

Igre

Ratko Višak, Križevci

29. travnja 2012.

Sažetak

Primjeri igara koje igraju dva igrača tako da sa zadane hrpe kamenčića oduzimaju dopušteni broj kamenčića dobar su uvod u područje kombinatornih nepristranih igara. S opisanom strategijom i terminologijom iz početnih primjera, obrađena je igra Nim.

1 Uvod

Igre kao tema nisu zastupljene u srednjoškolskoj nastavi matematike pa bih ovim tekstom želio potaknuti nastavnike i njihove učenike da barem s nekoliko jednostavnijih primjera dotaknu ovu temu.

Odabrao sam nekoliko primjera nepristranih kombinatornih igara koji su podijeljeni u dva dijela: jednostavno oduzimanje i Nim igra.

Kombinatorna igra mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

1. Igraju dva igrača.
2. Igrači naizmjenično igraju.
3. Igrom je određen skup mogućih pozicija u igri i on je uglavnom konačan.
4. Pravila igre određuju poteze igrača u svakoj poziciji. Kada u pravilima nema razlike između igrača, tj. oba igrača imaju jednake opcije u svakoj poziciji, kažemo da je igra nepristrana. (Primjeri igara koje ćemo obraditi su nepristrani, a primjer poznate pristrane igre je šah.)
5. Igra završava kada igrač na potezu ne može odigrati potez. Ako je pobjednik igrač koji je posljedni odigrao potez, kažemo da je to normalna igra (normal play rule), dok u obrnutom slučaju, tj. kada je igrač koji zadnji odigra potez gubitnik, kažemo da je to mizerna igra (misère play rule).
6. Igra završava u konačno mnogo poteza.

Nabrojanim uvjetima za kombinatornu igru postigli smo da oba igrača imaju potpune informacije o igri, da su naizmjenično na potezu i da mogu odigrati samo pravilom dopušteni potez. Isključene su igre slučajnih poteza, npr. koje ovise o bacanju kockice ili dijeljenju karata, također izbjegavamo igre s neriješenim ishodom, tj. mogućnosti ishoda da igra nikada ne završi.

2 Jednostavno oduzimanje

U ovom ćemo dijelu na nekoliko primjera pokazati kako otkriti pobjedničku strategiju jednoga od dva igrača. Budući da pobjeda ovisi o dogovoru pobjeđuje li ili gubi onaj koji je odigrao zadnji potez, prilikom definiranja igre to treba navesti. U svim primjerima koje rješavamo, pobjednik je onaj koji je zadnji odigrao.

Primjer 1. Neka je na stolu hrpa od 26 kamenčića, dva igrača igraju igru tako da s hrpe naizmjenično oduzimaju 1, 2 ili 3 kamenčića, pobjednik je onaj igrač koji zadnji igra (isprazni hrpu).

Rješenje:

Krenut ćemo unazad, tj. od završetka igre kada je jedan od igrača uklonio posljedne kamenčiće ako su preostala 3 ili 2, odnosno posljedni kamenčić ako je preostao 1. Razlikujemo dvije mogućnosti za igrača: prva, da je sljedeći na potezu i to su S pozicije, i druga, da je bio na potezu, to su pozicije poslije njegovog poteza i njih označimo s P.

U analizi koju počinjemo od završetka igre, pratimo pozicije pobjednika. Prva P pozicija je 0 i tada je igrač pobjednik, pozicije 1, 2 i 3 su S pozicije tj. igrač pobjeđuje ako je na potezu, pozicija 4 je P pozicija jer igrač koji dolazi na potez mora oduzeti 1, 2, ili 3 kamenčića i time igraču koji je odigrao prije njega omogućiti pobjedu. Sada su 5, 6, i 7 S pozicije jer pobjednik može oduzeti 1, 2 ili 3 kamenčića tako da ostanu 4 kamenčića. 8 je P pozicija itd.

Uočimo niz P, S, S, S, P, S, S, S, P, S, S, S, P, S, S... (kraće ćemo ga zapisivati: PSSSPSSSPSSSPSS...) koji je pridružen nizu prirodnih brojeva 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ..., 26.

