

Geometrija umjetnosti: **Linearna perspektiva** (u osnovnoj i srednjoj školi)

Petar Mladinić, Zagreb

24. ožujka 2013.

U ovom ćemo tekstu naznačiti neke umjetničke i matematičke aspekte linearne perspektive. Naznačit ćemo, ilustracije radi, određen broj problema, njihovih rješenja kao i primjene u suvremenoj umjetnosti. Objasnit ćemo i "shvaćanje" da je čunjosječnica (konika) perspektivna slika kružnice.

Uvod

Razmotrimo nekoliko sljedećih fotografija.

Najprije pogledajmo tračnice.



Sl. 1.



Sl. 2.



Sl. 3.

Zatim razmotrimo/pogledajmo složenije slučajeve.



Sl. 4.

Sijeku li se u stvarnosti ove tračnice? A ceste? Ako željeznički pragovi određuju pravce, sijeku li se ti pravci na slici 1.? A na slici 2.? Jesu li pragovi na slikama jednake duljine?

Iz iskustva znamo da se nikad ne sijeku. Često kažemo da se sijeku na obzoru (horizontu) ili u nedoglednoj točki (nedogledu).

Ako razmatramo fotografije i predmete na njima kao ravninske objekte, onda su tračnice i ceste pravci. Samo se na slici 1. ti pravci/tračnice ne sijeku, dok se pragovi na slikama 2. i 3. ne sijeku.

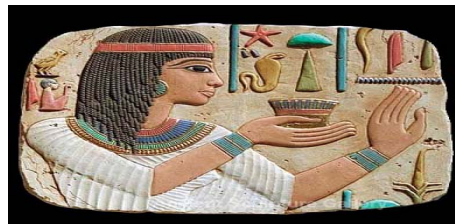
S problemom prikazivanja 3D na 2D čovjek se suočava od odavno.

Pogledajmo, ilustracije radi, nekoliko radova/slika iz povijesti likovne umjetnosti kako bismo uočili "napredak" u prikazivanju realnih objekata trodimenzijskog prostora na dvodimenzijski prostor, tj. ravninu.

U egipatskim piramidama nalazimo ovakve zidne slike nacrtane prije više tisuća godina.



Sl. 5.



Sl. 6.

U XV. stoljeću Botticelli je nacrtao sljedeću sliku.



Sl. 7.

Da Vinci je godine 1498. naslikao "Posljednju večeru".



Sl. 8.

Mantegna je oko 1500. godine nacrtao sliku "Mrtvi Krist".



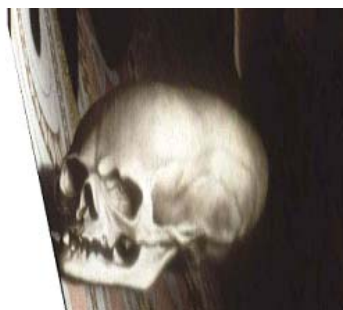
Sl. 9.

Caravaggio je 1595. godine naslikao sljedeću sliku.



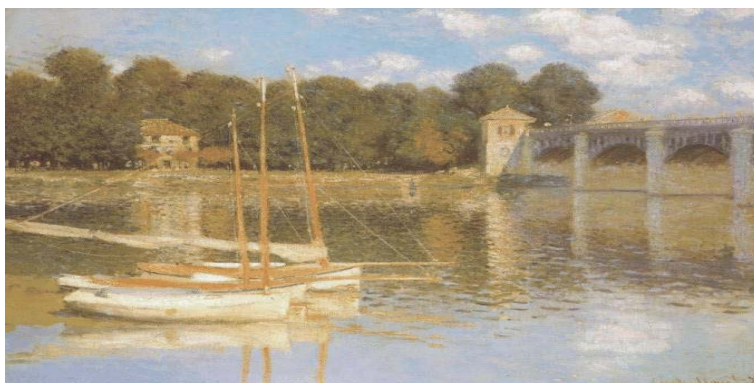
Sl. 10.

Slika 11. jedan je njezin dio (vidi se na dnu slike 10.) koji naznačuje potpuno novi smjer prikazivanja 3D na 2D koji će dobiti puni zamah danas pod nazivom anamorfna perspektiva ili *art-street*.



Sl. 11.

Monet godine 1874. crta "Argenteuilski most".



Sl. 12.

Gdje je danas slikarstvo tj. kako se danas perspektiva upotrebljuje u likovnoj umjetnosti? Bavi li se i dalje zakonima preslikavanja 3D na 2D?

Hogarth se u 18. stoljeću poigrava



Sl. 13.

kao i Escher u 20. stoljeću



Sl. 14.

sa zakonima perspektive.

Art-street umjetnici, kao i crtači reklama pokraj nogometnih vratnica, "poigravaju" se danas s našim doživljavanjem 3D.



Sl. 15.

Dick Termes crta danas na sferi perspektivne slike sa 6 nedogleda!



Sl. 16.

Istvan Orosz "poigrava" se s preslikavanjima iz ravnine na valjak.



Sl. 17.

Pogledajmo dva rada jednog od najvećih slikara nadrealizma. Salvador Dali vrhunski koristi perspektivu s jednim, dvama i trima nedogledima. Skoro u svim svojim radovima. Njegova slika "Krist na križu" je, osim što je genijalno nadrealistično djelo, i vrhunsko matematičko djelo. Nitko prije njega nije tako precizno i uspješno koristio perspektivu s trima nedogledima.



Sl. 18.

Na slici 19. "poigrava" se perspektivom interijera.



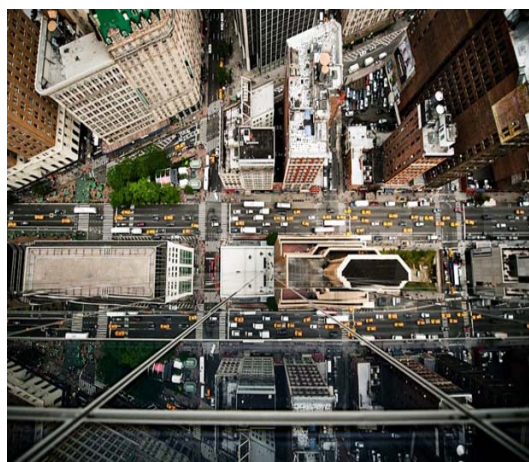
Sl. 19.

