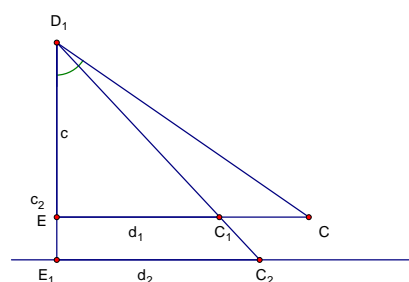
1.



2.



3.



Trokuti C_1D_1E i $C_2D_1E_1$ su slični s tim da je $P_{\square D_1EC} = P_{\square D_1E_1C_2}$. Zadatak je odrediti dužinu $\overline{D_1E_1}$ duljine c_2 kako bi uz poznati kut $\angle C_2D_1E_1 = \angle BCA$ konstruirali trokut $C_2D_1E_1$.

Vrijedi:

$$\square D_1EC_1 \sim \square D_1E_1C_2$$

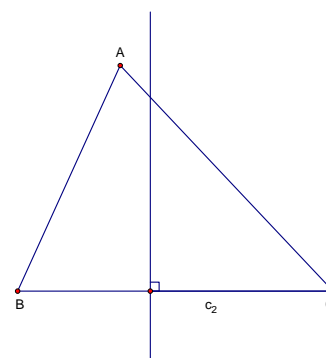
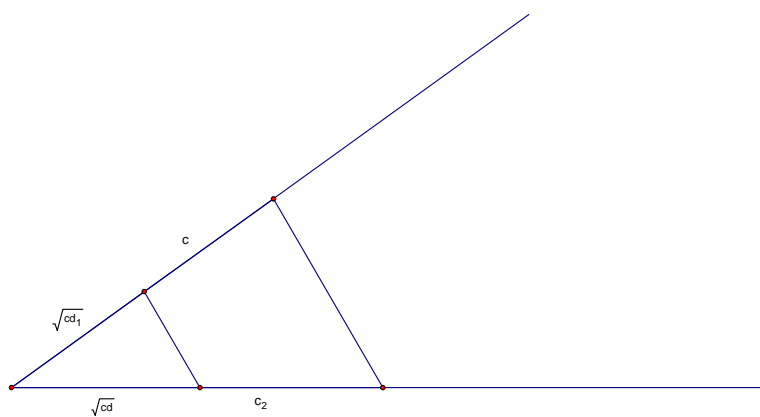
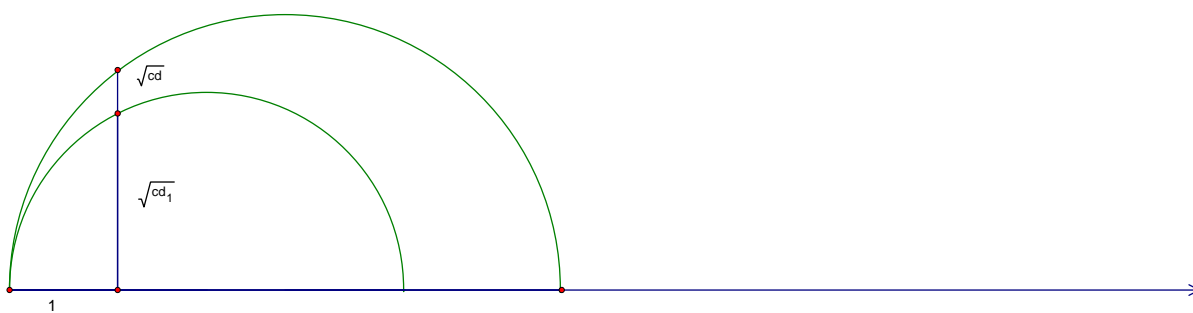
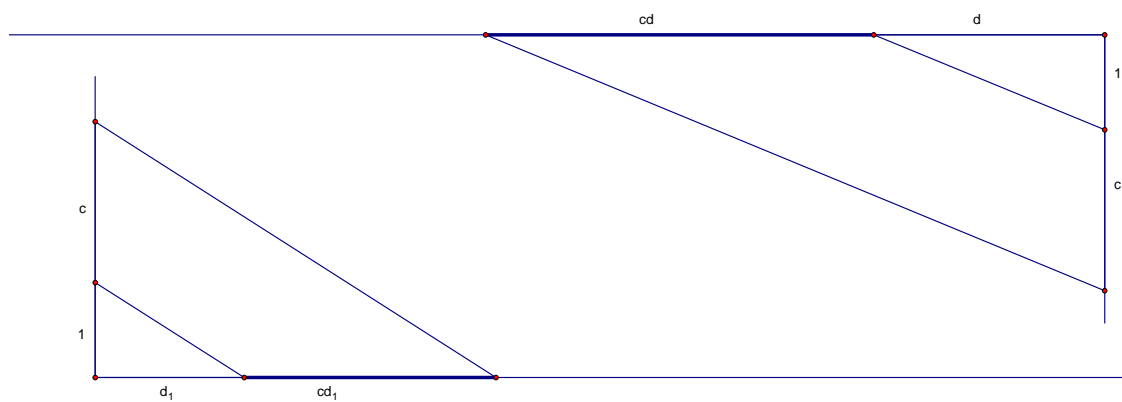
$$c : d_1 = c_2 : d_2 = k$$

$$P_{\square D_1EC_1} : P_{\square D_1E_1C_2} = \frac{cd_1}{2} : \frac{c_2d_2}{2} = cd_1 : c_2d_2 = k^2$$

$$\frac{\sqrt{cd_1}}{\sqrt{c_2d_2}} = k \quad c_2d_2 = cd \text{ jer je } P_{\square D_1E_1C_2} = P_{\square D_1EC}$$