Uočimo da iz svake S pozicije barem jedan potez vodi u P poziciju, dok je iz P pozicije svaki potez u S poziciju i P pozicija je konačna pozicija jer je to pozicija pobjednika, tj. onaj koji uspije protivnika staviti u tu poziciju, pobjeđuje.

U našem je nizu broj n pridružen P poziciji ako je djeljiv s 4 ($n \equiv 0 \pmod{4}$), dok je broj n koji nije djeljiv s 4 ($n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$) pridružen S poziciji.

Budući da je na početku broj kamenčića 26 i ostatak pri dijeljenju 26 s 4 je 2, tj. $26 \equiv 2 \pmod{4}$, to je S pozicija. Igrač koji je prvi na potezu ima pobjedničku strategiju tako što oduzme 2 kamenčića i ostavi ih 24 na hrpi, $24 \equiv 0 \pmod{4}$, te tako stavlja drugog igrača u P poziciju koja je za njega gubitnička.

Odredimo oznake za pojedine skupove u ovom i budućim primjerima s oduzimanjem:

Skup svih brojeva koliko igrač na potezu može oduzeti je $O = \{1, 2, 3\}$.

Skup P pozicija je $P = \{0, 4, 8, \dots\}$, tj. $P = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 0 \pmod{4}\}$.

Skup S pozicija je $S = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, \dots\}$, tj. $S = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}\}$.

Također istaknimo:

1. Konačna pozicija je P pozicija.
2. Iz svake S pozicije barem jedno oduzimanje vodi u P poziciju.
3. Iz P pozicije svako oduzimanje vodi u S poziciju.

Primjer 2. Igra počinje sa 100 kamenčića na stolu, igraju dva grača tako da naizmjenice svaki mora oduzeti 1, 3, 5 ili 7 kamenčića s hrpe na stolu. Jedan od dva igrača zna odabrati pobjedničku strategiju, hoće li odabrati da počne kao prvi ili kao drugi?

Rješenje:

1. Označimo skup $O = \{1, 3, 5, 7\}$.

2. Kao i u prvom primjeru, krenimo unazad ispisujući niz P i S pozicija: P S P S P S S S P S P S S S S P S P S S S S..., iz niza možemo uočiti periodičnost, tj. nakon 9. člana u nizu počinje ponavljanje niza, sada iz periodičnosti možemo odrediti skupove pozicija:

$$P = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 0, 2, 4 \pmod{9}\};$$

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 1, 3, 5, 6, 7, 8 \pmod{9}\}.$$

Budući da je $100 \equiv 1 \pmod{9}$ to je S pozicija, te dobrom strategijom prvi igrač pobjeđuje.

Primjer 3. Za sljedeće skupove O odredi skupove P i S:

a) $O = \{1, 2, 3, \dots, k\};$

Rješenje:

Ovo je poopćenje 1. primjera. Rješenja su:

$$P = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 0 \pmod{(k+1)}\} \text{ i } S = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 1, 2, \dots, k \pmod{(k+1)}\}.$$

b) $O = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$, igrač oduzima 1 kamenčić ili prost broj kamenčića;

Rješenje:

Kako su 1, 2, i 3 u skupu O, analiza je ista kao i u 1. primjeru, pa su rješenja:

$$P = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 0 \pmod{4}\} \text{ i } S = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}\}.$$

c) $O = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$, tj. igrač može oduzeti 2^k kamenčića za $k \in \mathbb{N}_0$.

Rješenje:

Izravnom provjerom dobiva se niz: P S S P S S P S S P..., iz kojega odredimo skupove pozicija: $P = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 0 \pmod{3}\}$ i $S = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 1, 2 \pmod{3}\}$.

