

Nives Jozić, Split

Poreč, 26. travnja 2012.

Predavanje za mentore učenika-natjecatelja osnovnih škola

Nekoliko teorema i njihovih obrata u službi primjene

Povijesno gledano, geometrija je zaslužna za razvoj matematike kao znanstvene discipline i upravo zahvaljujući geometriji matematika ima veliki utjecaj na razvoj mnogih drugih znanstvenih disciplina (umjetnost, arhitektura, građevina...) kao i primjenjivost u svakodnevnom životu i radu (popločavanje, bojanje...). Prirodno bi bilo očekivati da geometrija zauzima značajno mjesto i u nastavi matematike. Ipak, mnogi geometriju ne vole učiti, ali mnogi je ne vole ni poučavati (vjerojatno kao posljedica prvoga).

Uzroci mogu biti brojni i raznovrsni, ali svakako je jedan od glavnih uzroka apstraktnost geometrijskih pojmova i nužnost povezivanja tih pojmova u jednu funkcionalnu cjelinu.

Prisjetimo se samo koliko je kompleksan geometrijski pojam KUT i da mnogi učenici završe čak i srednjoškolsko obrzovanje, a da nisu u mogućnosti izreći preciznu definiciju tog pojma iako tijekom cijelog tog obrazovanja vrše određivanje veličine kutova, vrijednosti trigonometrijskih funkcija za zadane veličine kutova, određuju veličine kutova između pravaca, ravnina itd. Drugim riječima, sami geometrijski pojmovi predstavljaju teškoću gotovo svim učenicima, a opisivanje njihovih svojstva teoremima te dokazivanje istih, neki učenici gotovo nikada ne savladaju. Posebne teškoće učenici imaju pri izricanju obrata teorema te spoznavanju da iako je teorem istinit, obrat ne mora biti. Prirodna posljedica toga je da se učenici ne snalaze najbolje ni u zadacima koji se rješavaju primjenom tih teorema i njihovih obrata.

Budući da za neke teoreme obrat vrijedi, a za neke ne vrijedi, korisno je pri izricanju teorema postavljati i njegov obrat te ispitivati istinitost tvrdjenja (u oba smjera). Teoremi koji vrijede u oba smjera najčešće se zapisuju kao jedan teorem uz uporabu riječi ako i samo ako (AKKO) ili onda i samo onda. U tim slučajevima obrat se još više zanemaruje jer se pri njegovom korištenju poziva na teorem, a ne na tvrdnju ili njezin obrat te učenici često niti ne uviđaju da se radi o tvrdnji i obratu.

Na temelju definicije, nekih teorema o paralelogramima i njihovim obratima izvest će se dokaz teorema o srednjici trokuta, a za dokaz obrata koristi će se teorem o proporcionalnim dužinama.

PARALELOGRAMI

Kako bi teoremima iskazali svojstva nekog pojma i veze među njima, potrebno je najprije uvesti definiciju tog pojma, a zatim proučavati ostala svojstva svih objekata iz opsega tog pojma. Budući je definicija stvar dogovora, najčešće se za definiciju paralelograma uzima obilježje paralelnosti po čemu je uzet i sam naziv *paralelogram*.

Definicija: Četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne nazivamo **paralelogram**.

Sada ostala svojstva paralelograma iskazujemo teoremima čije se tvrdnje potom i dokazuju. Ovdje se nećemo baviti dokazima svih teorema, uz pretpostavku da su oni poznati, već ćemo se teoremima i njihovim obratima služiti u rješavanju zadataka.

Teorem 1 (Teorem o stranicama paralelograma): Nasuprotne stranice paralelograma su jednake duljine.

Obrat teorema 1: Četverokut kojemu su nasuprotne stranice jednake duljine jest paralelogram.

Teorem 2 (Teorem o dijagonalama paralelograma): Dijagonale paralelograma se međusobno raspolavljaju.

Obrat teorema 2: Četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju jest paralelogram.

Teorem 3 (Teorem o kutovima paralelograma): Nasuprotni kutovi paralelograma su jednake veličine, a susjedni kutovi su suplementarni.

Obrat teorema 3: Četverokut kojemu su nasuprotni kutovi jednake veličine, a susjedni kutovi suplementarni jest paralelogram.