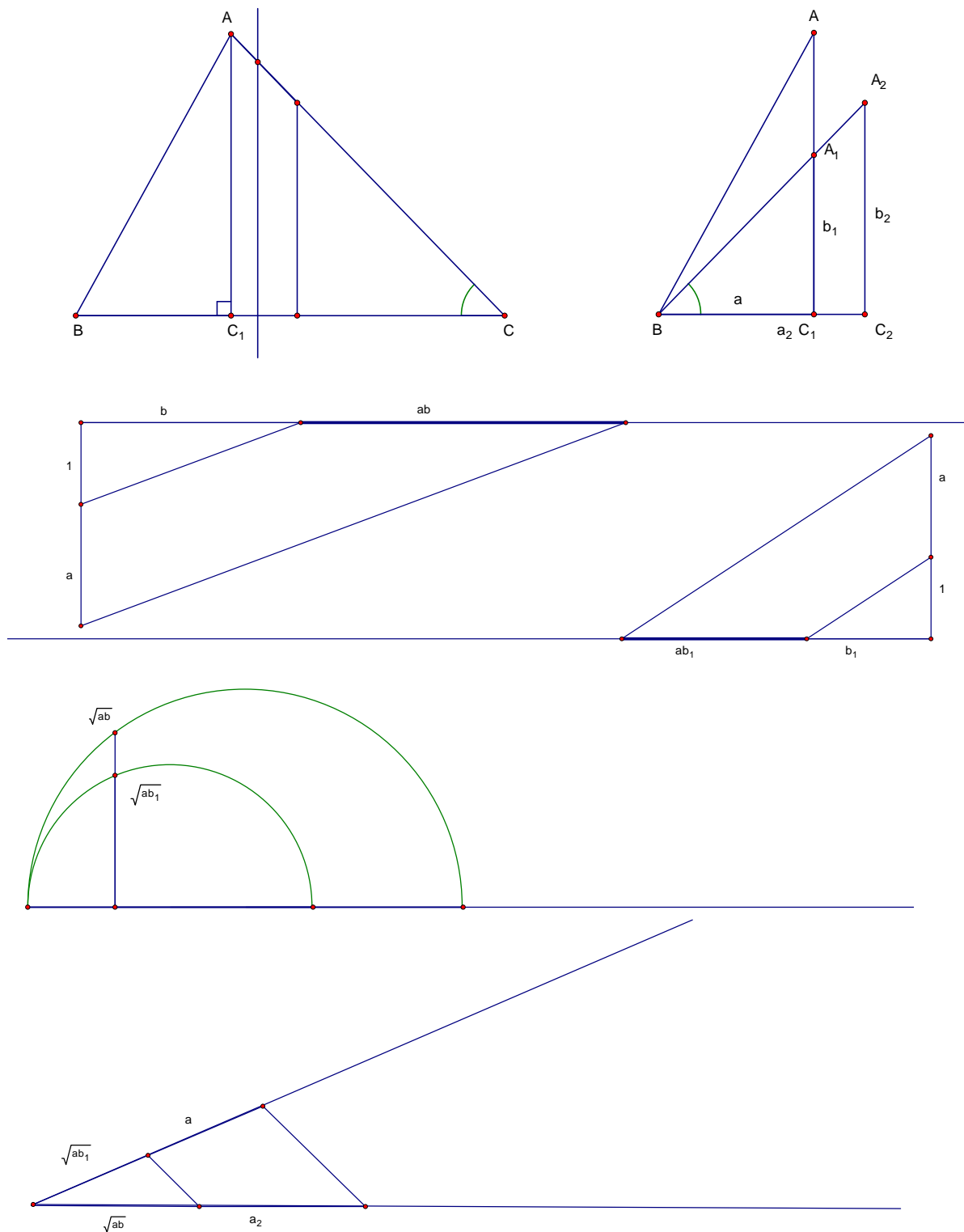
Potrebno je konstruirati cd_1 i c_2d_2 i $\sqrt{cd_1}$ i $\sqrt{c_2d_2}$, a zatim dužinu duljine c_2 .

Konstrukcija:

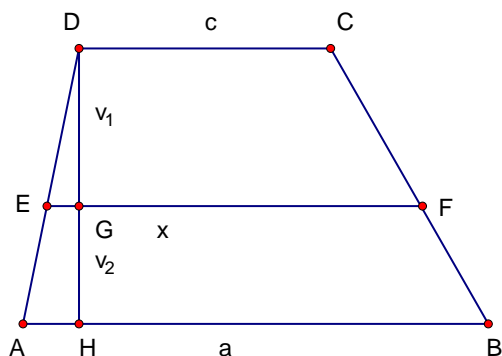


b)

1. Visinom iz jednog vrha podijelimo zadani trokut na dva pravokutna trokuta
2. Manji od ta dva trokuta pretvorimo u jednak pravokutni trokut sa šiljastim kutom većeg trokuta nasuprot povučenoj visini.
3. Trapez između ta dva trokuta dužinom paralelnom povučenoj visinom podijelimo na dva jednaka dijela.
Ta dužina dijeli zadani trokut na dva jednaka pravokutna trokuta.



Dijeljenje trapeza dužinom paralelnom osnovicama na dva jednaka dijela



Neka je: $|AB| = a$

$$|CD| = c$$

$$|EF| = x$$

$$|DG| = v_1$$

$$|GH| = v_2$$

$$|DH| = v$$

Prema uvjetima zadatka $P_{ABFE} = P_{EFCD} = \frac{P}{2}$

$$P_{ABCD} = P$$

$$P_{ABCD}$$

$$P = \frac{a+c}{2} v$$

$$v = \frac{2P}{a+c}$$

$$P_{ABFE}$$

$$\frac{P}{2} = \frac{a+x}{2} v_2$$

$$v_2 = \frac{P}{a+x}$$

$$P_{EFCD}$$

$$\frac{P}{2} = \frac{x+c}{2} v_1$$

$$v_1 = \frac{P}{x+c}$$

Vrijedi jednakost: $v = v_2 + v_1$

$$\frac{2P}{a+c} = \frac{P}{a+x} + \frac{P}{c+x} \quad / \cdot \frac{(a+c)(a+x)(x+c)}{P}$$

$$2(a+x)(x+c) = (a+c)(x+c) + (a+c)(a+x)$$

$$2ax + 2ac + 2x^2 + 2xc = ax + ac + cx + c^2 + a^2 + ax + ac + cx$$

$$2x^2 = a^2 + c^2$$

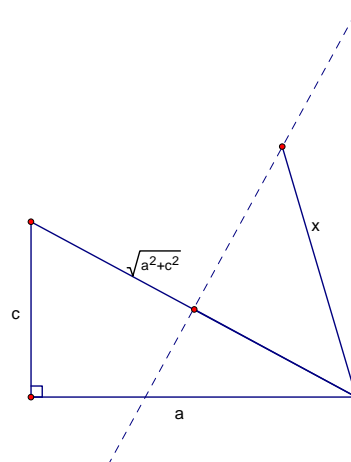
$$x^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$$