Dokaz: $2^k \equiv 1, 2 \pmod{3}$; za $\forall k \in \mathbb{N}_0$, i $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$; za $\forall n \in \mathbb{N}_0$, dakle svaki potez iz P pozicije vodi u S poziciju jer je tada $n - 2^k \equiv 1, 2 \pmod{3}$, i za svaki n iz S pozicije postoji k za koji je $n - 2^k \equiv 0 \pmod{3}$.

d) $O = \{1, 3, 8\};$

Rješenje:

$$P = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 0, 2, 4, 6 \pmod{11}\};$$

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10 \pmod{11}\}.$$

e) $O = \{k, k+1, \dots, m-1, m\};$

Rješenje:

$$P = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv 0 \pmod{(k+m)}\};$$

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \equiv i \pmod{(k+m)}, i \neq 0\}.$$

3 Igra Nim

Najpoznatija igra s oduzimanjem je Nim: Na stolu su 3 hrpe kamenčića, dva igrača naizmjenično igraju tako da igrač koji je na potezu odabire jednu hrpu i iz nje makne (oduzme) koliko želi kamenčića, od jednog do cijele hrpe, pobjednik je onaj koji makne zadnji kamenčić. Neka su x , y i z brojevi kamenčića u svakoj hrpi, zapišimo ih kao uređenu trojku (x, y, z) .

I u ovoj igri krenimo unazad, tj. od pobjede kada je stanje na stolu $(0, 0, 0)$, kao što znamo to je P pozicija, sljedeća P pozicija je $(0, 1, 1)$, ali i sve pozicije s jednakim brojem kamenčića na dvije hrpe dok je treća prazna tj. $(0, a, a)$, zato što se nakon smanjenja u jednoj od hrpa jednakost na obje postiže u sljedećem potezu.

Iz navedenih P pozicija proizlaze neke S pozicije, npr. $(0, 0, a)$, $(0, a, b)$..., iz kojih za igrača na potezu uvijek postoji oduzimanje za P poziciju.

Daljnje konstruiranje P pozicija dovodi nas do još nekih jednostavnijih primjera: $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(1, 8, 9)$, $(1, 10, 11)$, ... itd.

Charles L. Bouton 1902. godine u *The Annals of Mathematics* objavio je članak *Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory* u kojem opisuje pobjedničku strategiju u Nim igri.

Ta se strategija temelji na zapisu broja kamenčića u binarnom sustavu i *nim zbrajanju*.

Definirajmo *nim zbrajanje* dvaju prirodnih brojeva A i B :

$$A \oplus B = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_2 \oplus (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 = (c_m c_{m-1} \dots c_1 c_0)_2,$$

gdje je $c_p = a_p + b_p \bmod 2$, tj. $c_p = 1$ ako je $a_p + b_p = 1$ i $c_p = 0$ za $a_p + b_p = 0$ ili $a_p + b_p = 2$; $p = 0, 1, \dots, m$.

$$\text{Npr. } 54 \oplus 26 = (110110)_2 \oplus (11010)_2 = (101100)_2 = 44.$$

Nim zbrajanje više brojeva isto je kao i kod običnog zbrajanja. Svojstva komutativnosti i asocijativnosti vrijede za *nim zbrajanje* (lagano se provjere). Prema definiciji *nim zbrajanja* zbrojeve znamenki na odgovarajućim pozicijama zapišimo kao 0 ako je zbroj paran ili 1 ako je neparan.

Evo jednog primjera iz S pozicije $(11, 26, 54)$, zapišimo te brojeve u binarnom sustavu: $54 = (110110)_2$, $26 = (11010)_2$, i $11 = (110110)_2$ i zbrojimo ih *nim zbrajanjem*.

Jednostavan zapis zbroja pomoću standardnog potpisivanja:

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \oplus & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Napomena: ovo nije zbrajanje u binarnoj bazi, nego je ispod crte zapisan ostatak dijeljena zbroja jedinica iznad s 2, ali bez prijenosa količnika na više pozicijsko mjesto.

Kako su se ispod crte pojavile jedinice, to je S pozicija. Broj (hrpu) od kojega ćemo oduzeti odabiremo tako da u *nim zbroju* nađemo znamenku 1 na najvećoj poziciji te iznad nje sigurno imamo barem jednu znamenku 1, odaberemo jednu ako ih je više (koliko ih ima, toliko je različitih mogućnosti odabira hrpe s koje možemo oduzeti). Sada je red iz kojega je odabrana znamenka 1 odabrani broj,

u našem primjeru to je prvi red. Prvi broj zamijenit ćemo s 10001, dakle na svim mjestima u broju 110110 gdje su se ispod crte javile 1 promijenili smo 1 u 0 i 0 u 1 jer time mijenjamo parnosti u tim stupci i *nim zbroj* je 0. Novi zapisani broj u prvom redu je $(10001)_2 = 17$, dakle od prijašnjeg 54 treba oduzeti 37, tj. iz hrpe s 54 kamenčića oduzmemo ih 37. Nova pozicija (11, 26, 17) je P pozicija:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \oplus & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Sada svaki potez iz ove P pozicije vodi u neku S poziciju i onaj koji sada igra gubi.