Na kraju ovih ilustracijskih primjera navedimo i crtež iz modernog stripa kao i fotografiju snimljene iz zraka. Najpoznatiji su stripovi DC Comicsa. Jedan je takav strip *Spider-man*.



Sl. 20.

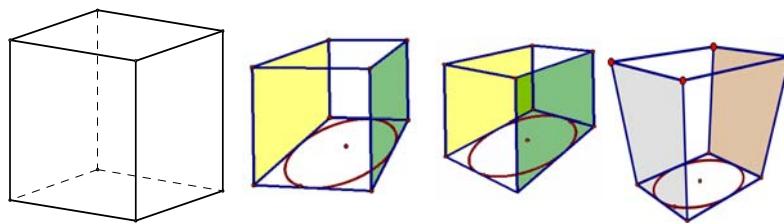
Evo i fotografije snimljene iz helikoptera iznad ulica New Yorka.



Sl. 21.

Problem

Koji od ovih crteža predočuje kocku?



Sl. 22.

Ovi su crteži očigledno različiti i nastali su kao rezultat drukčijeg gledanja na prikazivanje 3D na 2D, tj. prikazivanja trodimenzijskih objekata na ravninu. Koja je od ovih slika "prirodnija", tj. bliža onom što mi vidimo gledajući kocku?

"Malo" povijesti

Renesansni slikari **Duccio** (oko 1255.-1319.) i **Giotto** (oko 1267.-1337.) među prvima počinju napuštati do tada ustaljeno slikarstvo i eksperimentirati s prikazom prostora, udaljenostima i veličinama objekata kao i s oblicima kako bi sugerirali trodimenzionalnost nacrtanih objekata i dojam dubine.

Ta njihova intuitivna teorija perspektive kulminira u 14. stoljeću u radovima **Lorezettija** (oko 1300.-1348.).

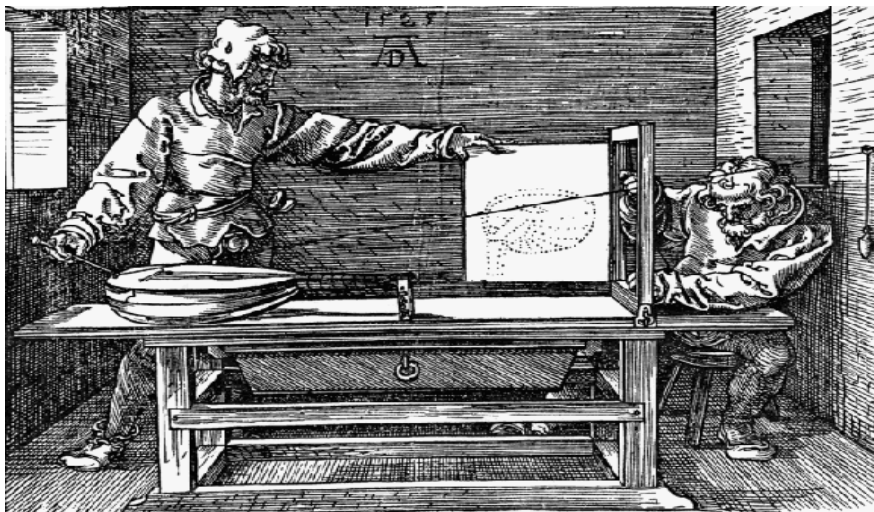
Nakon njih je novi značajni iskorak prema matematičkoj teoriji perspektive prvi učinio **Brunelleschi** (1379.-1446.) svojim otkrićem sustava perspektive.



Sl. 23. Brunelleschi

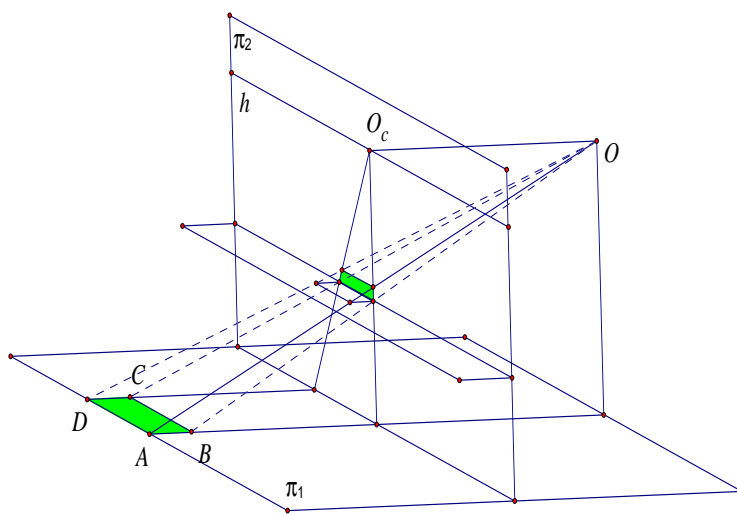
Prvi tekst o perspektivi napisao je 1435. godine **Alberti** (1404.-1472.). Na njegov se rad nastavlja **Piero della Francesca** (oko 1418.-1492.). Slikari **Leonardo da Vinci** (1452.-1519.) i **Albrecht Dürer** (1471.-1528.) pokazali su svojim radovima koliko je od temeljne važnosti za slikarstvo poznavanje matematičke teorije perspektive.

Na slici 24. Dürerov je drvorez iz *Rasprave o mjerenju*. Na slici se jasno vidi kako se 3D preslikava na 2D tj. kako se od objekata prostora dobiva njihova ravninska slika (na slikarskom platnu).



Sl. 24. Dürer

Elementi perspektive



Sl. 25.

