

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Poreč, 25.travnja-27.travnja 2012.

6. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x broj redova u voćnjaku.

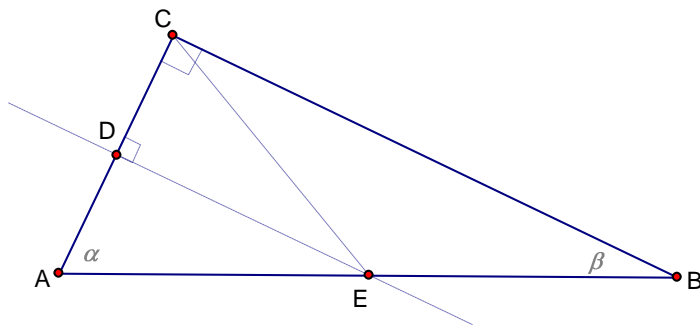
Tada u njemu ima $20 \cdot x$ voćaka.

U slučaju kada bi bila 3 reda manje vrijedilo bi $(x-3) \cdot 25 = 20 \cdot x + 40$.

Dalje je $25 \cdot x - 75 = 20 \cdot x + 40$ odnosno $5 \cdot x = 115$ pa je $x = 23$.

Zasađeno je 23 reda voćki.

2.



Trokut AEC je jednakokratan jer vrh E pripada simetrali njegove osnovice \overline{AC} te je

$$|AE| = |CE| = x. \text{ Zbog toga je } |\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle ACE| = \alpha.$$

U trokutu BCE , $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle ACE| = 90^\circ - \alpha$. Također je i $\beta = 90^\circ - \alpha$ jer je β

šiljasti kut pravokutnog trokuta ABC . Dakle, i trokut BCE je jednakokratan te vrijedi

$$|BE| = |CE| = x.$$

Iz uvjeta zadatka imamo ove jednakosti :

$$(\text{opseg trokuta } ABC) \quad a + b + c = 48, \quad (1)$$

$$(\text{opseg trokuta } AEC) \quad b + c = 32, \quad (2)$$

$$(\text{opseg trokuta } BCE) \quad a + c = 36. \quad (3)$$

Iz (1) i (2) slijedi da je $a = 48 - 32 = 16$.

Iz (1) i (3) slijedi da je $b = 48 - 36 = 12$.

Na kraju slijedi da je $c = 20$.

3. Od znamenki n , $n + 1$ i $n + 2$ mogu se napisati sljedeći troznamenkasti brojevi:

$$\overline{n(n+1)(n+2)}, \overline{n(n+2)(n+1)}, \overline{(n+1)n(n+2)}, \overline{(n+1)(n+2)n}, \overline{(n+2)n(n+1)} \text{ i } \\ \overline{(n+2)(n+1)n}.$$

Zbrajanjem tih brojeva i primjenom svojstva distributivnosti dobivamo

$$100(6n+6) + 10(6n+6) + 6n+6 = 111(6n+6) = 666(n+1).$$

Zbroj je djeljiv sa 666 jer se može prikazati kao umnožak broja 666 i prirodnog broja.

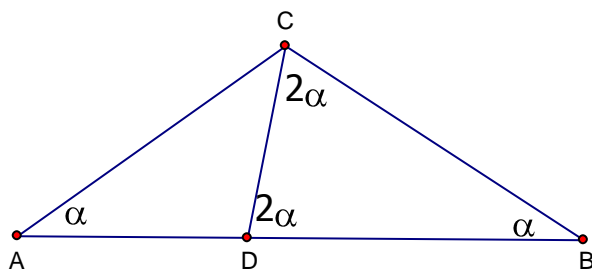
4. Krakovi zadanog trokuta ABC ne mogu biti krakovi novih trokuta, ali ni njihove osnovice (jer bi tada novodobiveni trokuti bili sukladni). Znači jednom od dobivenih trokuta je osnovica \overline{AC} , a drugom je osnovica \overline{CD} .

Kako je trokut ABC jednakokratan, onda je $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = \alpha$.

S obzirom da je trokut ADC jednakokratan, onda je $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACD| = \alpha$.

Tada je $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle ACD| = 2\alpha$.

Budući da je i trokut BCD jednakokratan, vrijedi $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle CDB| = 2\alpha$.



Na temelju zbroja veličina unutarnjih kutova u trokutu BCD dobivamo $5 \cdot \alpha = 180^\circ$.

Slijedi da je $\alpha = 36^\circ$. Veličine kutova trokuta ABC su 36° , 36° i 108° .

5.

$$15 = \frac{\frac{1}{x} + y}{x + \frac{1}{y}} = \frac{\frac{1+xy}{x}}{\frac{xy+1}{y}} = \frac{y(1+xy)}{x(1+xy)} = \frac{y}{x}$$

Traže se brojevi za koje je: $x + y \leq 100$ i $y = 15x$.

Traženi parovi su (1,15), (2,30), (3,45), (4,60), (5,75) i (6,90).