Nim za n hrpa: Neka su (x_1, x_2, \dots, x_n) brojevi kamenčića u svakoj od hrpa. Tada, kao i kod $n = 3$, prebacimo brojeve x_1, x_2, \dots, x_n u binarni sustav. Ako su zbrojevi u svim stupcima djeljivi s 2, to je P pozicija. Ili pomoć *nim zbrajanja*: (x_1, x_2, \dots, x_n) je P pozicija ako i samo ako je $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0$.

Mooreova Nim igra (Nim_k igra): Postavljeno je n hrpa kamenčića, zadan je broj k . Sada igrač na potezu mora iz svake od k proizvoljno odabranih hrpa oduzeti barem jedan kamenčić. Mooreov teorem daje dokaz P pozicije za Nim_k igru. Ukratko, neka su (x_1, x_2, \dots, x_n) brojevi kamenčića. Tada, kao i kod $k = 3$, prebacimo brojeve x_1, x_2, \dots, x_n u binarni sustav. Ako su zbrojevi u svim stupcima djeljivi s $k + 1$, to je P pozicija.

Fibonacci Nim: Kao i kod jednostavnog oduzimanja, imamo jednu hrpu s n kamenčića. Prvi igrač može oduzeti od 1 do $n - 1$ s hrpe. Označimo s $k_1 = n - 1$ koliko najviše smije oduzeti. Neka je prvi igrač u prvom potezu oduzeo r_1 , tada drugi igrač smije najviše oduzeti $k_2 = 2r_1$. Ovako se igra nastavlja s promjenjivim brojem koliko igrač na potezu najviše smije oduzeti. U m -tom potezu igrač smije najviše oduzeti $k_m = 2r_{m-1}$, pri čemu je r_{m-1} broj koliko je igrač prije njega oduzeo. Igra se igra do pobjede onog igrača koji je zadnji odigrao.

Primjer za $n = 26$. Sada u prvom potezu igrač smije najviše oduzeti $k_1 = 25$ kamenčića. Neka je prvi oduzeo $r_1 = 5$, tada drugi smije najviše oduzeti $k_2 = 2 \cdot 5 = 10$. Neka drugi oduzme $r_2 = 3$, tada prvi igrač smije oduzeti $k_3 = 2 \cdot 3 = 6$, itd.

U ovoj igri za otkrivanje P pozicija prirodan broj treba zapisati u Fibonaccijevom brojevnom sustavu.

Za $f_1 = 1, f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ dobivamo Fibonaccijev niz 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Svaki prirodan broj možemo na jedinstven način prikazati kao zbroj različitih i neuzastopnih Fibonaccijevih brojeva (Zeckendorfov teorem).

Primjer $19 = 13 + 5 + 1$. Ovaj broj zapišimo u Fibonaccijevom brojevnom sustavu $19 = (101001)_f$, dakle 13 je najveća pozicija i tamo upišemo 1, na poziciji 8 je 0, na 5 je 1, na 3 i 2 su 0 i na kraju je 1. Označimo s F najnižu poziciju na kojoj je 1, za 19 je $F = f_1 = 1$, za 29 je $29 = (1010000)_f$ i $F = f_5 = 8$.

Za $k_m < F_m$, hrpa je u P poziciji. Dok je za $k_m \geq F_m$, u S poziciji. Oduzimanjem F_m kamenčića iz S pozicije dobiva se P pozicija.

Literatura

1. Charles L. Bouton, Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory, The Annals of Mathematics 1902.
2. Thomas S. Ferguson, Game Theory, Class notes for Math 167, Fall 2000.
3. Michael J. Whinihan, Fibonacci Nim, Fibonacci Quarterly 1963.