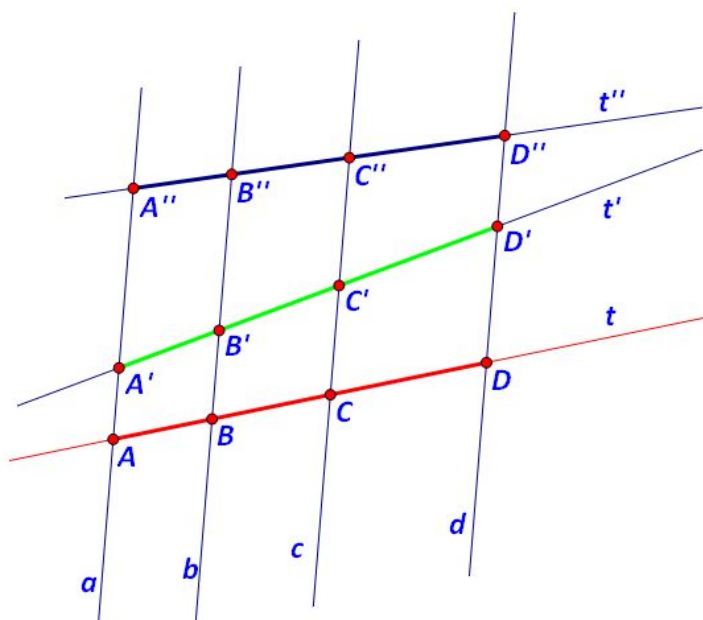


POTENCIJAL JEDNOG ZADATAKA

Često se pri rješavanju geometrijskih zadataka naglasak stavlja na samo određivanje traženog rješenja te se nižu slični zadaci u svrhu uvježbavanja određenih sadržaja. Umjesto da se, kada je jedan zadatak već riješen, sagledavaju i druge mogućnosti istog zadatka, kao i zadavanje tog zadatka na općenitijoj razini kako bi crpili što više njegovih potencijala, a geometrijska znanja povezivali u funkcionalnu cjelinu. Tako na primjer, ako se rješava zadatak vezan za jednakokranični trokut, korisnije je razmatrati pod kakvim uvjetima bi tvrdnja vrijedila za druge vrste trokuta ili uopće ne bi vrijedila nego riješiti nekoliko sličnih zadataka.

Kao alat u rješavanju nekoliko zadataka i njihovom višestrukom iscrpljivanju koristit će se neki teoremi o proporcionalnim dužinama i njihovi obrati:

Teorem 1 (O paralelnom projiciranju) : Ako tri ili više paralelnih pravaca na nekom pravcu t (presječnici) odsijecaju dvije ili više dužina, tada će svaka druga presječnica tih paralelnih pravaca sadržavati dužine za koje vrijedi: omjer dužina na novoj presječnici jednak je omjeru odgovarajućih dužina na prvoj presječnici. **(Paralelno projiciranje čuva omjer dužina.)**

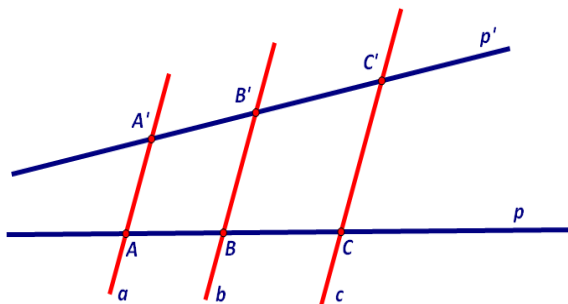


Ako je $|CD| = k \cdot |AB|$ tada je

$$|C'D'| = k \cdot |A'B'|$$

$$|C''D''| = k \cdot |A''B''|, \text{ itd.}$$

Teorem 2 (Talesov teorem o proporcionalnim dužinama): Neka su p i p' dva različita pravca ravnine, koja su presječena paralelnim pravcima a, b i c tako da je $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, $p \cap c = \{C\}$, $p' \cap a = \{A'\}$, $p' \cap b = \{B'\}$ i $p' \cap c = \{C'\}$. Tada vrijedi:



$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}, \text{ odnosno } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

Drugim riječima, paralelni pravci a , b i c na pravcima p i p' odsjecaju proporcionalne dužine.

