

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 25.travnja-27.travnja 2012.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zadana jednačba može se pojednostavniti i zapisati u obliku

$$y(x+3) = (x+3)^2 - 9 + 12$$

$$y(x+3) = (x+3)^2 + 3$$

$$y = \frac{(x+3)^2 + 3}{x+3}$$

$$y = x + 3 + \frac{3}{x+3}$$

Razlomak $\frac{3}{x+3}$ je cijeli broj samo ako je nazivnik djelitelj brojnika.

U tom slučaju razlikujemo četiri mogućnosti :

1.) $x + 3 = -1 \Rightarrow x = -4$ i tada je $y = -4$,

2.) $x + 3 = 1 \Rightarrow x = -2$ i tada je $y = 4$,

3.) $x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$ i tada je $y = 4$,

4.) $x + 3 = -3 \Rightarrow x = -6$ i tada je $y = -4$.

Dakle, rješenja zadane jednačbe su uređeni parovi $(-4, -4)$, $(-2, 4)$, $(0, 4)$ i $(-6, -4)$.

2. Prije susreta Ana je prošla dio puta s_1 brzinom v_1 u vremenu t , a u istom tom vremenu Branka preostali dio puta s_2 brzinom v_2 .

Zato vrijede ove jednakosti : $s_1 = v_1 t$ i $s_2 = v_2 t$.

Nakon susreta Ana je dio puta s_2 prošla za 4 sata pa imamo $s_2 = 4 v_1$,

a Branka s_1 za 9 sati te vrijedi $s_1 = 9 v_2$.

Slijedi $v_1 t = 9 v_2$ odnosno $v_1 = \frac{9v_2}{t}$.

Isto tako je $v_2 t = 4 v_1$ odnosno $v_1 = \frac{v_2 t}{4}$.

Dakle, $\frac{v_2 t}{4} = \frac{9v_2}{t}$ pa je $t^2 = 36$.

Slijedi da je $t = 6$. (Negativno rješenje $t = -6$, u ovom slučaju odbacujemo).

Dakle, Ana i Branka pošle su na put ujutro u 6 sati.

3. Umnožak znamenaka troznamenkastog broja kojemu je znamenka desetica ili znamenka jedinica jednaka nuli iznosi 0. Takvi brojevi neće utjecati na ukupni zbroj svih umnožaka.

Promatrajući brojeve prve stotice lako se vidi:

- zbroj umnožaka znamenki brojeva 111, 112, 113, ..., 118, 119 je $1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 = 45$
- zbroj umnožaka znamenki brojeva 121, 122, 123, ..., 128, 129 je $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9) = 2 \cdot 45$
- analogno, slijede zbrojevi umnožaka $3 \cdot 45, 4 \cdot 45, \dots, 8 \cdot 45$ i $9 \cdot 45$.

Ukupan zbroj umnožaka prve stotice iznosi

$$45 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 45 + \dots + 8 \cdot 45 + 9 \cdot 45 = 45 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9) = 45^2$$

Za brojeve druge stotice taj je zbroj umnožaka dvostruko veći (zbog znamenke stotice 2) i iznosi $2 \cdot 45^2$.

Analogno, za ostale su troznamenkaste brojeve zbrojevi umnožaka znamenaka jednaki

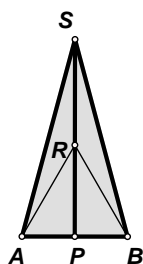
$$3 \cdot 45^2, 4 \cdot 45^2, \dots, 8 \cdot 45^2 \text{ i } 9 \cdot 45^2.$$

Konačni zbroj svih umnožaka iznosi

$$45^2 + 2 \cdot 45^2 + 3 \cdot 45^2 + \dots + 8 \cdot 45^2 + 9 \cdot 45^2 = 45^2 (1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9) = 45^3$$

4. Nacrtni lik je pravilni dvanaesterokut (sve su mu stranice jednakih duljina i svi unutarnji kutovi su veličine $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$).

Trokut ABS je karakteristični trokut tog pravilnog dvanaesterokuta, a krak \overline{SA} polumjer je tom trokutu opisane kružnice.



Uz oznake kao na slici i uvjete zadatka vrijedi $|SR| = 2 \text{ cm}$, $|RP| = \sqrt{3} \text{ cm}$.

Dakle, $|SP| = (2 + \sqrt{3}) \text{ cm}$.

Primjenom Pitagorina poučka na trokut APS dobivamo da je

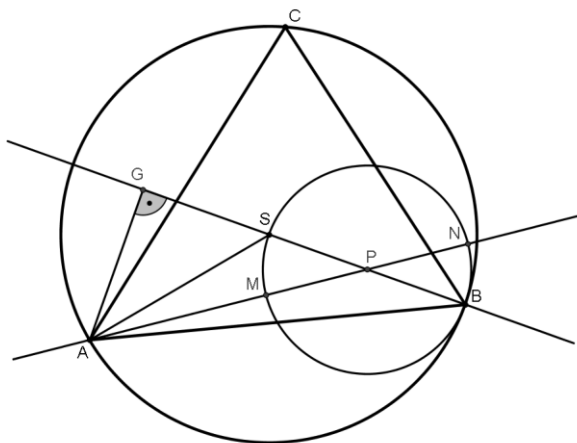
$$|AS|^2 = |AP|^2 + |SP|^2 \text{ pa je } |AS|^2 = 1^2 + (2 + \sqrt{3})^2 = 1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 8 + 4\sqrt{3} = 4(2 + \sqrt{3}).$$

Tada je $|AS| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 3.86 \text{ cm}$.

5. S obzirom da je $45^\circ < \gamma < 90^\circ$ i prema poučku o obodnom i središnjem kutu, vrijedi

$90^\circ < |\sphericalangle BSA| < 180^\circ$ odnosno $\triangle ABS$ je tupokutan.

Neka je točka G nožište okomice iz točke A na pravac BS i $p = |AG|$, $q = |SG|$, $x = |AP|$.



Kako su trokuti $\triangle ASG$, $\triangle APG$ i $\triangle ABG$ pravokutni, primjenom Pitagorina poučka slijedi

$$r^2 = p^2 + q^2, \quad x^2 = p^2 + (q + \frac{r}{\gamma})^2 \quad \text{ i } \quad c^2 = p^2 + (q + r)^2.$$

Iz druge od ovih jednažbi slijedi $p^2 = x^2 - (q + \frac{r}{2})^2$ što uvrstimo u preostale dvije jednažbe

te nakon sređivanja vrijedi $r^2 = x^2 - qr - \frac{r^2}{4}$ i $c^2 = x^2 + qr + \frac{3r^2}{4}$.

Zbrajanjem ove dvije jednačbe slijedi $r^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{r^2}{2}$ odakle je $x = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + r^2}$.

Budući da je $|AM| = |AP| - |MP|$, onda je $2|AM| = 2|AP| - 2|MP| = \sqrt{2c^2 + r^2} - r$.

Iz određenosti trokuta $\triangle ABS$ vrijedi $c < 2r$ odnosno $c - 2r < 0$.

Kako je $c > 0$, onda je $c \cdot (c - 2r) < 0$ odnosno $c^2 - 2cr < 0$.

Zatim je $c^2 - 2cr + c^2 + r^2 < c^2 + r^2$ pa je $2c^2 + r^2 < c^2 + 2cr + r^2$ odnosno $2c^2 + r^2 < (c+r)^2$.

Dalje je $\sqrt{2c^2 + r^2} < c + r$ odnosno $\sqrt{2c^2 + r^2} - r < c$.

Dakle, $2|AM| < |AB|$ te je time tvrdnja dokazana.