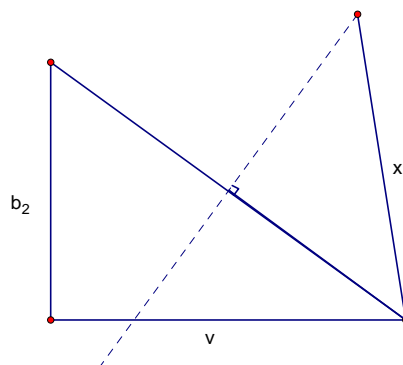
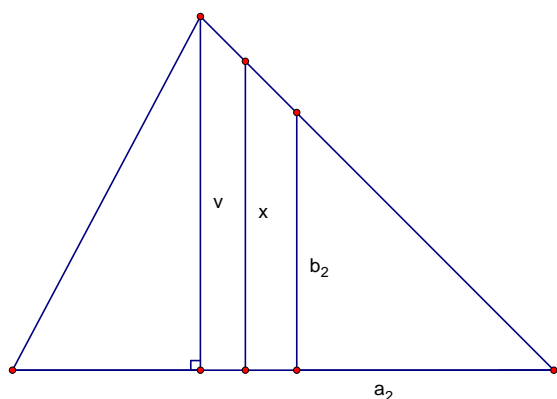
$$x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$$

Dužina \overline{EF} duljine x je kvadratna sredina duljina osnovica trapeza.

Konstrukcija dužine \overline{EF} :

1. Konstrukcija pravokutnog trokuta s katetama a i c.
2. Konstrukcija stranice kvadrata kome je dijagonala $\sqrt{a^2 + c^2}$
3. Konstrukcija dužine \overline{EF} zadanom trapezu.
3. Konstrukcija





Pomoću težišnica, okomitih i paralelnih pravaca ili dužina trokut možemo raspoloviti na devet različitih jednakih dijelova.

Za pretvaranje pravokutnog trokuta u pravokutni trokut jednake površine, a različitih šiljastih kutova možemo koristiti i graf funkcije obrnute proporcionalnosti.

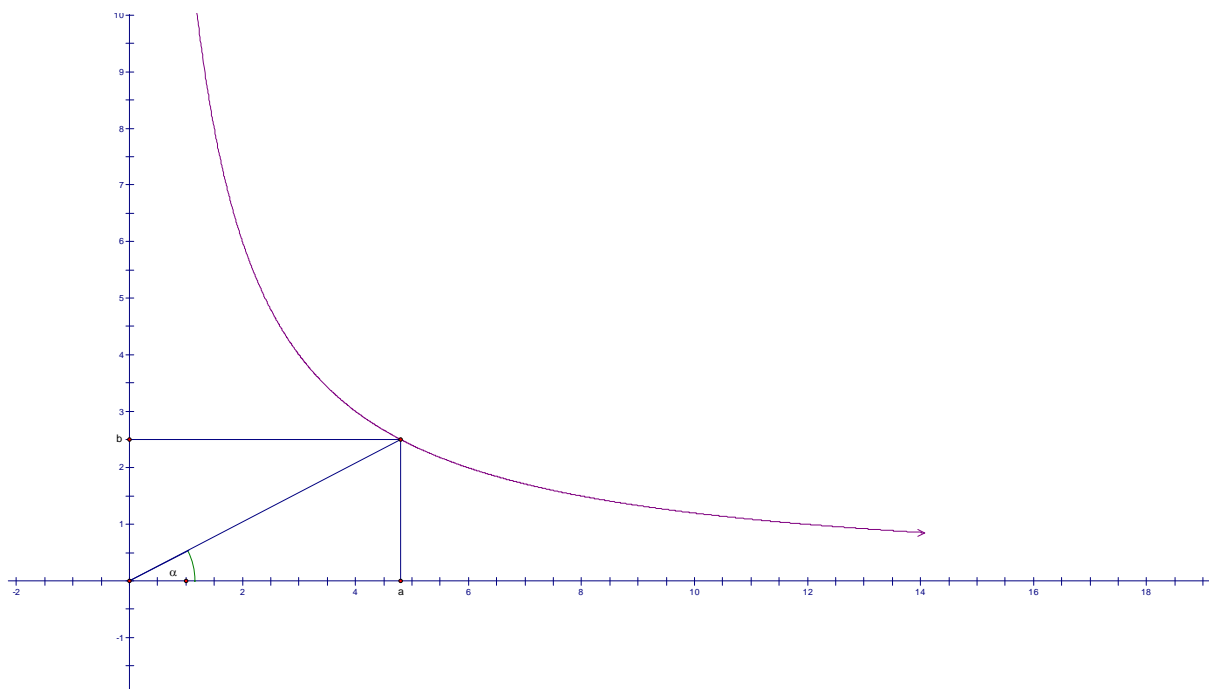
Primjer:

Površina P pravokutnog trokuta iznosi 6cm^2 .

Kako je $p = \frac{ab}{2}$ gdje su a i b duljine kateta.

$$y = f(x) = \frac{2P}{x}$$

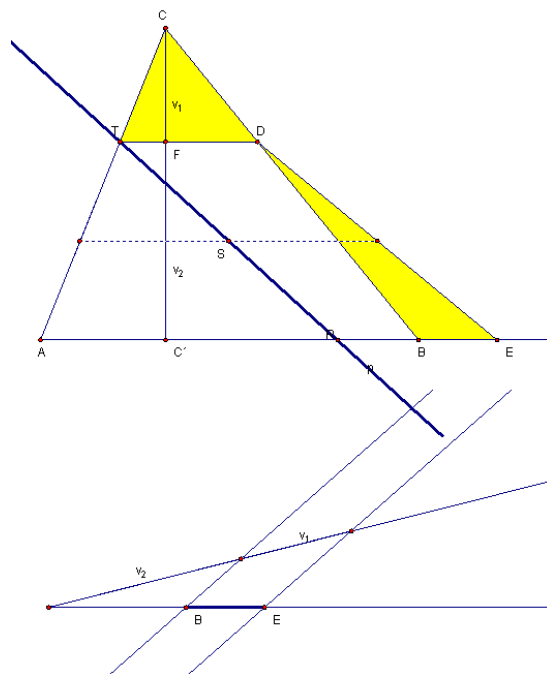
$$y = f(x) = \frac{12}{x}$$



Dijeljenje trokuta na dva jednaka dijela pravcem koji prolazi zadanom točkom na jednoj stranici

Prvo rješenje:

Točka T pripada stranici \overline{AC} trokuta ABC . Paralela točkom T sa stranicom \overline{AB} siječe stranicu \overline{BC} u točki D. Na stranici \overline{AB} odredimo točku E tako da je $P_{\square BED} = P_{\square TDC}$. Na taj način je trokut ABC pretvoren u trapez $AEDT$. Točka S je polovište srednjice tog trapeza, a pravac TS je traženo rješenje.