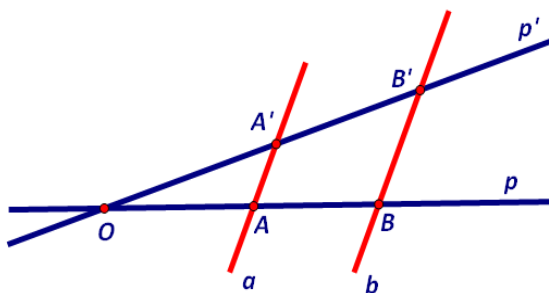
Poseban slučaj ovog teorema je **Talesov poučak o proporcionalnosti u pramenu pravaca**:

Teorem 3: Neka su p i p' dva pravca ravnine koja se sijeku u točki O . Ako su oni presječeni paralelnim pravcima a i b tako da je $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, $p' \cap a = \{A'\}$ i $p' \cap b = \{B'\}$, tada vrijedi:

$$(1) \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}$$

$$(2) \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

$$(3) \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$$



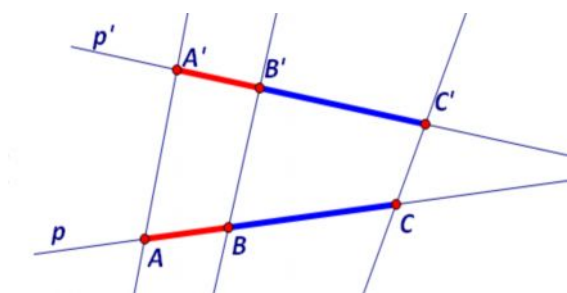
Kada govorimo o pravcima koji se sijeku tada se može promatrati i kut koji je određen polupravcima tih pravaca s početnom točkom O , koja je ujedno i vrh kuta. Zato se često u literaturi, posebno u udžbenicima iz matematike za osnovnu i srednju školu, Teorem 2 navodi u sljedećem obliku: **Paralelni pravci a i b na krakovima kuta $\angle pOp'$ odsjecaju proporcionalne dužine**, tj. vrijedi (1), (2) i (3).

Na temelju tvrdnji iskazanih u prethodnim teoremima, vršimo podijelu zadane dužine na određeni broj jednakih djelova.

Obrat Talesovog teorema o proporcionalnim dužinama: Neka su p i p' dva različita pravca ravnine. Odaberimo na pravcu p točke A , B , C , a na pravcu p' točke A' , B' i C' tako da vrijedi:

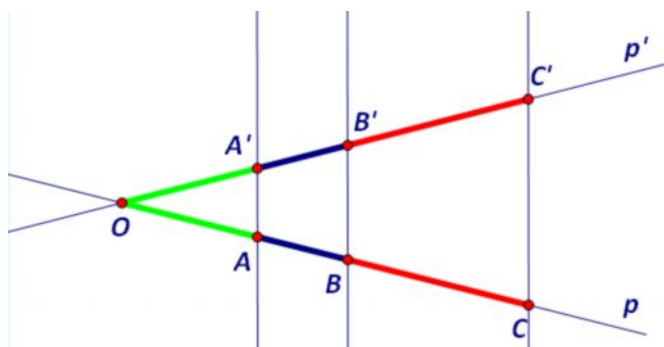
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}, \text{ odnosno } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

Tada su pravci određeni krajnjim točkama proporcionalnih dužina paralelni.



Na primjeru sa slike, gdje je $|AB| = 2 = |A'B'|$, a $|BC| = 4 \neq |B'C'|$ vidimo da obrat postavljen na ovaj način, općenito ne vrijedi.