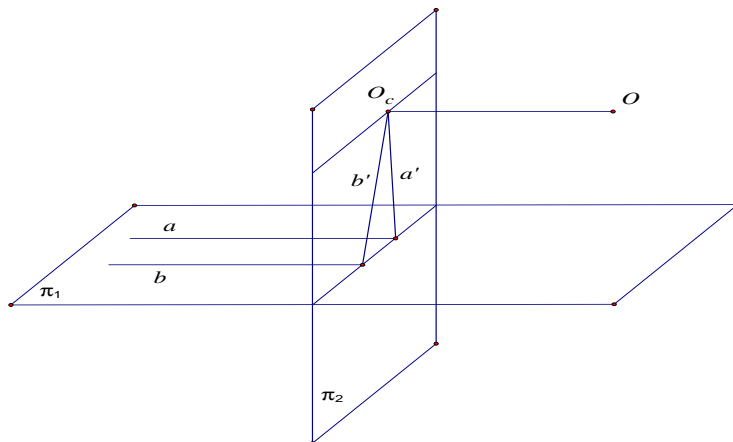
Na sl. 25. prikazani su položaji ravnina: horizontalne i vertikalne, slikareva oka, položaji pravaca u prostoru i njihovih slika na ravninu slike.

Horizontalna ravnina π_1 , na kojoj se nalaze objekti, naziva se *ravninom objekta*, a na nju okomita ravnina π_2 zove se *ravninom slike*. Pravac iz očista O (prema točki P) zove se *pravcem projekcije* točke P . Točka P' u kojoj pravac projekcije točke P probada ravninu slike naziva se *slikom* točke P .

Transformacija koja pridružuje točke P i P' koje su uvijek kolinearne s čvrstom točkom O naziva se *perspektivna transformacija*.

Probodište ravnine π_2 i pravca projekcije iz očišta O , koji je okomit na ravninu π_2 , zove se *glavnom nedoglednom točkom* O_C .

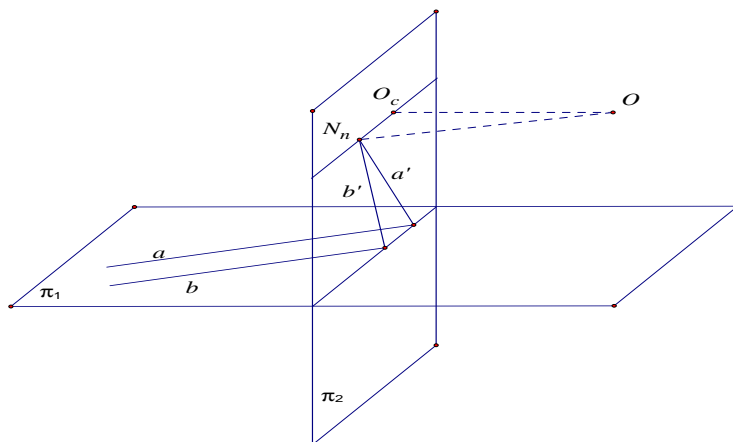
Pravac h koji je presječnica ravnine slike π_2 i ravnine položene točkom O paralelno s ravninom objekata π_1 zove se *nedoglednica* ili *horizont*.



Sl. 26.

Slike svih pravac okomitih na ravninu slike imaju isti glavni nedogled O_C (v.sl. 26.).

Slike svih međusobno paralelnih pravaca, a koji nisu okomiti na ravninu slike, imaju isti nedogled N_n na nedoglednici (v.sl. 27.).

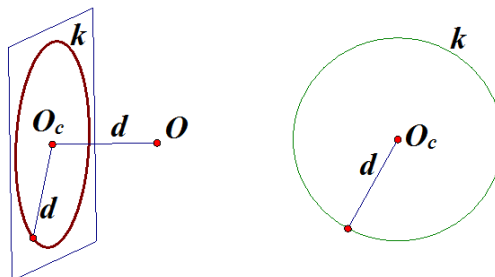


Sl. 27.

Pojmovi i pravila

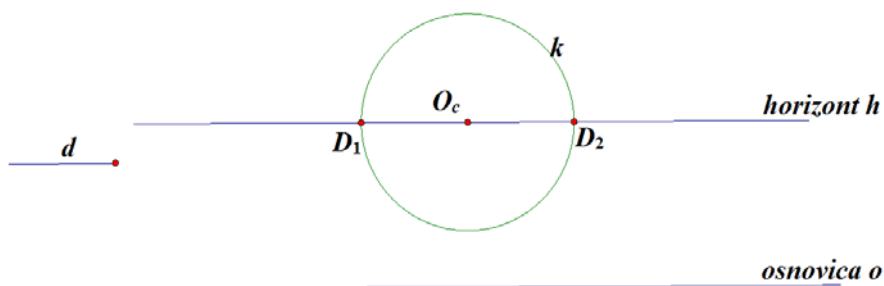
Pojmovi

- Centralna projekcija ili *perspektivna slika* objekta nalazi se između oka i objekta.
- Spojnica *očišta* O s točkom nekog objekta probada ravninu projekcije. Probodišta daju perspektivnu sliku objekta.
- Ravnina u kojoj se nalaze probodišta zove se *ravnina slike*.
- Okomita projekcija O_C očišta O zvat ćemo *glavna točka*, a udaljenost $|OO_C|$ *distancija* d .
- Kružnicu $k(O_C, r = |OO_C|)$ zovemo *distancijska kružnica*.



Sl. 28.

- *Nedogled* A_n pravca a je presjek ravnine slike i pravca b koji je usporedan s a i prolazi očištem O .
- Perspektivna slika neizmjerljivo dalekog pravca ravnine zove se *nedoglednica* ili *nedogledni trag*.
- Ravnina okomita na ravninu slike zove se *horizontalna ravnina*.
- Nedoglednica horizontalne ravnine zove se *horizont* h .
- Trag horizontalne ravnine je *osnovica* o .



Sl. 29.

- Točke D_1 i D_2 zovu se *distancijske točke* i vrijedi $|OO_C| = |O_C D_1| = |O_C D_2| = d$.

Pravila

- Sve ravne crte ostaju ravne na perspektivnoj slici.
- Svi vertikalni pravci ostaju vertikalno.
- Ako je dužina izvorno podijeljena nekom točkom, onda je i njezina perspektivna slika podijeljena u istom omjeru slikom te točke.
- Horizontalni pravac paralelan s osnovicom slike također je na slici paralelan s osnovicom.
- Sve dužine/pravci smještene u ravnini koja je paralelna s ravninom slike smanjuju se proporcionalno što su udaljenije i ostaju međusobno u istom omjeru kao i originalne dužine.
- Sve horizontale koje su okomite na ravninu slike crtaju se iz glavne točke.
- Sve horizontale koje s ravninom slike zatvaraju kut od 45° (pola pravog kuta) crtaju se iz distancijske točke.
- Horizontale u istoj ravnini koje završavaju u istoj točki na horizontu jedna drugoj su perspektivno-paralelne.

