

Vizualizacija

Petar Mladinić, Zagreb

Uvod

Poznati matematičar i pedagog **George Polya** (1887. – 1985.) u knjizi *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb 2003. (koju je napisao 60-ih godina prošlog stoljeća) razmatra, između ostalog, i znanstveno-istraživački rad na razini srednje škole. On piše:

...Poučavanje matematike u srednjoj školi mora sadržavati upoznavanje učenika (naravno, u razumnim granicama) sa svim stranama matematičke djelatnosti.

... dobar učitelj, birajući odgovarajuće zadatke i izlažući ih na odgovarajući način, može čak i prosječnom učeniku dati nešto što je vrlo blisko samostalnom istraživanju. (str. 319.)

... Promatranje može dovesti do otkrića. Činjenica koja se regularno ponavlja ima cilj otkriti neku shemu ili zakon.

... Promatranje može poslužiti kao odskočna daska za poopćenje i stvaranje pretpostavki, no ono još nije dokaz.

... Ne zanemaruje analogije – one mogu dovesti do otkrića novih činjenica. (str. 331.)

... [Ovakav rad može] učenicima koristiti u tri smisla:

Prvo, ... kod učenika [može] razvijati osjećaj za matematiku jer ... otkriva mogućnosti za samostalan stvaralački rad.

Drugo, ... (može pobuditi interes većeg broja učenika) ... ne samo [za] matematiku, nego i [za] druge znanosti.

Treće, oni otkrivaju učenicima jedan jako važan aspekt matematike, a koji se rijetko spominje: matematička su pitanja ... tijesno povezana s drugim prirodnim, eksperimentalnim znanostima... (str. 332.-333.)

U NOK-u piše u *Primjena tehnologije* da će učenici moći:

- *istraživati i analizirati matematičke ideje, eksperimentirati s njima, te provjeravati pretpostavke*
- *pomoću džepnih računala i raznovrsnih računalnih programa, naročito programa dinamične geometrije*
- *i programa za izradu proračunskih tablica,*
- *racionalno i učinkovito rabiti džepno računalo za računanje i tehnologiju za prikupljanje, organiziranje, prikazivanje, prezentiranje i razmjenu podataka i informacija, za rješavanje problema i modeliranje, te u situacijama kojima su u središtu interesa matematičke ideje (u svrhu rasterećivanja od računanja i grafičkog prikazivanja),*

a u *Obliku i prostoru* da će moći:

- *rabiti koordinatne zapise točke, pravca i kružnice, te primijeniti koordinatnu geometriju za prikazivanje i istraživanje svojstava geometrijskih oblika,*

- prikazati vektore u ravnini, zbrajati ih, množiti skalarom, te primijeniti vektore i operacije s njima za prikazivanje i istraživanje svojstava geometrijskih oblika,
- prepoznati, opisati i primijeniti sukladnost i sličnost geometrijskih oblika,
- skicirati, opisati i interpretirati ravninske prikaze prostornih oblika,
- rabiti geometrijske transformacije ravnine za opisivanje pravilnosti i svojstava geometrijskih uzoraka,
- prepoznati ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnom okolišu i umjetnosti, te ih upotrijebiti za opis i analizu svijeta oko sebe.

Dinamična geometrija i dinamična algebra

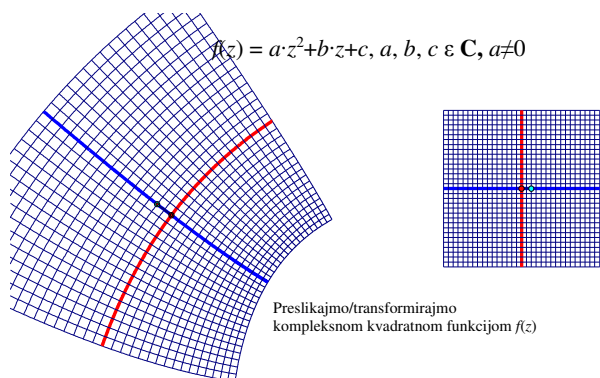
Software *Dinamične geometrije* i *Dinamične algebre* (nazivi koji su zaštićeni patentnim pravima autora GSP-a i ne bi ih smjeli uporabljivati autori drugih softwera) *The Geometer's Sketchpad* (inačice GSP4.07HR i GSP5 HR) omogućuje nam u današnjoj nastavi, na svim razinama poučavanja i učenja (od prvog razreda osnovne škole do viših godina fakulteta), ostvariti spomenute ideje/zahjebe.