No, ako uzmemo pravce p i p' koji se sijeku u točki O te proporcionalne dužine biramo počevši od točke sjecišta, tada će pravci određeni krajnjim točkama proporcionalnih dužina biti paralelni.



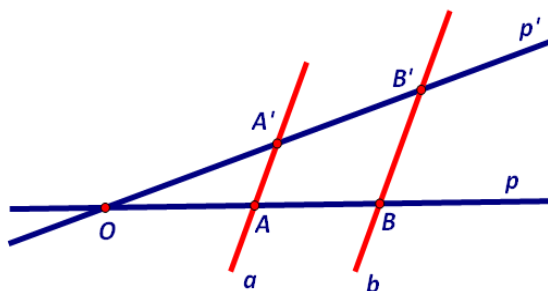
Na temelju prethodno opisanog može se postaviti obrat:

Teorem 4 (Obrat Talesovog poučak o proporcionalnosti u pramenu pravaca): Neka su p i p' dva pravca ravnine koja se sijeku u točki O . Ako ih pravci a i b sijeku u točkama: $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, $p' \cap a = \{A'\}$ i $p' \cap b = \{B'\}$ tako da vrijedi:

$$(1) \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}$$

$$(2) \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

$$(3) \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$$



Tada su pravci a i b paralelni.

Ako pravce p i p' gledamo kao krakove kuta $\angle pOp'$ onda se ovaj obrat kraće može izreći na sljedeći način: **Ako pravci na krakovima kuta odsjecaju proporcionalne dužine, onda su ti pravci paralelni.**

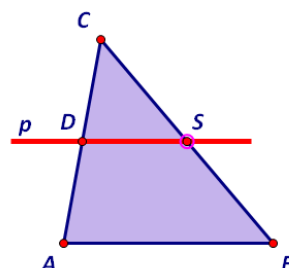
Spomenimo još kako se Talesov poučak o proporcionalnim dužinama odražava na trokut.

Teorem 5: Pravac paralelan jednoj stranici trokuta dijeli druge dvije stranice trokuta na jednake ili proporcionalne djelove.

Teorem 6 (Obrat teorema 5): Pravac koji dijeli dvije stranice trokuta na jednake ili proporcionalne djelove paralelan je s trećom stranicom.

Primjenimo li Teorem 1 na trokut i polovišta stranica, može se iskazati sljedeća tvrdnja: Ako polovištem jedne stranice trokuta povučemo pravac paralelan drugoj stranici trokuta tada će on sjeći treću stranicu trokuta u njezinom polovištu. Dužina kojoj su krajnje točke polovišta D i S je tada srednjica trokuta.

Ako je u trokutu $\triangle ABC$ $p \parallel \overline{AB}$ i polovište $D \in p$, tada je S polovište stranice \overline{BC} , pri čemu je $p \cap \overline{BC} = \{S\}$.



Vrlo korisnu relaciju vezanu za proporcionalne dužine, a koja će se koristiti u zadacima, daje sljedeći teorem:

Teorem 7: Neka su dane četiri dužine, duljina a, b, c i d. Ako je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ tada je $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

Opisani se teoremi u ovom radu ne dokazuju jer oni ovdje prvenstveno služe kao alat za rješavanje zadataka, uz pretpostavku da su dokazi tih teorema svima poznati.

Uz proporcionalne dužine prirodno se vezuje sukladnost i sličnost trokuta, ali se u ovim zadacima neće koristiti poučci o sukladnosti i sličnosti trokuta jer je to još jedan korak više, koji je u ovom kontekstu nepotreban budući se rješenja zadataka mogu izvesti temeljem prethodnih teorema i njihovih obrata.

Prikazi različitih mogućnosti jednog zadatka ovdje su dani kao primjer, ali oni nisu konačni već se mogu vršiti daljnja istraživanja i drugi načini rješavanja istih zadataka što se prepušta potrebama i mogućnostima primjene svakog nastavnika.