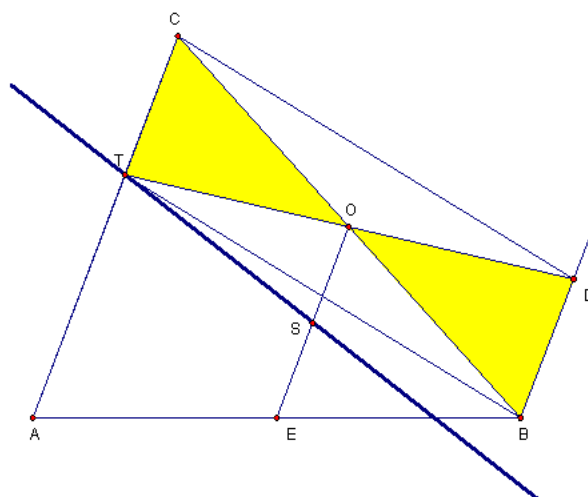
Konstrukcija točke E:

Kako je $P_{\square TDC} = P_{\square BED}$ prema slici vrijedi:

$$|C'F| : |FC| = |TD| : |BE|$$

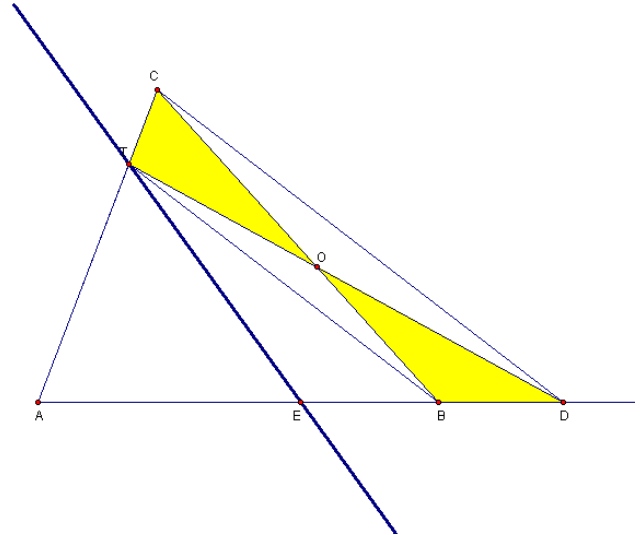
Drugo rješenje:

Vrhom D povučemo pravac paralelan s pravcem AC. Na dobivenom pravcu odaberemo točku D tako da je $|TC| = |BD|$. Četverokut $TBDC$ je paralelogram, a točka O sjecište dijagonala \overline{TD} i \overline{BC} . Četverokut $ABDT$ je trapez s osnovicama \overline{BD} i \overline{AT} . Dužina \overline{OE} je srednjica trapeza, a točka S njezino polovište. Pravac TS je traženo rješenje.



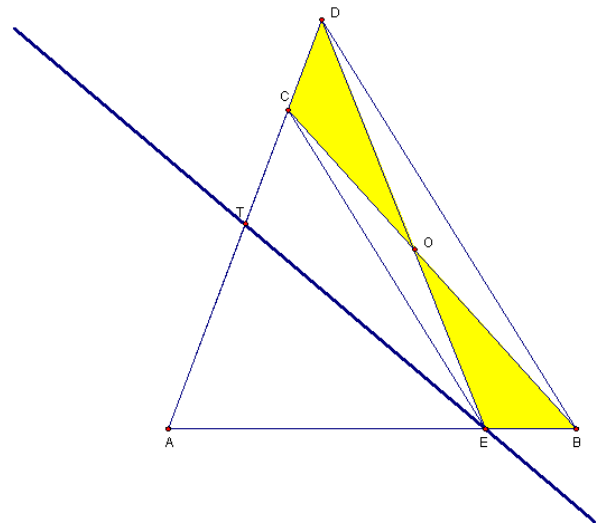
Treće rješenje:

Točkom C povučemo paralelu sa spojnicom \overline{TB} . Ta paralela siječe pravac AB u točki D . Točka O je sjecište dijagonala trapeza $TBDC$. Kako je $P_{\square TBD} = P_{\square TBC}$, a trokut TBO njihova zajednička površina, slijedi da je $P_{\square TOC} = P_{\square BDO}$, odnosno $P_{\square ABC} = P_{\square ADT}$. Točka E je polovište stranice \overline{AD} , a pravac TE traženo rješenje.



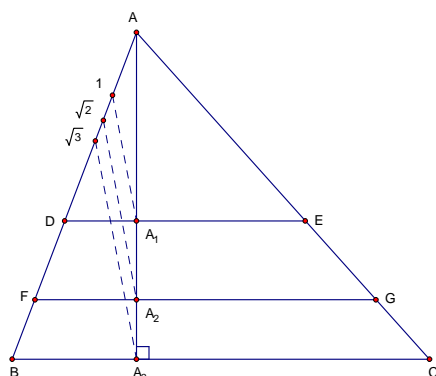
Četvrto rješenje:

Na produžetku stranice \overline{AC} odredimo točku D tako da je $|AT| = |TD|$. Točkom C povučemo paralelu sa spojnicom \overline{DB} . Ta paralela siječe stranicu \overline{AB} u točki E . Sličnim razmatranjem kao u prethodnom rješenju zaključujemo da je $P_{\square ABC} = P_{\square AED}$, a pravac TE je traženo rješenje.