Ilustrirat ćemo mogućnosti nastave u dva područja koja se poučavaju tek na kasnijim godinama studija, a mogu se lako i uspješno istraživati i otkrivati u srednjoj i osnovnoj školi.

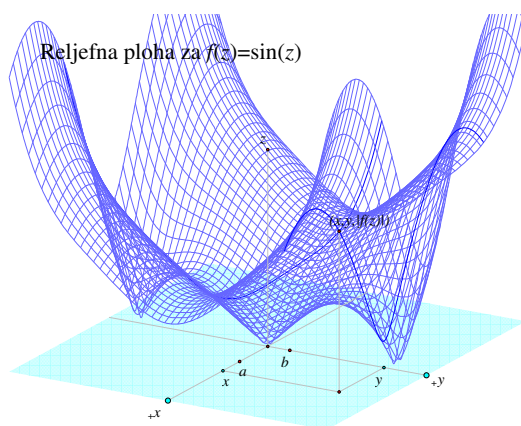
(Više primjera od ovdje spomenutih može se naći u ogromnom broju radova objavljenim širom svijeta. Ovdje ističem nekoliko posebno relevantnih adresa: <http://www.dynamicgeometry.com> , <http://sketchexchange.keypress.com/browse/> te <http://www.proven.hr/radovi/>)

Elementarne kompleksne funkcije studiraju se na višim godinama fakulteta u kolegiju *Kompleksna analiza*. Kompleksni brojevi i operacije s njima upoznaju se u 2., 3. i 4. razredu srednje škole. Elementarne realne funkcije upoznaju se u školovanju prije fakulteta.

Uporabom pojma lokusa ili transformacije vrlo se lako poopćava pojam elementarne realne funkcije, istražuju svojstva elementarnih kompleksnih funkcija i vizualizira ih se analogno vizualizaciji realnih funkcija. Dobiva se mogućnost uvida u probleme kompleksnih funkcija kao i primjena.



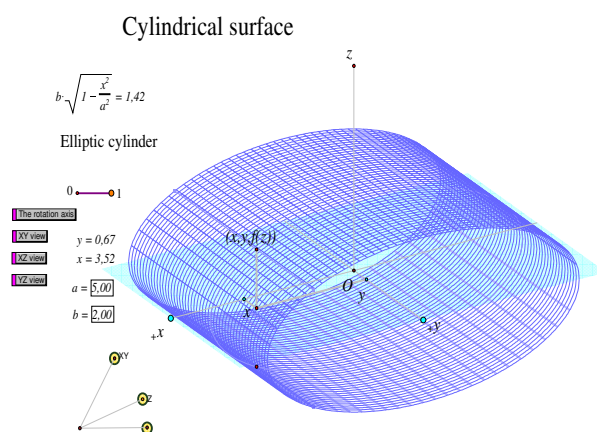
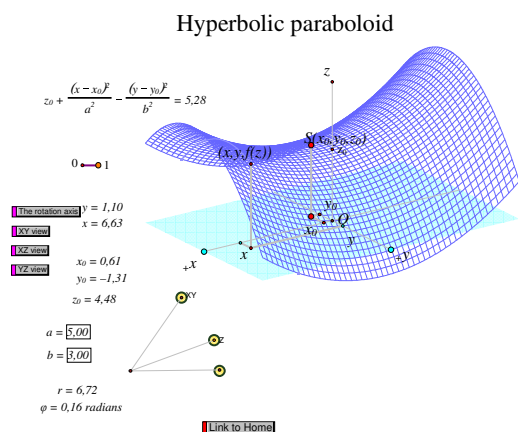
U fileu *Elementarne kompleksne funkcije* na adresi <http://sketchexchange.keypress.com/browse/topic/advanced-topic> omogućeno je istraživanje i otkrivanje svojstava tih funkcija kao i njihova vizualizacija pomoću tzv. reljefnih ploha. Sljedeće dvije slike ilustriraju istraživanje i vizualizaciju.