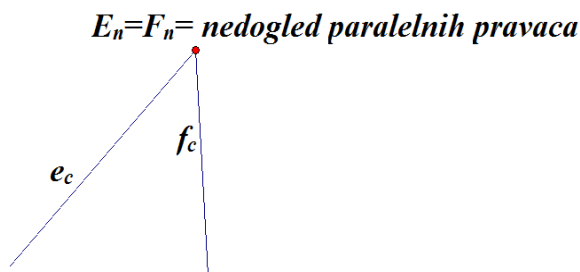
Primjeri i zadatci

Primjeri

Riješimo nekoliko temeljnih problema perspektive.

Primjer 1 *Nacrtajmo perspektivne slike usporednih pravaca e i f .*

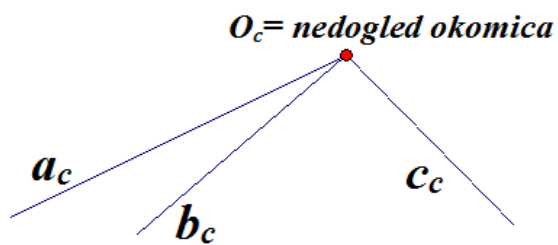
Usporedni pravci imaju isti nedogled.



Sl. 30.

Primjer 2 Nacrtajmo pravce a, b i c koji su okomiti na ravninu slike.

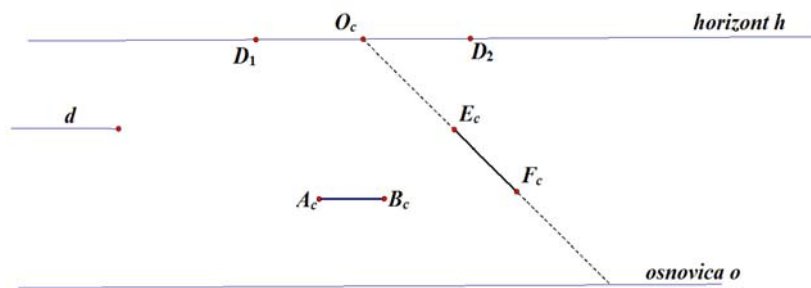
Pravci okomiti na ravninu slike imaju isti nedogled kao i okomiti pravac iz očišta. Njegov je nedogled točka O_c . Dakle, svi ovi okomiti pravci imaju isti nedogled O_c .



Sl. 31.

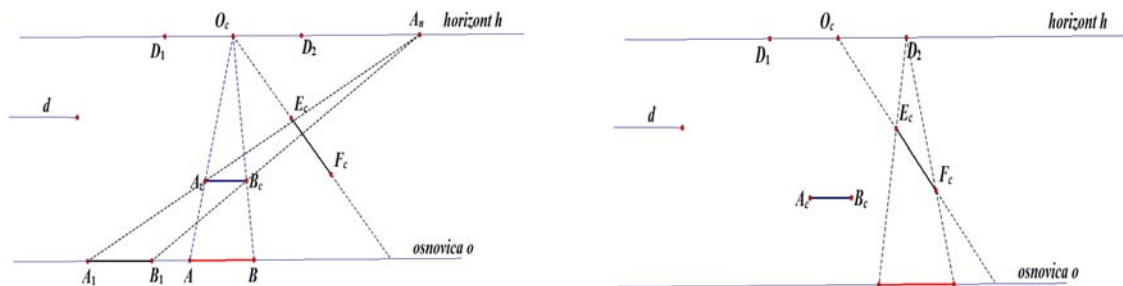
Primjer 3 Odredimo pravu veličinu dužine u horizontalnoj ravnini čija je perspektivna slika:

- a) usporedna s osnovicom,
- b) okomita na osnovicu.



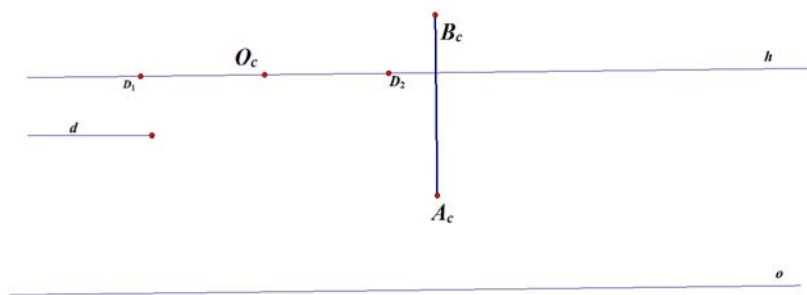
Sl. 32.

Na sl. 33. su prikazani načini crtanja/konstruiranja pravih duljina dužina na dva načina. Na lijevoj se slici vidi da se prava veličina dužine može odrediti na dva načina.



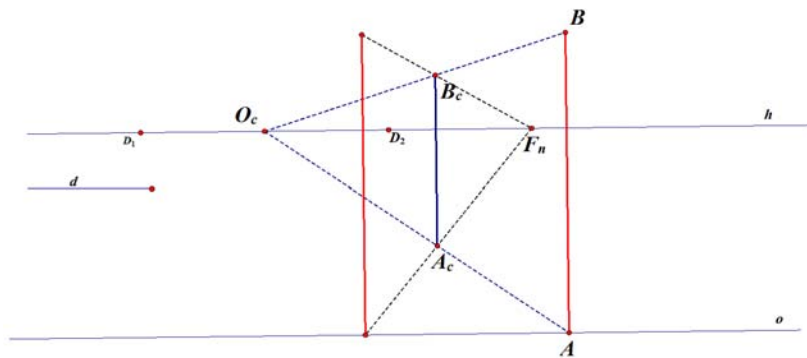
S1. 33.

Primjer 4 Odredite pravu veličinu dužine \overline{AB} koja je okomita na horizontalnu ravninu i zadana perspektivnom slikom $\overline{A_cB_c}$.



Sl. 34.