Dijeljenje trokuta na više jednakih dijelova pravcima paralelnim s jednom stranicom

a) Na tri jednaka dijela:

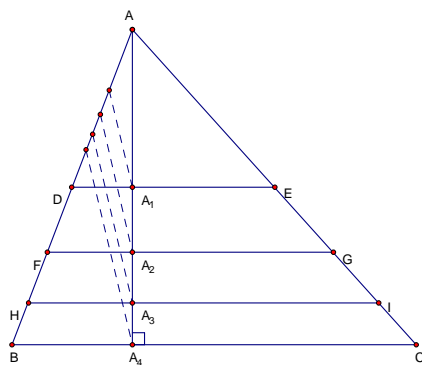


$$P_{\square ADE} : P_{\square AFG} : P_{\square AFG} = 1 : 2 : 3$$

$$|AA_1| : |AA_2| : |AA_3| = \sqrt{P_{\square ADE}} : \sqrt{P_{\square AFG}} : \sqrt{P_{\square ABC}}$$

$$|AA_1| : |AA_2| : |AA_3| = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

b) Na četiri jednaka dijela

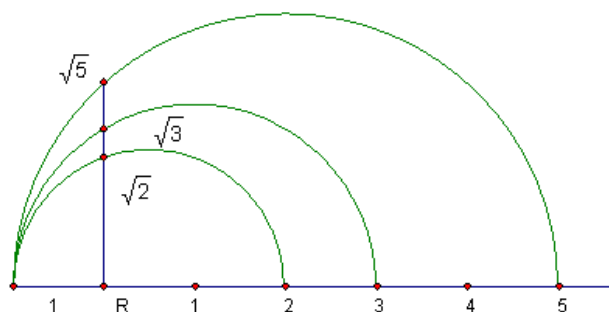
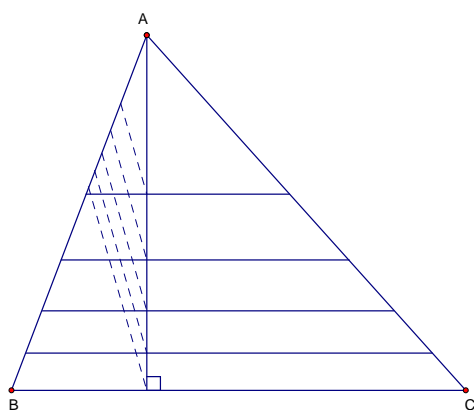


$$P_{\square ADE} : P_{\square AFG} : P_{\square AHJ} : P_{\square ABC} = 1 : 2 : 3 : 4$$

$$|AA_1| : |AA_2| : |AA_3| : |AA_4| = \sqrt{P_{\square ADE}} : \sqrt{P_{\square AFG}} : \sqrt{P_{\square AHJ}} : \sqrt{P_{\square ABC}}$$

$$|AA_1| : |AA_2| : |AA_3| : |AA_4| = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : 2$$

c) na pet jednakih dijelova



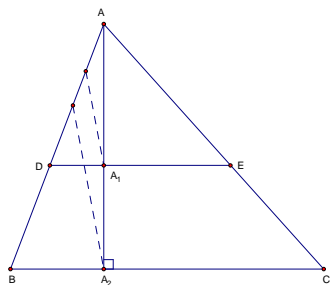
Dijeljenje trokuta u zadanom omjeru

a) 1:2

$$P_{\square ADE} : P_{BCED} = 1:2$$

$$P_{\square ADE} : P_{\square ABC} = 1:3$$

$$|AA_1| : |AA_2| = 1 : \sqrt{3}$$

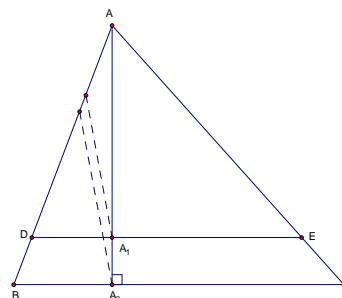


b) 2:1

$$P_{ADE} : P_{DBCE} = 2:1$$

$$P_{\square ADE} : P_{\square ABC} = 2:3$$

$$|AA_1| : |AA_2| = \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

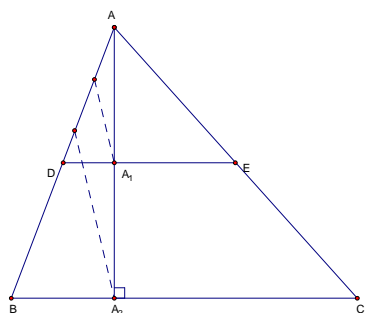


c) 1:3

$$P_{\square ADE} : P_{BCED} = 1:3$$

$$P_{\square ADE} : P_{\square ABC} = 1:4$$

$$|AA_1| : |AA_2| = 1:2$$

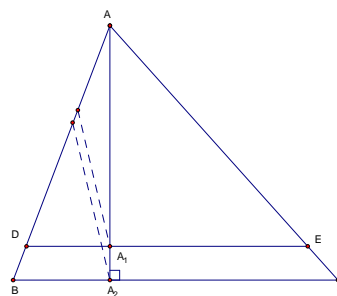


d) 3:1

$$P_{\square ADE} : P_{BCED} = 3:1$$

$$P_{\square ADE} : P_{\square ABC} = 3:4$$

$$|AA_1| : |AA_2| = \sqrt{3} : 2$$

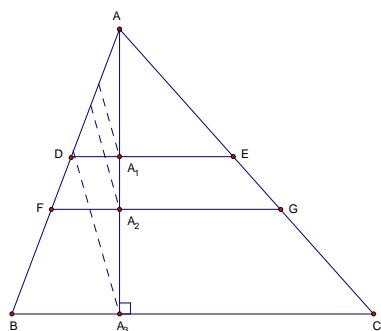


e) 1:1:3

$$P_{\square ADE} : P_{FGED} : P_{BCGF} = 1:1:3$$

$$P_{\square ADE} : P_{\square AFG} : P_{\square ABC} = 1:2:5$$

$$|AA_1| : |AA_2| : |AA_3| = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{5}$$

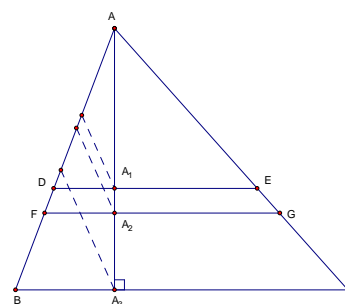


f) 3:1:4

$$P_{\square ADE} : P_{FGED} : P_{BCGF} = 3:1:4$$

$$P_{\square ADE} : P_{\square AFG} : P_{\square ABC} = 3:4:8$$

$$|AA_1| : |AA_2| : |AA_3| = \sqrt{3} : 2 : \sqrt{8}$$



Dijeljenje trapeza na jednake dijelove

Osim podjele dužinom paralelnom s osnovicama trapez možemo podijeliti i na slijedeći način:

Površina trapeza $P = \frac{a+c}{2}v$ i poluzbroj osnovica $\frac{a+c}{2}$ neće se promijeniti ako polovicu jedne osnovice umanjimo, a polovicu druge uvećamo za isti iznos.