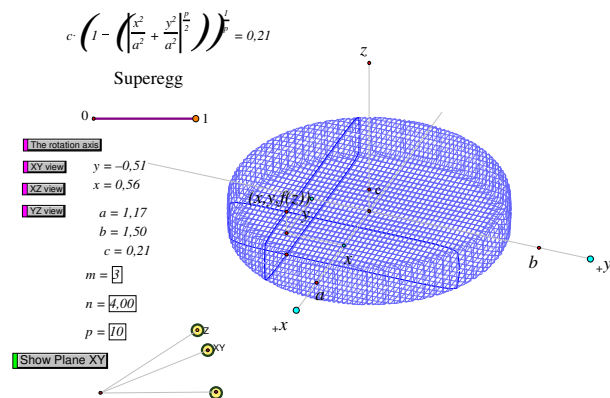
U fileima *Surfaces.gsp* i *Surfaces – second part.gsp* (na istoj adresi) proširen je pojam funkcije jedne varijable na funkciju dvije varijable. U vizualizaciji su povezani ravninska geometrija, 3D geometrija, analitička geometrija, nacrtna geometrija, diferencijalna geometrija tj. algebra s geometrijom. Istraživanje i otkrivanje svojstava funkcija istraživanjem njihovih dinamičnih geometrijskih prikaza je vrlo jednostavno i efikasno.

Poopćavanjem ravninskih krivulja i pojma funkcije uporabom analogija „kreiraju“ se mnoge (za učenike) nove hipoteze činjenica. Njihova dinamična vizualizacija i istraživanje daje dovoljno uvjerljivih argumanata za njihovo prihvaćanje ili odbacivanje.

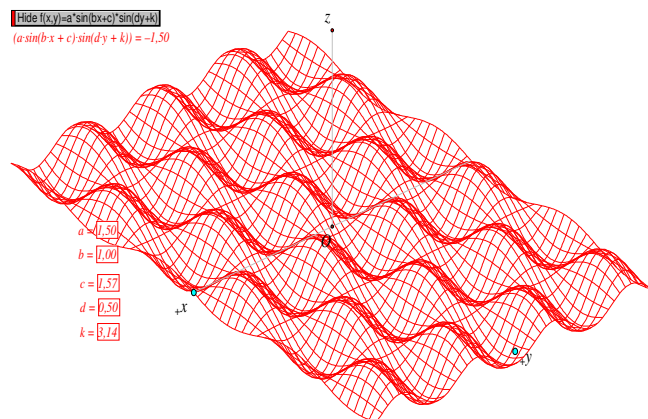
Evo nekoliko slika ploha iz spomenutih fileova kao ilustracija velikih istraživačkih mogućnosti i otkrivanja algebarskih svojstava funkcija proučavanjem njihovih geometrijskih vizualizacija. Posebice, ovakvim se načinom graf funkcije jedne varijable može interpretirati kao presjek definirane plohe i neke ravnine.