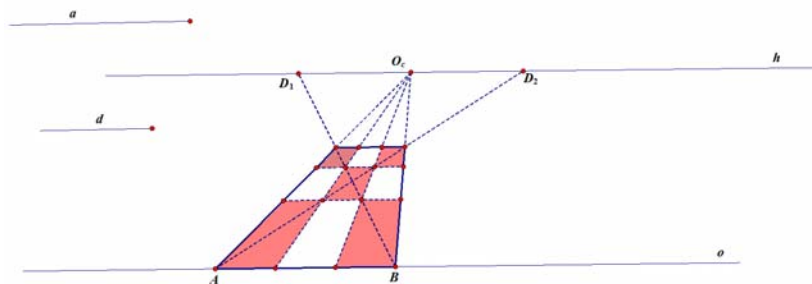
Na sl. 35. prikazano je rješavanje problema, određivanje prave veličine dužine kojoj je perspektivna slika okomita na horizont. Iz konstrukcije je vidljivo da su moguća dva rješenja, ali krajnji rezultat mora biti isti.



S1. 35.

Primjer 5 U horizontalnoj ravnini nacrtajte kvadrat duljine stranice a i razdijelite ga na manje kvadrate (primjerice, 3×3 , 5×5).

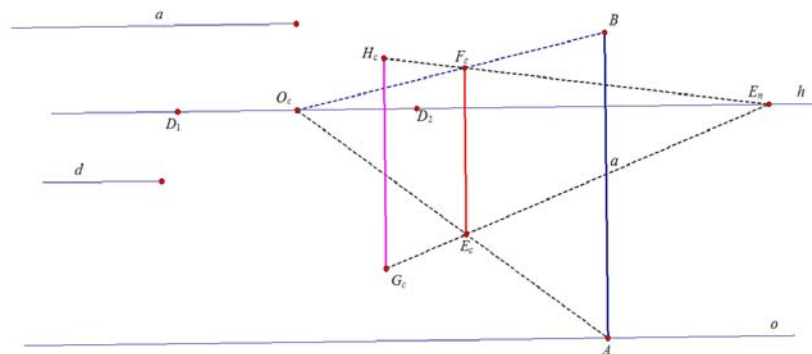
Na sl. 36. je nacrtana podjela kvadrata na 9 dijelova. Uočavamo da je kvadrat u specijalnom položaju tj. usporedan je s osnovicom i isto tako kako je podjela načinjena.



Sl. 36.

Primjer 6 U točkama E i G horizontalne ravnine nacrtajte okomice i na njima odredite točke F i H koje su udaljene od točaka E i G za zadanu duljinu $|AB|$.

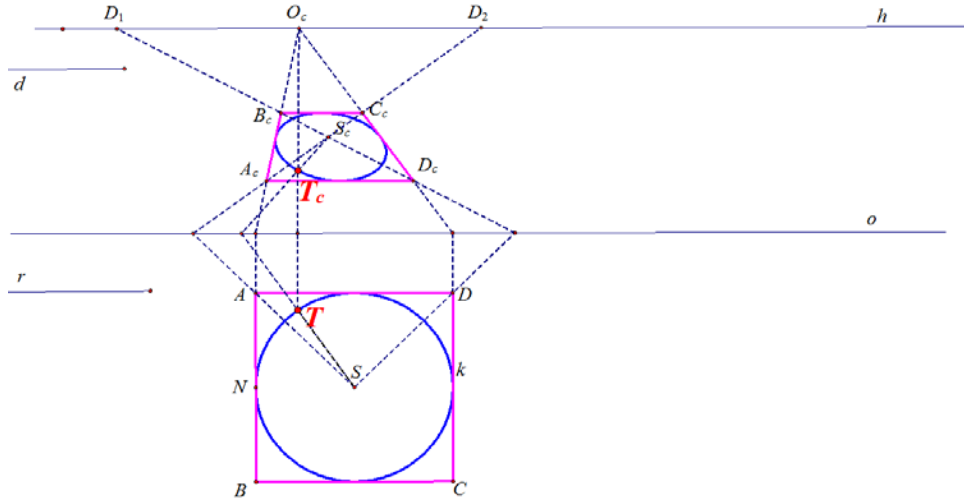
Na slici se lako uočava kako je konstrukcija načinjena i da je dužina koja je bliža ravnini projekcije dulja od one dužine koja je udaljenija.



S1. 37.

Primjer 7 Nacrtajmo perspektivnu sliku kružnice $k(S, r)$ koja leži u horizontalnoj ravni.

Konstrukcija problema prikazana je na sl. 38. Tijek konstrukcije možemo provesti slijedeći korake ili algoritam:

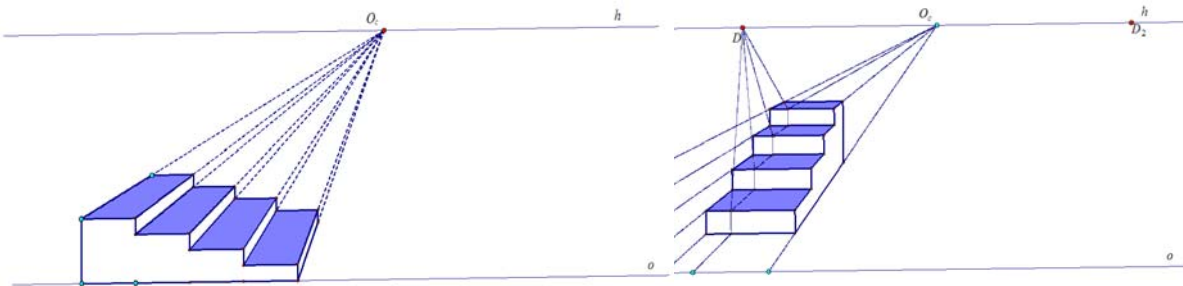


Sl. 38.

1. Nacrtamo kružnicu $k(S, r)$ u prevaljenoj/pravoj veličini.
2. Nacrta se tangencijalni kvadrat $ABCD$.
3. Nacrta se perspektivna slika kvadrata $A_c B_c C_c D_c$.
4. Na kružnici k se odabere proizvoljna točka T .
5. Nacrta se perspektivna slika točke T tj. nacrta se točka T_c (pomoću okomice na o i pravca ST).
6. Geometrijsko mjesto svih točaka T i T_c (lokus (T, T_c)) definirat će elipsu koja je perspektivna slika kružnice k .

Primjer 8 Nacrtajte perspektivnu sliku stuba (u dvama posebnim položajima).

