

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 25.travnja-27.travnja 2012.

7. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x broj godina majke.

Tada je broj godina oca $x + 4$.

Vrijedi $x + 4 + x = 80$.

Rješavanjem jednadžbe dobivamo da otac danas ima 42 godine, a majka 38.

Za nekoliko godina (z), zbroj godina djece bit će 59% zbroja godina oca i majke:

$$13 + 10 + 6 + 3z = 0.59 (80 + 2z)$$

Rješavanjem te jednadžbe dobit ćemo $z = 10$.

Za 10 godina otac će imati 52, a majka 48 godina.

2. Neka je u svakom od 6 odjela s jednakim brojem učenika x učenika.

Tada je u njima ukupno $6x$ učenika.

Kako je $6x > 150$, onda je $x > 25$.

U ostalim odjelima je 15% više učenika, što znači $1.15 \cdot 6x = 6.9x$ učenika.

Ukupno ih ima $6x + 6.9x = 12.9x$ i taj broj je manji od 400.

Dakle, $12.9x < 400$ pa je $x < \frac{4000}{129}$.

To znači da je $25 < x < \frac{4000}{129}$.

Da bi $12.9x$ bio prirodni broj, mora x biti višekratnik broja 10.

Dakle, $x = 30$.

U školi ima 387 učenika.

3. Neka je $x = \overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $x = 21 \cdot (a + b + c) = 3 \cdot 7 \cdot (a + b + c)$.

To znači da je x djeljiv s 3.

No, tada je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3 odnosno postoji prirodni broj k takav da je

$$a + b + c = 3 \cdot k.$$

Slijedi $x = 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot k = 9 \cdot 7 \cdot k$ i time je dokazano da je x djeljiv s 9.

Kako su a, b i c znamenke traženog troznamenkastog broja, za njih vrijedi

$$0 < a \leq 9, \quad 0 \leq b \leq 9, \quad 0 \leq c \leq 9.$$

Zbog toga za zbroj znamenki imamo tri mogućnosti:

$$1.) \ a + b + c = 9, \quad 2.) \ a + b + c = 18, \quad 3.) \ a + b + c = 27.$$

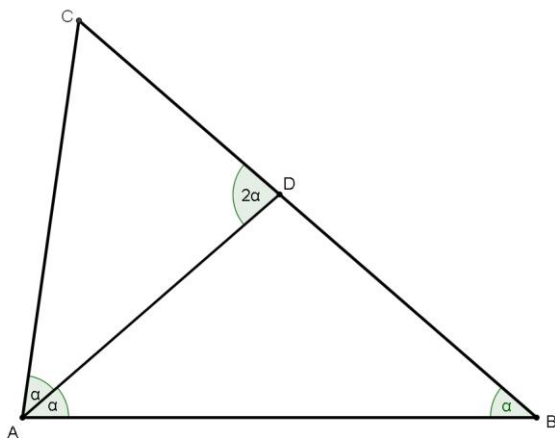
$$1.) \ 21 \cdot 9 = 189 \neq 21 \cdot (1 + 8 + 9) = 378$$

$$2.) \ 21 \cdot 18 = 378 = 21 \cdot (3 + 7 + 8) = 378$$

$$3.) \ 21 \cdot 27 = 567 \neq 21 \cdot (5 + 6 + 7) = 378$$

Dakle, traženi troznamenkasti broj je 378.

4.



Kako je $|\angle DAB| = |\angle ABD| = \alpha$, onda je $\triangle ABD$ jednakokravan pa je $|AD| = |BD| = 5$ cm.

Promatramo trokute ABC i DAC . S obzirom da je $|\angle CDA| = 2\alpha = |\angle CAB|$ i

$|\angle CAD| = \alpha = |\angle ABC|$, prema poučku K-K o sličnosti vrijedi $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

Iz sličnosti slijedi

$$|AC| : |CB| = |CD| : |AC|$$

$$|AC| : 9 = 4 : |AC|$$

$$|AC| \cdot |AC| = 36$$

$$|AC| = 6$$

odnosno

$$|BC| : |AB| = |AC| : |AD|$$

$$9 : c = 6 : 5$$

$$c = \frac{9 \cdot 5}{6}$$

$$c = 7\frac{1}{2}$$

Na kraju

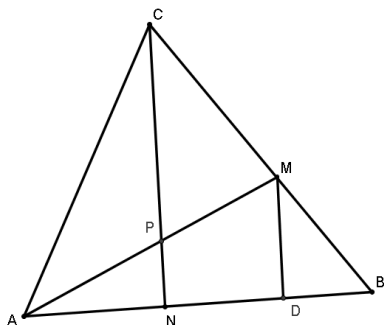
$$O = a + b + c$$

$$O = 9 + 6 + 7\frac{1}{2}$$

$$O = 22.5$$

Opseg trokuta ABC je 22.5 cm.

5. Neka se \overline{CN} i \overline{AM} sijeku u točki P i neka je točka D na stranici \overline{AB} takva da je $\overline{CN} \parallel \overline{MD}$.



Iz zadanih uvjeta vrijedi: $|AN| = 2k$, $|NB| = 3k$, $|BM| = 3m$ i $|MC| = 4m$, za $k, m \in \mathbb{Q}$.

Prema Talesovom poučku o proporcionalnim dužinama vrijedi

$|BD| : |DN| = |BM| : |MC| = 3 : 4$ pa je $|BD| = 3n$ i $|DN| = 4n$, za $n \in \mathbb{Q}$.

Slijedi $|NB| = |ND| + |DB|$ odnosno $3k = 4n + 3n$ te je $\frac{k}{n} = \frac{7}{3}$.

Prema Talesovom poučku o proporcionalnim dužinama vrijedi $|AP| : |PM| = |AN| : |ND|$

pa je $|AP| : |PM| = \frac{2k}{4n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{6} = 7 : 6$.