Prema slici vrijedi:

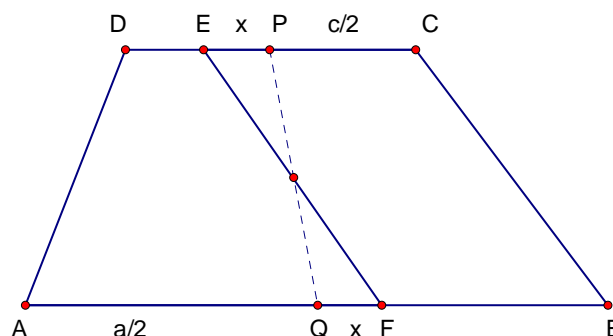
Točke P i Q su polovišta osnovica \overline{AB} i \overline{CD}

$$|DE| + |AF| = \frac{c}{2} - x + \frac{a}{2} + x = \frac{a+c}{2}$$

$$|EC| + |FB| = \frac{c}{2} + x + \frac{a}{2} - x = \frac{a+c}{2}$$

$$|DE| + |AF| = |EC| + |FB| = \frac{a+c}{2}$$

$$P_{AFED} = P_{FBCE} = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2} \frac{a+c}{2}v,$$

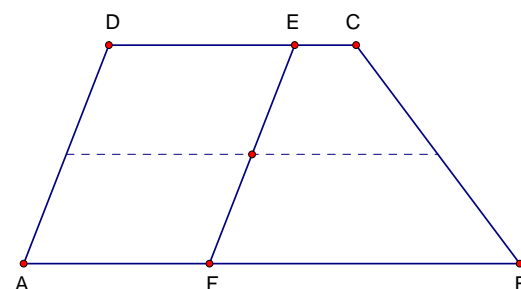
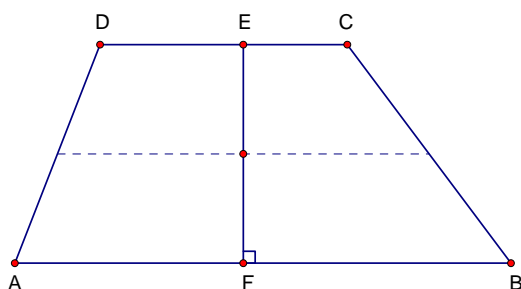


što znači da su srednjice trapeza $AFED$ i $FBCE$ jednake duljine i jednake su polovici srednjice trapeza $ABCD$. Zato sve dužine koje spajaju osnovice trapeza, a prolaze polovištem srednjice su rješenja zadatka.

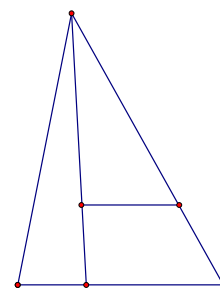
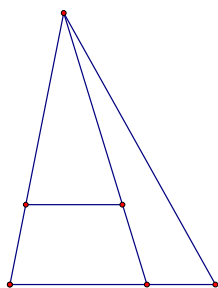
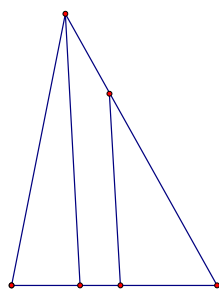
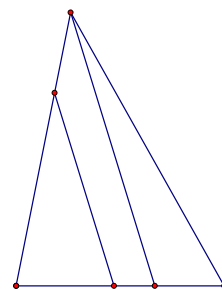
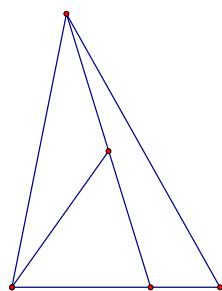
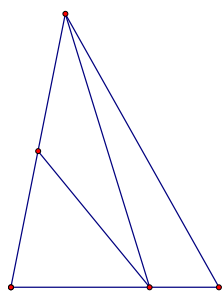
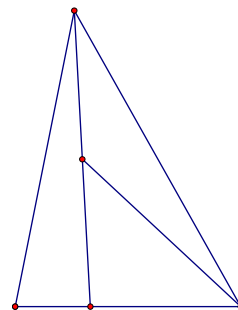
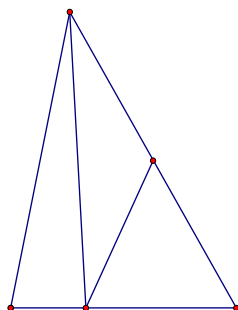
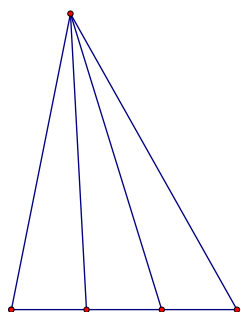
Primjeri:

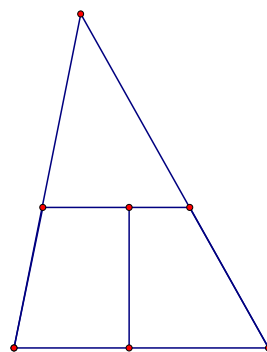
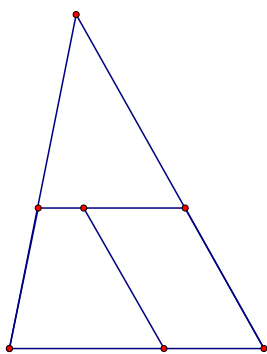
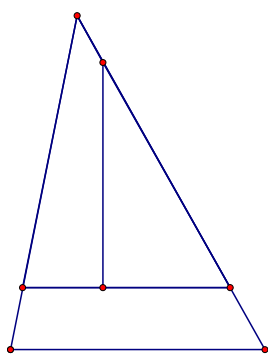
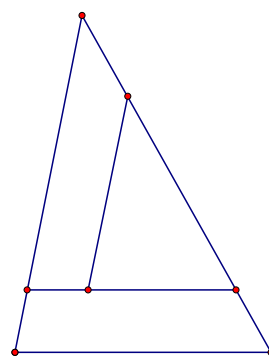
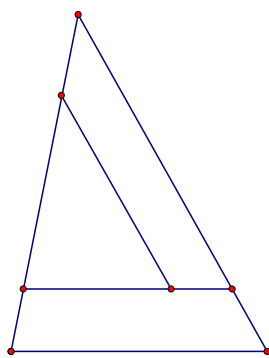
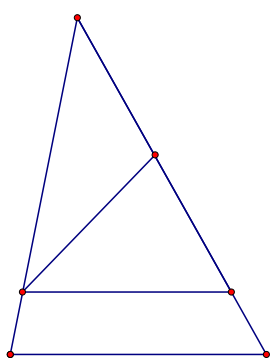
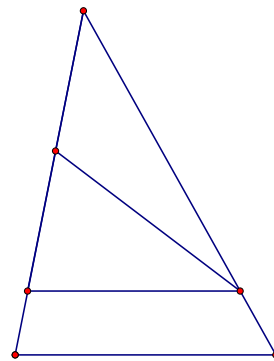
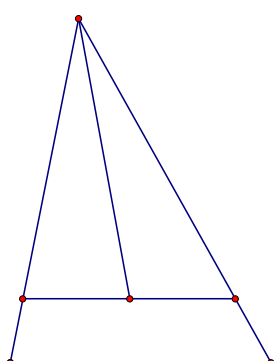
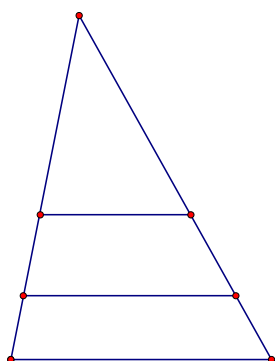
1. Dužina \overline{EF} je okomita na osnovicu

2. Dužina \overline{EF} je paralelna s krakom \overline{AD}



Dijeljenje trokuta na tri jednaka dijela





Dijeljenje trokuta paralelnim pravcima koji dijele visinu na jednake dijelove

Primjer 1:

Podjela visine na dva jednaka dijela

Točkom A_1 visina $\overline{AA_2}$ podijeljena je na dva jednaka dijela.

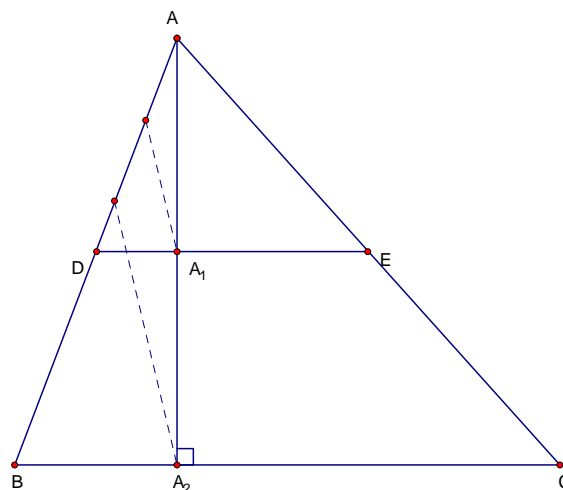
Zbog sličnosti trokuta ADE i ABC vrijedi:

$$|DE| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a$$

$$P_{ADE} = P_1 = \frac{\frac{a}{2}v}{2} = \frac{a}{4}v$$

$$P_{BCED} = P_2 = \frac{a + \frac{a}{2}}{2}v = \frac{3a}{4}v$$

$$P_1 : P_2 = \frac{a}{4}v : \frac{3a}{4}v = 1 : 3 \quad P_1 = \frac{1}{4}P, \quad P_2 = \frac{3}{4}P$$



Primjer 2:

Podjela visine na tri jednaka dijela:

Visina $\overline{AA_3}$ podijeljena je točkama A_1 i A_2 na tri jednaka dijela. $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = v$

Neka je stranica \overline{DE} trokuta ADE duljine a , a ta je dužina srednjica trokuta AFG, pa je $|FG| = 2a$. Nadalje je dužina \overline{FG} srednjica trapeza BCGF pa je $\frac{|BC| + |DE|}{2} = |FG|$.

$$\frac{|BC| + |DE|}{2} = |FG|$$

$$|BC| = 2|FG| - |DE| = 3a$$

Do istog zaključka dolazimo na osnovi sličnosti trokuta ADE, AFG i ABC.

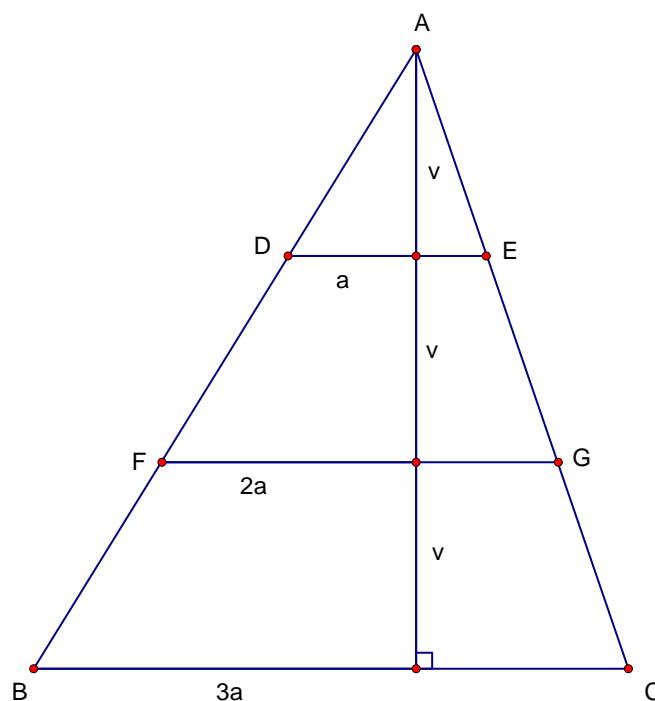
Neka je $P_{ADE} = P_1$, $P_{FGED} = P_2$, $P_{BCGF} = P_3$