Konstrukcija slike stuba vidi se na sl. 39.



Sl. 39.

Zadatci

Za vježbu riješite sljedeće zadatke.

1. Nacrtajte (u dva položaja prema osnovici) perspektivnu sliku sljedećih likova kojima su zadane prave veličine duljina stranica:
 - a) kvadrata,
 - b) pravokutnika,
 - c) paralelograma,
 - d) trapeza,
 - e) trokuta.
2. Zadana je perspektivna slika nekog poligona. Odredite prave veličine duljina njegovih stranica i kutove koje zatvaraju s osnovicom.
3. Koji kut zatvaraju s osnovicom pravci u horizontalnoj ravnini kojima je nedogled:
 - a) između glavne točke O_c i distancijske točke D_1 (ili D_2),
 - b) desno od točke D_2 (ili lijevo od D_1)?
4. Nacrtajte (u općem položaju prema osnovici) perspektivnu sliku sljedećih tijela kojima su zadane prave veličine duljina stranica:
 - a) kocke,
 - b) kvadra,
 - c) trostrane prizme,
 - d) kvadratske piramide,
 - e) valjka,
 - f) stošca.
5. Nacrtajte aleju:
 - a) kvadratskih,
 - b) cilindričnihstupova.
6. Nacrtajte perspektivnu sliku pravca:
 - a) Pappovog,
 - b) Pascalovog,
 - c) Désarguesovog.Čuvaju li se svojstva tih pravaca?
7. Nacrtajte perspektivnu sliku kocke s:
 - a) jednim nedogledom,
 - b) dvama nedogledima,
 - c) trima nedogledima.

Problemi/projekti

Riješite sljedeće probleme/projekte.

1. Konstruirajte elipsu u i/ili oko konveksnog četverokuta, tj. konstruirajte elipsu ako su zadane 4 tangente ili tetive elipse.
2. Nacrtajte perspektivnu sliku kocke i na jednoj pobočki nacrtajte upisanu kružnicu/elipsu.
3. Nacrtajte perspektivne slike kružnica koje su upisane stranama neke kocke.
4. Nacrtajte u kocki perspektivnu sliku:
 - a) jednog od Platonovih tijela,
 - b) valjka,
 - c) stošca.
5. Nacrtajte perspektivnu sliku neke građevine (eksterijer).
6. Nacrtajte perspektivnu sliku nekog unutarnjeg dijela zgrade/stana (interijer).
7. Odredite koliko je bio visok Isus na slici "Kristova smrt" koju je naslikao Mantegna (v. sl. 9.).
8. Odredite veličinu reklamnog panoa (i slova na njemu!) koji leži na travnjaku pokraj vratnica na nogometnom igralištu.
9. Odredite udaljenost slikara od ravnine slike na nekoj od poznatih slika.

Perspektivna transformacija

Raspravljali smo, s matematičkog gledišta, o teoriji perspektivnog prikazivanja/preslikavanja jednog skupa točaka na drugi.

Ovdje ćemo istražiti mogućnost reduciranja takva preslikavanja iz 3D na 2D prikazujući objekt i njegovu sliku u istoj ravnini.

Počnimo s konfiguracijom kojom iz očišta O dani ravninski objekt projiciramo na ravninu slike koja je okomita na nj. Rotiramo ravninu slike oko njihova presjeka koristeći gornju poluravninu koja koincidira s poluravninom ravnine objekta (koja je iza slike nastale iz O).

Taj je proces rotiranja poznat u nacrtnoj geometriji i teoriji perspektive kao *prelaganje*.

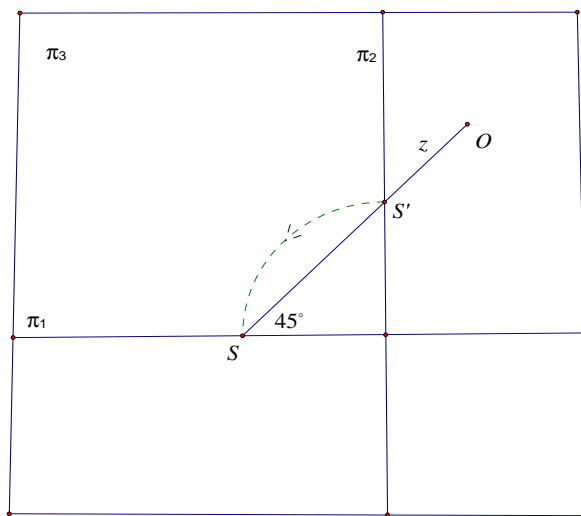
Za vrijeme ovog procesa mi zanemarujemo/ignoriramo točku O i činjenicu da ona nije dio našeg kasnijeg rada.

Točka P ravnine objekta, tj. ravnine π_1 sad ima sliku P' u *istoj ravnini* koja je nastala rotiranjem ravnine slike π_2 .

Naravno, poslije koincidiranja dviju ravnina točka P i njezina slika P' su kolinearne s O i točka P' se može odrediti iz P pomoću koraka projiciranja i presijecanjem. Moguće je opisati ekvivalentnu proceduru konstruiranja slike neke točke P .

Ako je p presječenica ravnine objekta i ravnine slike, jasno je da točke pravca p koincidiraju s njihovim slikama prije i poslije rotiranja/prelaganja dviju ravnina. Drugim riječima, u transformaciji prelaganja ravninskog objekta ove su točke invarijantne.

Neka je π_3 ravnina u kojoj leži O i okomita je na ravninu objekta i na ravninu slike u nerotiranom položaju i neka je z pravac u ravnini π_3 koji prolazi točkom O i zatvara kut od 45° s ravninom objekta (v.sl. 40.).



Sl. 40.

Tada točka S' pravca z rotacijom ravnine slike koincidira s praslkom S . Točka S je također invarijantna točka preslikavanja ravnine same na sebe (osim u posebnu slučaju kada z siječe presječnicu p), jer

točka S nije smještena na invarijantni pravac p .

Uzmimo sad da invarijantna točka S nije smještena na invarijantnom pravcu p . Jasno je da je slika bilo kojeg pravca ravnine objekta koji prolazi kroz S također pravac. Slika pravca je jednoznačno određena sa slikama bilo koje dvije točke. Ako su dvije točke invarijantne, onda pravac mora koincidirati sa svojom slikom.

