Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

17. siječnja 2013.

1. **(6)** Odredi realni broj a tako da $x = \frac{1}{2}$ bude rješenje jednadžbe

$$\left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{x+1} - \frac{4x^2}{x^2-1}\right)\left(\frac{1}{a^3+a^2} - \frac{1-a}{a^2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

2. **(6)** Na ispitu iz matematike rješava se 40 zadataka. Točan odgovor vrijedi 15 bodova, a netočan -4 boda. Dinko je riješio sve zadatke, no nažalost neke pogrešno. Koliko je pogrešnih odgovora dao, ako je ukupno imao 353 boda?

3. **(6)** Duljine kateta pravokutnog trokuta su 6 cm i 8 cm. Koliki je polumjer tom trokutu opisane kružnice?

4. **(6)** Samo je jedan djelitelj broja $3^{12} - 1$ veći od 70 i manji od 80. Odredi ga.

5. **(6)** Dan je pravilni 2013-erokut $A_1A_2\ldots A_{2013}$. Neka je S sjecište dužina $\overline{A_1A_4}$ i $\overline{A_3A_5}$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle A_3SA_4$.

6. **(10)** Odredi najmanji prirodni broj n tako da je polovina od n kvadrat nekog prirodnog broja, trećina od n kub nekog prirodnog broja, a petina od n peta potencija nekog prirodnog broja.

7. **(10)** Ivica i Marta imaju dva identična seta od pedeset karata s različitim simbolima. Svaki od njih promiješa svoj set karata. Potom Ivica stavi na stol svoj set karata, a zatim Marta stavi svoje karte na Ivičine. Ivica zatim broji koliko je karata između pojedine dvije identične karte, za svaki od 50 parova identičnih karata, te zbraja dobivene brojeve. Koje sve rezultate Ivica može dobiti?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

17. siječnja 2013.

1. **(6)** Koji broj ima više djelitelja u skupu prirodnih brojeva, 2013^2 ili 20480 ?

2. **(6)** Odredi kompleksni broj z takav da je

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1-z} = 2 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im}\frac{1}{1-z} = -1.$$

3. **(6)** Neka je ABC pravokutan trokut i $\overline{CN}$ njegova visina. Ako je $|AC| = |BN| = 1$, kolika je duljina hipotenuze $\overline{AB}$?

4. **(6)** Dokaži da zbroj svih troznamenkastih brojeva čiji se dekadski zapis sastoji od tri različite znamenke različite od nula ima barem tri različita prosta djelitelja.

5. **(6)** U koordinatnom sustavu označene su sve cjelobrojne točke (x, y) pri čemu je $1 \leqslant x \leqslant 200$ i $1 \leqslant y \leqslant 100$, ukupno 20000 točaka. Koliko ima dužina duljine $\sqrt{5}$ čiji su krajevi označene točke?

6. **(10)** Neka je $0 < a < b < c < d$ i neka svaka od kvadratnih funkcija $p(x) = x^2 + dx + a$ i $q(x) = x^2 + cx + b$ ima dvije različite realne nultočke. Dokaži da su sve četiri nultočke međusobno različite.

7. **(10)** Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je S sjecište njegovih dijagonala. Simetrala kuta $\sphericalangle ADC$ raspolavlja dužinu $\overline{AS}$ i siječe pravac BC u točki E. Odredi omjere $|BE| : |BC|$ i $|AB| : |BC|$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

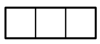
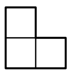
3. razred – srednja škola – A varijanta

17. siječnja 2013.

1. **(6)** Ako je $60^a = 3$, $60^b = 5$ i $x = \dfrac{1-a-b}{2(1-b)}$, dokaži da je 12^x prirodan broj.

2. **(6)** Ako je $(1+\sin t)(1+\cos t) = \dfrac{5}{4}$, odredi $\sin t + \cos t$.

3. **(6)** Koliko uređenih parova prirodnih brojeva (m, n) zadovoljava jednadžbu $m^2 - n^2 = 2^{2013}$?

4. **(6)** S kvadratne ploče $n \times n$ $(n > 5)$ uklonjena su dva disjunktna kvadrata 2×2. Može li se tako nastala ploča prekriti pločicama oblika  i  bez preklapanja?

5. **(6)** Dano je 27 točaka, raspoređenih u 9 stupaca i 3 retka. Svaka točka je obojana crveno ili plavo. Dokaži da postoji pravokutnik kojem su svi vrhovi iste boje.

6. **(10)** Izračunaj umnožak

$$\left(1 - \frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1 - \frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\ldots\left(1 - \frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right).$$

7. **(10)** Neka je $ABCD$ tangencijalni četverokut u kojem je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 120^\circ$ i $\sphericalangle CDA = 90^\circ$. Ako je $|AB| = 1$, izračunaj opseg četverokuta $ABCD$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

17. siječnja 2013.

1. **(6)** Odredi sve proste brojeve p i q takve da je $p^q + 1$ također prost.

2. **(6)** Gornja desna četvrtina šahovske ploče (dimenzija 8×8) je prekrivena papirom. Koliko najviše topova možemo postaviti na preostali dio šahovske ploče tako da se međusobno ne napadaju? Na koliko načina se to može napraviti?

(Dva topa se međusobno napadaju ako se nalaze u istom retku ili u istom stupcu.)

3. **(6)** Koliko ima kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

$$|z| = 1, \qquad \mathrm{Re}(z^{100}) = \mathrm{Im}(z^{200}) \qquad ?$$

4. **(6)** Igrači A, B i C bacaju kockicu jedan za drugim. Kolika je vjerojatnost da C dobije veći broj nego ostala dva igrača?

5. **(6)** Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$2^n \cdot (n!)^2 < (2n)!.$$

6. **(10)** Sva četiri sjecišta parabole $y = x^2 + px + q$ i pravaca $y = x$ i $y = 2x$ nalaze se u prvom kvadrantu. Uočimo dva dijela parabole koja leže između tih pravaca. Dokaži da razlika duljina njihovih ortogonalnih projekcija na os x iznosi 1.

7. **(10)** Odredi sve prirodne brojeve n takve da je $\log_2 (3^n + 7)$ također prirodan broj.