Vrijedi.

$$P_1 = \frac{av}{2}, P_2 = \frac{2a + a}{2}v = 3\frac{av}{2}, P_3 = \frac{3a + 2a}{2}v = 5\frac{av}{2}$$

$$P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 3 : 5$$

$$P_1 = \frac{1}{9}P, \quad P_2 = \frac{3}{9}P = \frac{1}{3}P, \quad P_3 = \frac{5}{9}P$$



Primjer 3

Podjela visine na šest jednakih dijelova:

$$P_1 = \frac{av}{2}, P_2 = \frac{2a+a}{2}v = 3\frac{av}{2}, P_3 = \frac{3a+2a}{2}5\frac{av}{2},$$

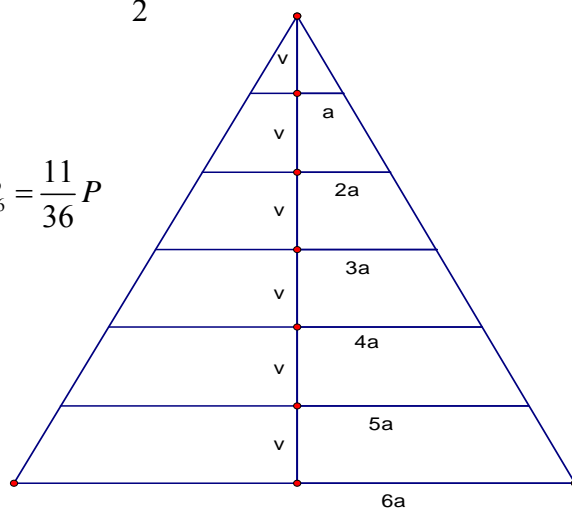
$$P_4 = \frac{4a+3a}{2}v = 7\frac{av}{2}, P_5 = \frac{5a+4a}{2}v = 9\frac{av}{2}, P_6 = \frac{6a+5a}{2}v = 11\frac{av}{2}$$

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 : P_5 : P_6 = 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : 11$$

$$P_1 = \frac{1}{36}P, P_2 = \frac{3}{36}P, P_3 = \frac{5}{36}P, P_4 = \frac{7}{36}P, P_5 = \frac{9}{36}P, P_6 = \frac{11}{36}P$$

Općenito vrijedi:

$$P_1 : P_2 : P_3 : \dots : P_n = 1 : 3 : 5 : \dots : n$$



										1
										$\frac{1}{4}$
										$\frac{3}{4}$
										$\frac{5}{16}$
										$\frac{7}{16}$
										$\frac{9}{36}$
										$\frac{11}{36}$
										$\frac{13}{36}$
										$\frac{15}{36}$
										$\frac{17}{100}$
										$\frac{19}{100}$

											1
											$\frac{1}{9}$
											$\frac{3}{9}$
											$\frac{5}{25}$
											$\frac{7}{25}$
											$\frac{9}{25}$
											$\frac{13}{49}$
											$\frac{15}{49}$
											$\frac{17}{81}$
											$\frac{19}{81}$
											$\frac{21}{121}$

Navedeni prikazi daju nam odnos površina pojedinih dijelova prema površini cijelog trokuta. Može se uočiti da je zbroj površina najmanjeg i najvećeg dijela jednak zbroju drugog po veličini dijela i predzadnjeg dijela i tako redom ovisno o broju podjela.

Ako je n broj dijelova (broj podjela) onda je svaki od navedenih zbrojeva jednak $\frac{2}{n}$ površine cijelog trokuta.

Ako je broj dijelova neparan onda je srednji dio po veličini jednak $\frac{1}{n}$ površine trokut

Dijeljenje trokuta paralelnim pravcima koji dijele visinu na razmjerne dijelove

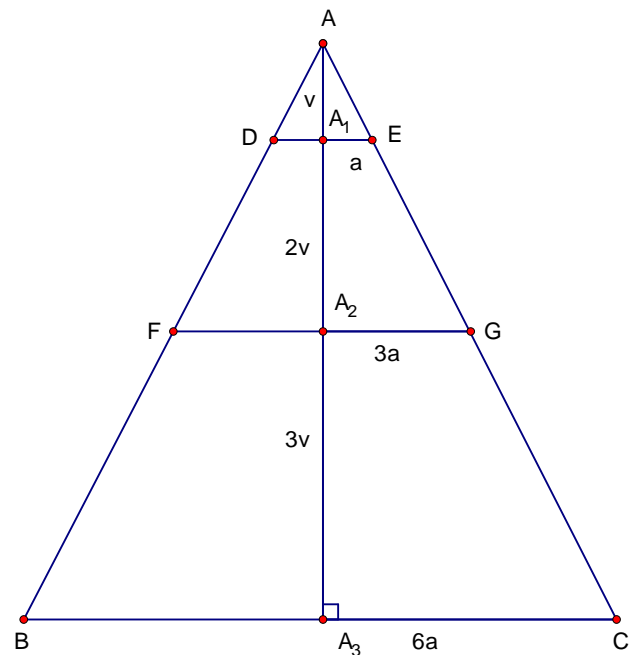
Točkama A_1 i A_2 visina trokuta ABC podijeljena je u omjeru $1:2:3$. Pravci paralelni s osnovicom točkama A_1 i A_2 dijele trokut na tri slična trokuta ADE , AFG i ABC , pa vrijedi:
 $|DE| = a, |FG| = 3a, |BC| = 6a$

$$P_1 = P_{ADE} = \frac{av}{2}$$

$$P_2 = P_{FGED} = \frac{3a+a}{2} \cdot 2v = 8 \frac{av}{2}$$

$$P_3 = P_{BCGF} = \frac{6a+3a}{2} \cdot 3v = 27 \frac{av}{2}$$

$$P_1 : P_2 : P_3 = 1 : 8 : 27$$



Podijelimo li na isti način zadani trokut točkama A_1 , A_2 i A_3 na četiri slična trokut vrijedi:

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 = 1 : 8 : 27 : 64 = 1^3 : 2^3 : 3^3 : 4^3$$

Općenito vrijedi:

$$P_1 : P_2 : P_3 : \dots : P_n = 1^3 : 2^3 : 3^3 : \dots : n^3$$