Sad je samo točka S invarijantna. Nadalje, s iznimkom jedinstvenog pravca kroz S koji je paralelan s p , svaki pravac kroz S siječe p u točki koja je invarijantna i, po pretpostavci, različita od S . Zbog toga, s mogućom iznimkom, svaki pravac koji prolazi kroz S sadrži dvije invarijantne točke i prema tome koincidira sa svojom slikom.

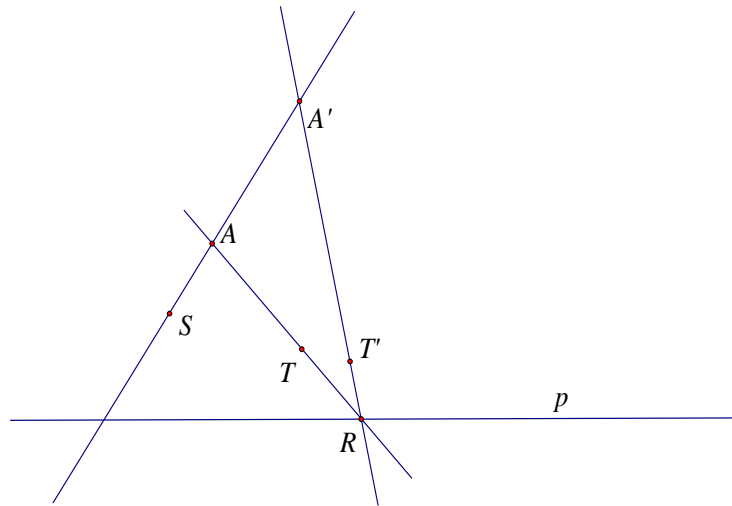
Konačno, pravac a koji prolazi točkom S i paralelan je s p mora koincidirati sa svojom slikom. Činjenično, slika pravca a mora biti neki pravac koji prolazi točkom S jer svaki pravac položen točkom S , osim izuzetka, ima svoju sliku. Zbog toga nema pravca za iznimkom od a koji može biti slika pravca a . Drugim riječima, pravac a je također invarijantan.

Slika neke točke pravca koji prolazi točkom S je neka druga točka *tog istog pravca*. Drugim riječima, uvijek su točka i njezina slika kolinearne s točkom S . Ili, drukčije, svaki pravac položen točkom S je invarijantan, ali ne i točkovno invarijantan.

Za zadanu točku A u ravnini π_1 , mi sad znamo i njezinu sliku A' - neku točku pravca SA . Za odrediti točku A' na ovom pravcu, moraju nam biti dani/poznati položaji točke S i pravca p , jedne točke T i njezine slike T' . S ovom se informacijom slika A' točke A može se naći na sljedeći način.

Pretpostavimo prvo da pravac AT siječe invarijantni pravac p u točki R . Tada slika pravca AT mora biti pravac koji prolazi invarijantnom točkom R i točkom T' koja je slika točke T . Kako je A točka pravca AT njezina slika mora ležati na pravcu $T'R$ koji je slika pravca AT .

Zbog toga jer A' mora također ležati na pravcu SA , onda je A' točka presjeka pravaca SA i $T'R$.



Sl. 41.

Naravno, ako su pravci SA i $T'R$ paralelni, onda točka A nema slike.

U drugu ruku, ako je pravac AT paralelan s p , mi trebamo prvo izabrati točku T_1 tako da pravac T_1T nije paralelan s p . Da bismo našli sliku T'_1 točke T_1 , koristimo konstrukciju koju smo opisali. Sliku točke

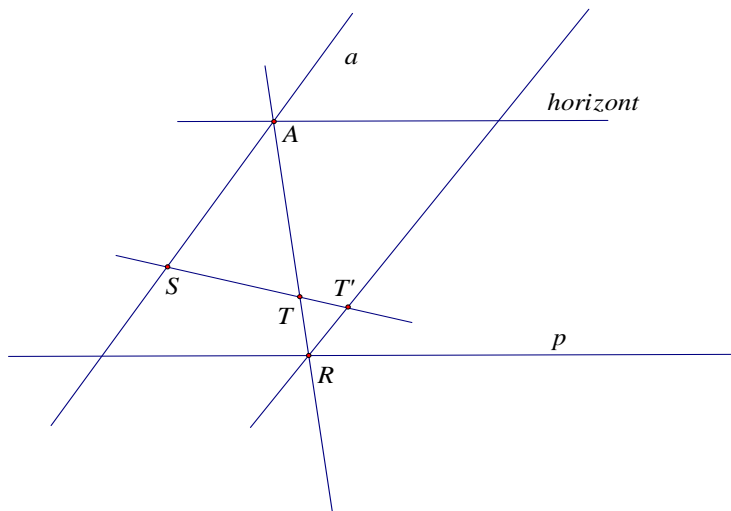
A odredimo uporabom para točka T_1 i T'_1 umjesto para T i T' .

Definirana transformacija poznata je kao *ravninska perspektiva*.

Pravac p invarijantnih točaka zove se *os transformacije*, a invarijantna točka S *središtem transformacije*.

Transformacija je jednoznačno određena s osi p , središtem S , točkom T i njezinom slikom T' .

Točka A nema slike onda i samo onda ako je pravac $T'R$ paralelan s pravcem SA (v. sl. 42.).

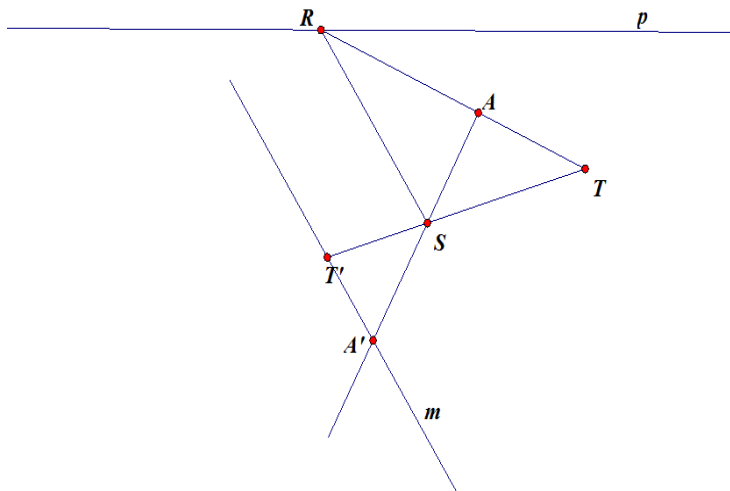


Sl. 42.