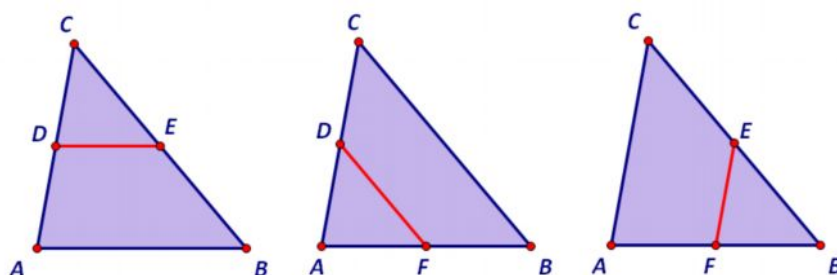
Napomena: Često sam način izricanja teorema može predstavljati problem iščitavanja potrebnih podataka. Naime, svaki teorem se sastoji od pretpostavke i tvrdnje te nije uvijek pravilo da je pretpostavka iskazana u prvom dijelu rečenice, a tvrdnja u drugom kao jedan logičan slijed. Kako bi se izbjegli nesporazumi pri izricanju i čitanju teorema, uz pretpostavku se može koristiti **ako je...**, a uz tvrdnju **tada je...** ili **onda je...** i tako učenike pomalo navikavati na pravilnu interpretaciju podataka.

SREDNJICA TROKUTA

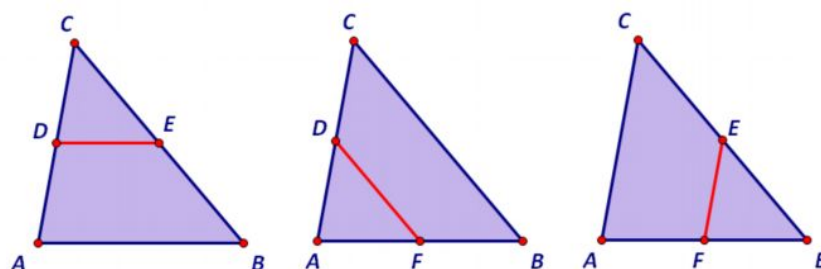
Definicija: Srednjica trokuta je dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta.

Jasno je da trokut ima tri srednjice.

Na slici su prikazane srednjice \overline{DE} , \overline{DF} i \overline{EF} trokuta $\triangle ABC$.



Teorem 4 (Teorem o srednjici trokuta): Srednjica trokuta usporedna je sa trećom stranicom trokuta, a njezina duljina jednaka je polovini duljine treće stranice.



$$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$$

$$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$$

$$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$$

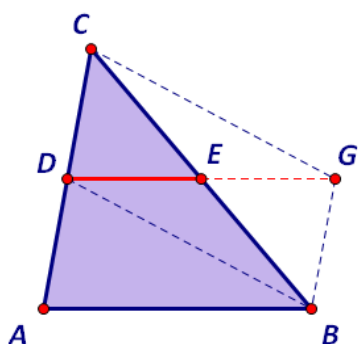
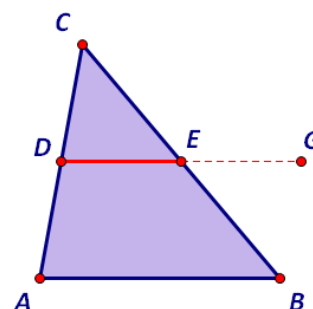
$$|DE| = \frac{1}{2} |AB|$$

$$|DF| = \frac{1}{2} |BC|$$

$$|EF| = \frac{1}{2} |AC|$$

Dokaz teorem 4. Neka je dan trokut $\triangle ABC$ i njegova srednjica \overline{DE} , pri čemu je D polovište stranice \overline{AC} , a E polovište stranice \overline{BC} .

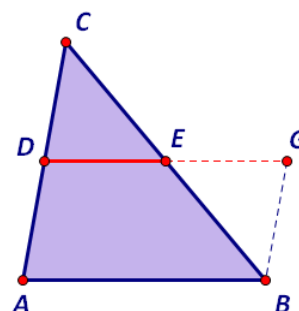
Srednjicu \overline{DE} produljimo preko točke E do točke G tako da je $|EG| = |DE|$. To znači da je točka E polovište dužina \overline{DG} i \overline{BC} , tj. točka E raspolavlja te dvije dužine.



Uočimo četverokut DBGC. Budući se njegove dijagonale \overline{DG} i \overline{BC} raspolavljaju, prema **Obratu 2**, taj četverokut je paralelogram. Prema **Teoremu 1** je $|BG| = |DC|$, a prema definiciji paralelograma te stranice su i paralelne. Kako je točka D polovište stranice \overline{AC} , to je $|DC| = |AD|$ te na temelju svojstva tranzitivnosti zaključujemo da je $|BG| = |AD|$.

Sada na temelju **Obratu 1** zaključujemo da je i četverokut ABGD paralelogram te su i njegove druge dvije stranice paralelne, tj. $\overline{DG} \parallel \overline{AB}$. Stoga je i $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Prema

Teoremu 1 je $|\overline{DG}| = |\overline{AB}|$ te je $|\overline{DE}| = \frac{1}{2}|\overline{DG}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$. ■

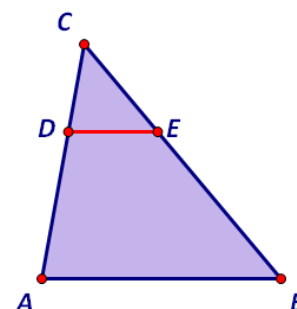


Obrat teorema 4 (Obrat teorema o srednjici trokuta): Ako je dužina, čije krajnje točke pripadaju dvjema stranicama trokuta, usporedna s trećom stranicom trokuta i njezina duljina je jednaka polovini duljine treće stranice tada su krajnje točke te dužine polovišta pripadnih stranica, tj. ta dužina je srednjica trokuta.

