

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
Dubrovnik, 2.travnja-4.travnja 2013.

7. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je  $x$  dio zarade trećeg, četvrtog i petog radnika.

Tada je  $\frac{2}{5}x$  dio zarade prvog i drugog radnika te vrijedi

$$\frac{2}{5}x + x = 21000$$

$$\frac{7}{5}x = 21000$$

$$x = 15000$$

$$\frac{2}{5}x = 6000.$$

Označimo li zarade radnika redom  $a, b, c, d, e$ , onda iz  $a : b = 3 : 2$  slijedi  $a = 3k, b = 2k, k \in \mathbb{N}$ .

Kako je  $a + b = 6000$ , onda je  $3k + 2k = 6000$  te je  $k = 1200$ .

Prvi je radnik zaradio  $a = 3 \cdot 1200 = 3600$  kn, a drugi je radnik zaradio  $b = 2 \cdot 1200 = 2400$  kn.

Slično tome, za preostalu trojicu radnika iz  $c : d : e = 3 : 5 : 4$  slijedi  $c = 3l, d = 5l, e = 4l, l \in \mathbb{N}$ .

Kako je  $c + d + e = 15000$ , onda je  $3l + 5l + 4l = 15000$  te je  $l = 1250$ .

Prema tome, treći je radnik zaradio  $c = 3 \cdot 1250 = 3750$  kn, četvrti je radnik zaradio

$d = 5 \cdot 1250 = 6250$  kn i peti je radnik zaradio  $e = 4 \cdot 1250 = 5000$  kn.

2. Vrijedi  $\frac{149}{33} = \frac{m}{3} + \frac{n}{11}$ , pri čemu su  $m$  i  $n$  prosti brojevi.

Dalje je  $11m + 3n = 149$

$$3n = 149 - 11m$$

$$n = \frac{149 - 11m}{3} = \frac{147 - 12m + 2 + m}{3} = 49 - 4m + \frac{2 + m}{3}$$

$$n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2+m=3k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m=3k-2, k \in \mathbb{Z}$$

$$n = 49 - 12k + 8 + k = 57 - 11k, k \in \mathbb{Z}.$$

S obzirom da su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi, onda je  $3k-2 > 0$  i  $57-11k > 0$ .

Slijedi  $k > \frac{2}{3}$  i  $k < \frac{57}{11}$  što znači  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Za  $k = 1$  je  $m = 1, n = 46$  što nisu prosti brojevi.

Za  $k = 2$  je  $m = 4, n = 35$  što nisu prosti brojevi.

Za  $k = 3$  je  $m = 7, n = 24$ , a broj 24 nije prost broj.

Za  $k = 4$  je  $m = 10, n = 13$ , a broj 10 nije prost broj.

Za  $k = 5$  je  $m = 13, n = 2$ .

Traženi zapis je  $\frac{149}{33} = \frac{13}{3} + \frac{2}{11}$ .

$$3. \text{ Za površinu } P \text{ trokuta } ABC \text{ vrijedi } P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

$$\text{Dakle, } v_a = \frac{2P}{a} \text{ i } v_b = \frac{2P}{b}.$$

Kako je  $a < b$ , onda je  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  pa je  $v_a > v_b$  odnosno  $v_a - v_b > 0$ .

$$\text{Također, vrijedi } a = \frac{2P}{v_a}, b = \frac{2P}{v_b}, c = \frac{2P}{v_c}.$$

Prema nejednakosti trokuta slijedi  $c + a > b$  odnosno  $c > b - a$ .

$$\text{Dalje je } \frac{2P}{v_c} > \frac{2P}{v_b} - \frac{2P}{v_a}$$

$$\frac{1}{v_c} > \frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_a}$$

$$\frac{1}{v_c} > \frac{v_a - v_b}{v_a \cdot v_b}$$

$$v_c < \frac{v_a \cdot v_b}{v_a - v_b}$$

4. Broj je djeljiv s 1000 ako je njegov troznamenkasti završetak 000.

U 1. mogućem slučaju među ova 502 broja postoje dva s jednakim troznamenkastim završetkom.

Tada je njihova razlika djeljiva s 1000 i time smo utvrdili postojanje traženih brojeva.

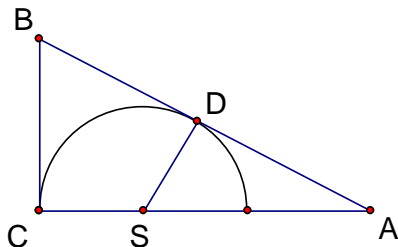
U 2. mogućem slučaju među ova 502 broja ne postoje dva s jednakim troznamenkastim završetkom.

Primijetimo da ima 499 parova troznamenkastih završetaka čiji je zbroj 1000 i to su (001,999), (002,998), (003,997), ..., (498,502), (499,501) i još 2 troznamenkasta završetka 000 i 500.

Ako su među ova 502 broja jedan broj sa završetkom 000 i jedan broj sa završetkom 500, preostane još 500 brojeva s nekim drugačijim završetkom. Tada postoje dva broja koji pripadaju istom paru čiji je zbroj 1000 te smo time utvrdili postojanje traženih brojeva.

Ako među ova 502 broja samo jedan broj ima završetak ili 000 ili 500 ili niti jedan, analogno slijedi da postoje dva broja koji pripadaju istom paru čiji je zbroj 1000 te smo time utvrdili postojanje traženih brojeva.

5.



Neka je  $|CS| = |SD| = r$ .

Tada je  $|AS| = b - r$ .

Kako je  $AB$  tangenta polukružnice u točki  $D$ , onda je  $\overline{SD} \perp \overline{AB}$ .

Dakle, vrijedi  $|\angle SDA| = 90^\circ = |\angle ACB|$  i  $|\angle DAS| = |\angle BAC|$  pa prema poučku K-K o sličnosti slijedi  $\triangle DAS \sim \triangle CAB$ .

Iz sličnosti slijedi  $|AS| : |AB| = |SD| : |BC|$  odnosno  $(b - r) : c = r : a$  pa je

$$c \cdot r = (b - r) \cdot a \text{ i na kraju } r = \frac{ab}{a + c}.$$