Perspektivna slika A' neke točke A dobiva se na sljedeći način (v. sl. 43.):

1. Definiraju/nacrtaju se os p , središte S , točka T i njezina slika T' .
2. Nacrta se točka A (čiju sliku trebamo odrediti).
3. Nacrta se pravac TA .
4. Odredi se točka R kao presjek pravaca $TA \cap p = \{R\}$.
5. Nacrta se točkom T' paralela m pravcem SR , tj. $T'A' \parallel SR$.

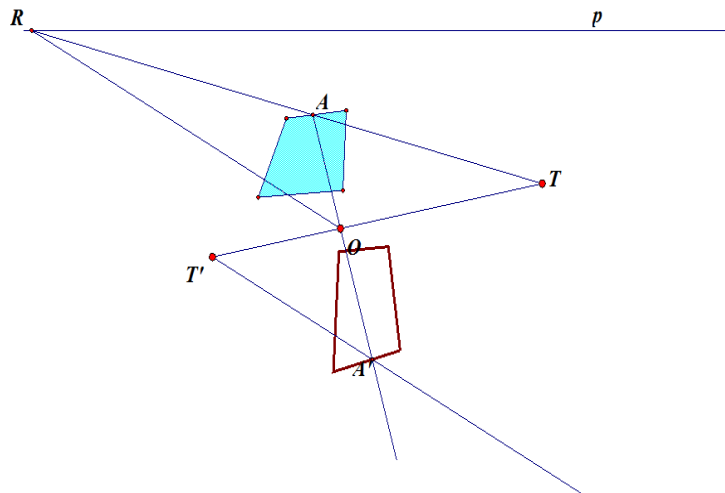
6. Nacrta se točka A' kao presjek pravaca m i AS , tj. $m \cap AS = \{A'\}$.



Sl. 43.

Perspektivna transformacija kvadrata

Na slici 44. vidi se konstukcija perspektivne slike kvadrata.



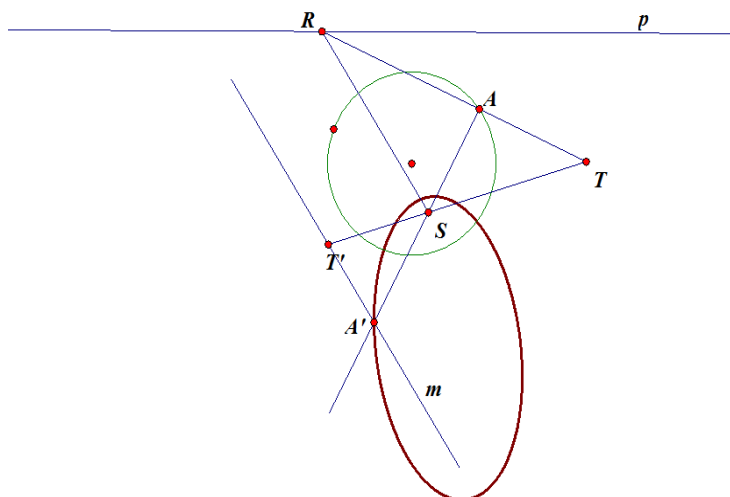
Sl. 44.

Perspektivna transformacija kružnice

Perspektivna transformacija kružnice dobije se ako se točka A (iz 2. koraka) odabere na kružnici k , a zatim se realizira opisani postupak dobivanja slike A' . Sljedeći korak daje perspektivnu sliku zadane kružnice:

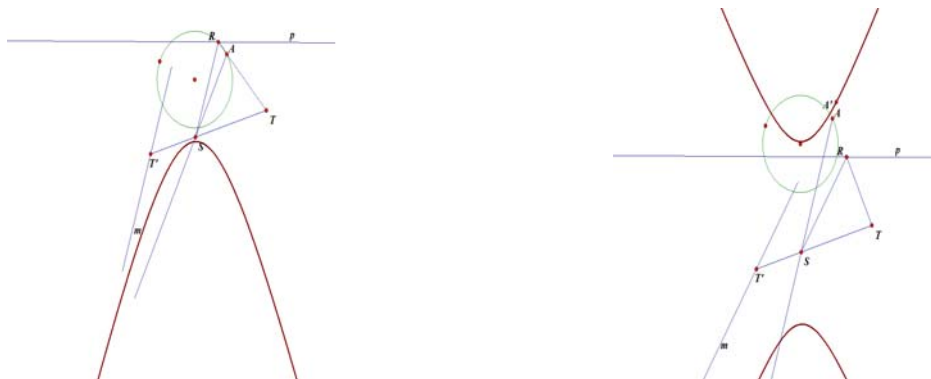
7. Locus točaka A i A' .

Dobivamo sliku:



Sl. 45.

Mijenjanjem položaja kružnice i/ili ostalih definirajućih objekata (osi, središta, pridruženih točaka) dobivaju se ostale krivulje drugog reda kao perspektivne slike kružnice.



Sl. 46.

Matematika perspektive

Pri kraju ovog osvrta, u grubim crtama/natuknicama (i bez pretenzije da ih sve spomenemo!), naznačimo matematičke sadržaje koji "stoje" iza perspektive.

- afina transformacija,
- perspektivna transformacija,
- kompozicija transformacija,
- sličnost,

- Talesov poučak o proporcionalnim dužinama,
- Talesov poučak o obodnom kutu,
- Euklidov poučak,
- Pitagorin poučak,
- poučak o ortocentru trokuta,
- konkurentni pravci,
- poučak o opisanoj i upisanoj kružnici,
- osna simetrija (u ravnini i prostoru),
- dvoomjer,
- koordinatni sustav u ravnini i prostoru,
- ...

Već površni uvid u slikarstvo ukazuje na to da su svi sadržaji osnovnoškolske kao i srednjoškolske geometrije zastupljeni u radovima velikih majstora i da su oni dali veliki prinos u njezinu razvoju, kao i u svakodnevnom prihvaćanju i uporabi.