Dokaz obrata 4. Dokaz ovog teorema temelji se na posebnom slučaju Talesovog teoremu o proporcionalnim dužinama, koji je iskazan nešto kasnije u **Teoremu 5**.

Nake je zadan trokut $\triangle ABC$ i dužina \overline{DE} koja ispunjava uvjete teorema:

- krajnje točke joj pripadaju dvjema stranicama: $D \in \overline{AC}, E \in \overline{BC}$
- $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$
- $|\overline{DE}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$



Promatrajmo kut $\angle ACB$. Prema **Teoremu 5**, paralelni pravci \overline{AB} i \overline{DE} na krakovima tog kuta odsjecaju proporcionalne dužine, pa imamo:

$|\overline{AC}| : |\overline{DC}| = |\overline{AB}| : |\overline{DE}| = 2|\overline{DE}| : |\overline{DE}| = 2 : 1$ što znači da je točka D polovište stranice \overline{AC} .

Nadalje je: $|\overline{BC}| : |\overline{EC}| = |\overline{AC}| : |\overline{DC}| = 2 : 1$ što znači da je točka E polovište stranice \overline{BC} .

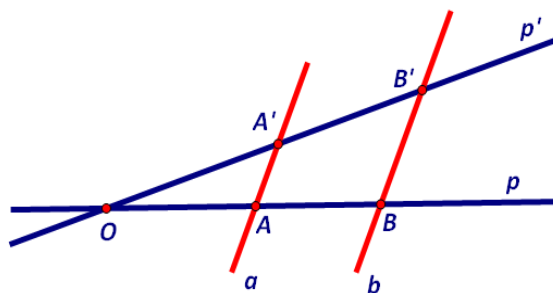
Prema tome, dužina \overline{DE} je srednjica trokuta. ■

Teorem 5. (Talesov poučak o proporcionalnosti u pramenu pravaca): Neka su p i p' dva pravca ravnine koja se sijeku u točki O. Ako su oni presječeni paralelnim pravcima a i b tako da je $p \cap a = \{A\}, p \cap b = \{B\}, p' \cap a = \{A'\}$ i $p' \cap b = \{B'\}$, tada vrijedi:

$$(1) \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{OA'}|}{|\overline{OB'}|}$$

$$(2) \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

$$(3) \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$$



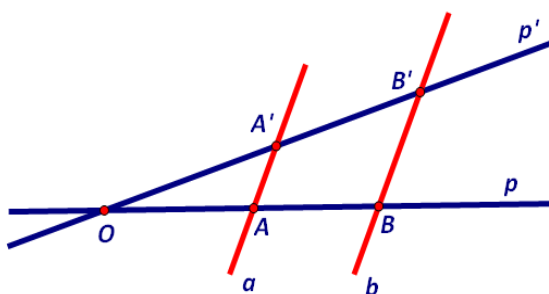
Kada govorimo o pravcima koji se sijeku tada se može promatrati i kut koji je određen polupravcima tih pravaca s početnom točkom O, koja je ujedno i vrh kuta. Zato se često u literaturi, posebno u udžbenicima iz matematike za osnovnu i srednju školu, Teorem 6 navodi u sljedećem obliku: **Paralelni pravci a i b na krakovima kuta $\angle pOp'$ odsjecaju proporcionalne dužine**, tj. vrijedi (1), (2) i (3).

Teorem 6 (Obrat Talesovog poučak o proporcionalnosti u pramenu pravaca): Neka su p i p' dva pravca ravnine koja se sijeku u točki O. Ako ih pravci a i b sijeku u točkama: $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, $p' \cap a = \{A'\}$ i $p' \cap b = \{B'\}$ tako da vrijedi:

$$(1) \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}$$

$$(2) \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

$$(3) \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$$



Tada su pravci a i b paralelni.

Ako pravce p i p' gledamo kao krakove kuta $\angle pOp'$ onda se ovaj obrat kraće može izreći na sljedeći način: **Ako pravci na krakovima kuta odsjecaju proporcionalne dužine, onda su ti pravci paralelni.**

U nastavi matematike osnovne škole **Teorem 5** se najčešće koristi pri određivanju četvrte veličine iz neke proporcije, a kada se nešto treba dokazati uglavnom se poseže za teoremima o sličnosti trokuta. **Teorem 6** se vrlo rijetko koristi.

U nekoliko zadataka biti će prikazano kako se ovi teoremi i njihovi obrati mogu koristiti, a da se uopće ne poseže za sličnošću trokuta.