The Lamé surface

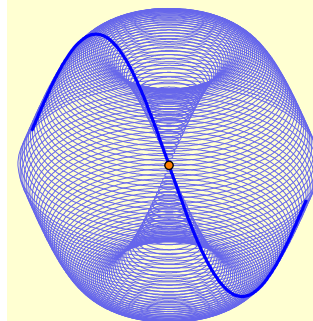


Examples of surfaces

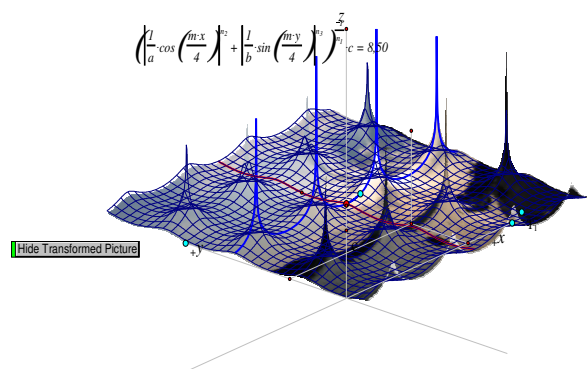


Surface of revolution

$$q(x) = 3 \cdot \sin(x)$$



The Gielis surface

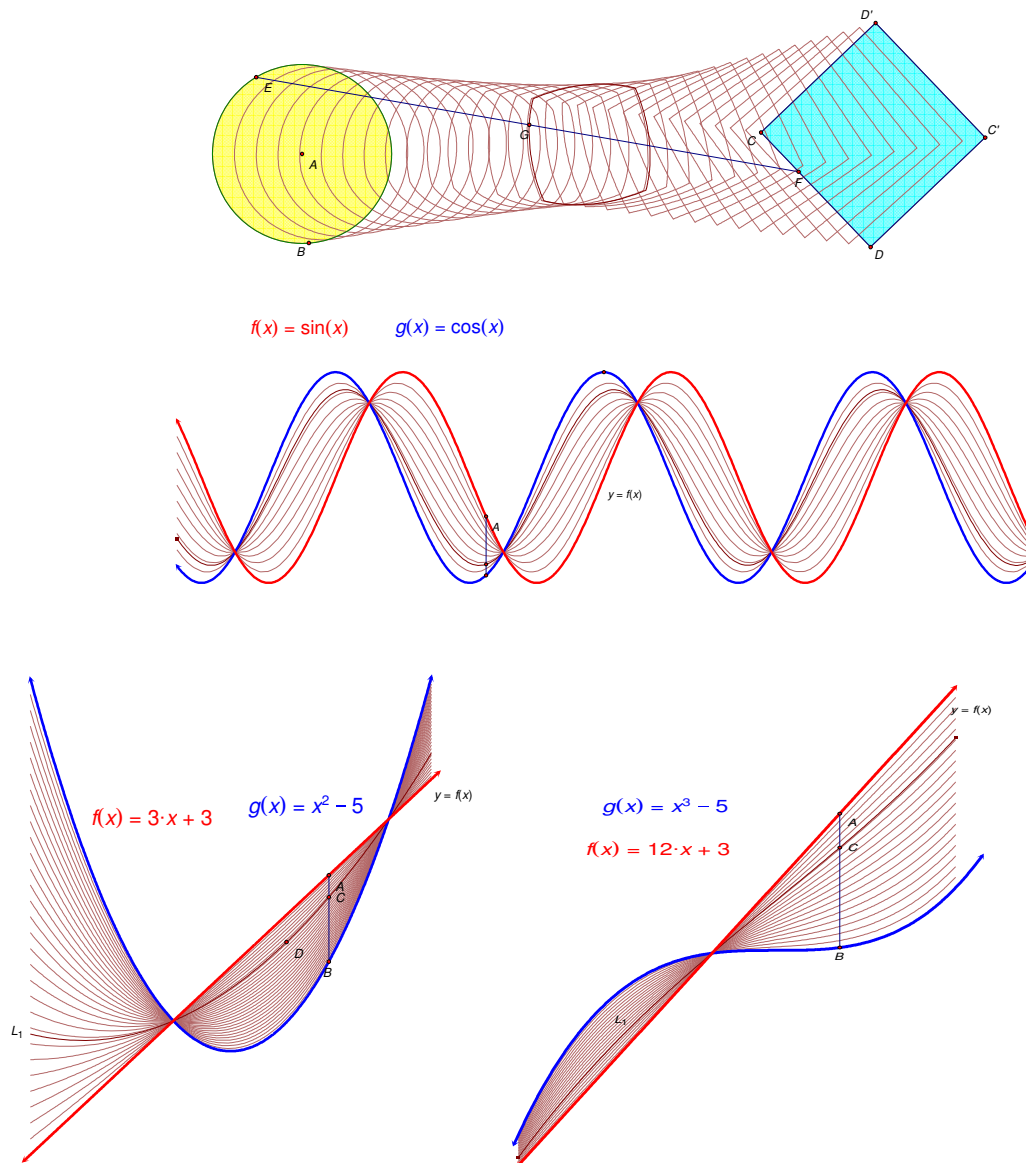


U realizaciji ovih vizualizacija uporabljena je temeljna ideja da se elementu/skupu/objektu po nekom pravilu (algebarski ili konstruktivno-geometrijski definiranom) pridruži drugi element/skup/objekt.

Dakle, realizirana je jedna od temeljnih ideja matematike – preslikavanje. Rezultat preslikavanja kao i svaka promjena na zaslonu su vidljivi u svakom trenutku.

* * * * *

Uporabom pojma *lokusa* i *familije krivulja* može se vizualizirati transformiranje, primjerice, kvadrata/poligona u krug, sinusoide u kosinusoidu, bilo kojeg pravca u parabolu (ili u graf bilo koje funkcije).



* * * * *

Ovakva ideja u skladu je i s nastavnim planom i programa u većini drugih zemalja. Primjerice, utjecajni *NCTM Standardi* to jezgrovito sažimaju u sljedećim odgovarajućim standardima za nastavne programe algebre i geometrije od vrtića do 4. razreda srednje škole

(<http://standards.nctm.org/document/chapter3/alg.htm>

<http://standards.nctm.org/document/chapter3/geom.htm>):

Učenici bi trebali biti uključeni tako da u:

a) *algebri*

- *koriste matematičke modele za prikazivanje i razumijevanje kvantitativnih odnosa;*

b) geometriji

- koristei vizualizaciju, prostorno zaključivanje i geometrijsko modeliranje za rješavanje problema.

