

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Dubrovnik, 2.travnja-4.travnja 2013.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijedi:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{25}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right) = \\ & = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right) = \\ & = \left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \cdot \left(1^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) \cdot \left(1^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) \cdot \dots \cdot \left(1^2 - \left(\frac{1}{2013}\right)^2\right) = \\ & = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2013}\right) = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2012}{2013} \cdot \frac{2014}{2013} = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{2014}{2013} = \\ & = \frac{1007}{2013}. \end{aligned}$$

2. Neka je zadan niz brojeva $1, 2, 3, \dots, m-1, m, m+1, \dots, n-1, n$ te neka je m najmanji, a n najveći broj iz niza koji zadovoljava uvjet iz zadatka.

$$\text{Vrijedi } \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = 2012 \text{ odnosno } \frac{(n+m)(n-m+1)}{2} = 2012$$

$$\text{pa je } (n+m) \cdot (n-m+1) = 4024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 503.$$

Kako je zbroj $(n+m) + (n-m+1) = 2n+1$ odnosno neparan, a umnožak tih istih brojeva je paran broj, ti brojevi su suprotne parnosti.

Iz $m+n > n-m+1$ slijedi:

$$\text{a) } m+n = 4024 \text{ i } n-m+1 = 1$$

pa je $2n = 4024$ odnosno $n = 2012$, $m = 2012$

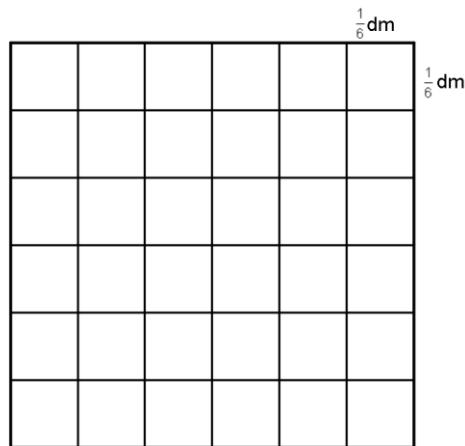
što nije rješenje jer je to samo jedan broj.

b) $m + n = 503$ i $n - m + 1 = 8$

pa je $2n + 1 = 511$ odnosno $n = 255$, $m = 248$

te je traženo rješenje 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255.

3. Razdijelimo kvadrat na sljedeći način:



Tako se dobije 36 kvadrata sa stranicama duljine $\frac{1}{6} \text{ dm}$.

Kako je $110 = 36 \cdot 3 + 2$, onda postoji kvadrat stranice duljine $\frac{1}{6} \text{ dm}$ unutar kojeg se nalaze barem 4 točke.

Neka je d duljina dijagonale kvadrata unutar kojeg se nalaze barem 4 točke.

Tada vrijedi $d^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$ odnosno $d = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ dm}$.

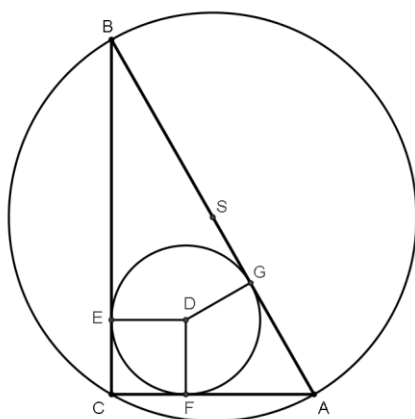
To znači da opisana kružnica kvadrata unutar kojeg se nalaze barem 4 točke ima polumjer

$$r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12} \text{ dm}.$$

S obzirom da je $\frac{\sqrt{2}}{12} < \frac{1}{8}$, jer je $\frac{2}{144} < \frac{1}{64}$, onda koncentrična kružnica s opisanom kružnicom, a

čiji je polumjer $\frac{1}{8} \text{ dm}$, omeđuje krug u kojem se nalaze barem 4 točke.

4.



Prema oznakama na slici vrijedi

$$|AC| = b, |BC| = a, |AB| = c = 20 \text{ cm},$$

$$|CF| = |CE| = |ED| = |DF| = r, |AF| = |AG| = b - r, |BE| = |BG| = a - r.$$

Iz svojstva pravokutnog trokuta slijedi $R = \frac{c}{2} = 10 \text{ cm}$.

Iz omjera $r : R = 2 : 5$ slijedi $r = 4 \text{ cm}$.

Nadalje je $|AB| = |AG| + |GB| = b - r + a - r = 20$ pa je $a + b = 20 + 2r = 28 \text{ cm}$.

Za opseg O trokuta ABC vrijedi $O = (a + b) + c = 28 + 20 = 48 \text{ cm}$.

Kako je $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i $a^2 + b^2 = c^2$ vrijedi

$$2ab = (a + b)^2 - c^2 \text{ odnosno } 2ab = 384 \text{ pa je } ab = 192.$$

Za površinu P trokuta ABC vrijedi $P = \frac{ab}{2} = 96 \text{ cm}^2$.

5. Površina peterokuta $ABNMD'$ može se izračunati tako da se od površine pravokutnika $ABCD$ oduzme površina trokuta ANM .

Kako su točke D i D' osnosimetrične s obzirom na MN , vrijedi $|D'M| = |MD|$.

Neka je $x = |MD|$.

Tada je $|AM| = 16 - x$ i $|D'M| = x$.

Budući da je $\triangle AMD'$ pravokutan, prema Pitagorinom poučku slijedi $(16-x)^2 = 4^2 + x^2$

odnosno $x = 7.5$ cm.

Dakle, $|AM| = 8.5$ cm.

Vrijedi $P_{\triangle ANM} = \frac{|AM| \cdot |AB|}{2} = \frac{8.5 \cdot 4}{2} = 17 \text{ cm}^2$ i $P_{\square ABCD} = |AB| \cdot |BC| = 4 \cdot 16 = 64 \text{ cm}^2$

pa je $P_{ABNMD'} = P_{\square ABCD} - P_{\triangle ANM} = 64 - 17 = 47 \text{ cm}^2$.