Poznati metodičar i dizajner edukacijskog softwera Scott Steketee smatra da svi učenici *u algebri moraju imati priliku za stvaranje i manipuliranje geometrijskim funkcijama*. Vizualizacijom algebarskih funkcija učenici imaju mogućnost *mijenjati svoje varijable, izravno i kontinuirano, kreirati svoju matematiku, učiti o domeni, slici domene (kodomeni), familijama funkcija, komponiranju itd.* Na taj način mogu *koristiti različite reprezentacije apstraktnih pojmova, uzbudljivo i zabavno pronalaziti sliku procesuirane aplikacije i stjecati iskustvo povezanosti algebre i geometrije.*

Prijedlog ili zadatak

Na kraju ovog krokića, predlažem da se vizualizira komponiranje osnih simetrija. Učenici trebaju otkriti da se kao rezultat komponiranja uvijek dobiva jedna od izometrija ravnine (translacija, rotacija, centralna simetrija). Istraživanje se vodi prema otkrivanju veza između međusobnih položaja osi osne simetrije i dobivene/otkrivene izometrije. „Nadogradnja“ takvom istraživanju vodi prema otkriću strukture grupe. Retoričko je pitanje može li se to u osnovnoj i /ili srednjoj školi učiniti?

Zaključak

Pametnom uporabom „pametne tehnologije“ (poštujući savjete i ideje naših prethodnika i suvremenika) omogućeno nam je u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici realizirati osuvremenjivanje i sadržaja i metoda učenja i poučavanja. Dinamičnom vizualizacijom i snižavanjem razine apstrakcije matematičkih pojmova otvaraju se neslućene mogućnosti upoznavanja i prihvatanja matematike kao svakodnevnog i moćnog alata na svim razinama i područjima učenja i poučavanja.