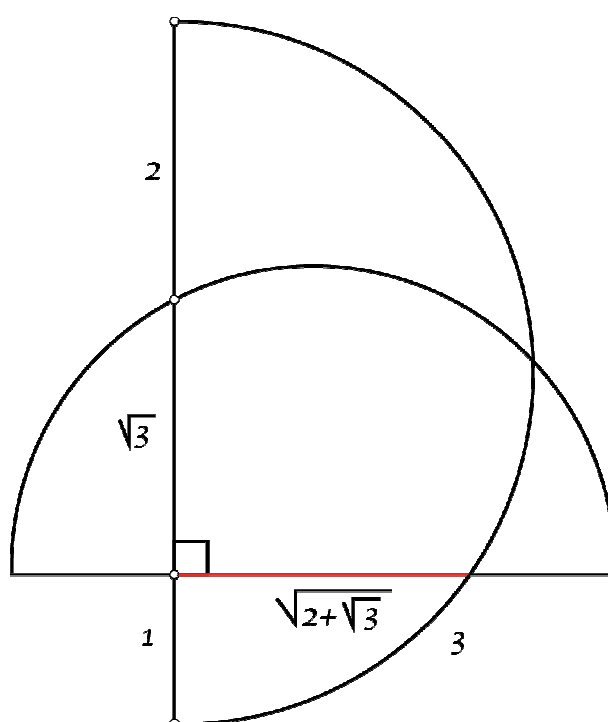


KONSTRUKCIJA DRUGOG KORIJENA



Branko Škiljan
OŠ „Podrute“

Poreč, 24.-27. IV. 2012.

KONSTRUKCIJA DRUGOG KORIJENA

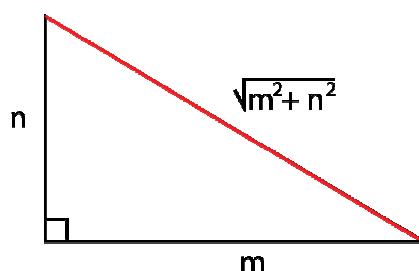
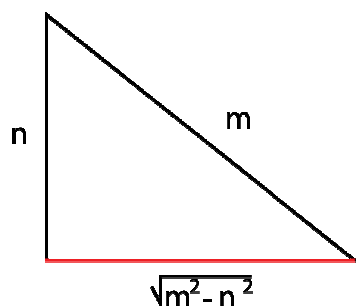
Kako sa što manje lutanja, a na više načina konstruirati dužinu čija je duljina iracionalni broj \sqrt{a} ? U daljnjem tekstu konstrukcija \sqrt{a} . Radikand a je prirodni broj, no može biti racionalan i iracionalan.

Analizirati ćemo slučajeve u kojima je radikand a manji od 100.

A- Primjena Pitagorina poučka

Ako radikand a možemo prikazati u obliku zbroja ili razlike kvadrata dva prirodna broja, onda se konstrukcija \sqrt{a} primjenom Pitagorina poučka odvija u jednom koraku.

$$a = m^2 - n^2 \quad \text{ili} \quad a = m^2 + n^2, \quad a, m, n \in \mathbb{N}$$



Je li moguće svaki prirodni broj prikazati u obliku zbroja ili razlike kvadrata dva prirodna broja, tj. je li moguće konstruirati svaku dužinu duljine \sqrt{a} primjenjujući Pitagorin poučak samo u jednom koraku?

Ako nije moguće, za koje brojeve i kako teče konstrukcija?

Strategija.

Podijelimo li skup svih prirodnih brojeva na četiri disjunktne skupa po kriteriju djeljivosti, imamo:

Skup prostih brojeva: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

Skup složenih neparnih brojeva: $\{15, 21, 27, 33, 35, \dots\}$

Skup prirodnih brojeva djeljivih s 4: $\{8, 12, 20, 24, 28, \dots\}$

Skup prirodnih brojeva čiji rastav ima jedan faktor 2: $\{6, 10, 14, 18, 22, 26, \dots\}$

Konstrukcija \sqrt{a} kad je a neparan broj

Razlikujemo dva slučaja:

1. radikand je prost broj
2. radikand je složen broj.

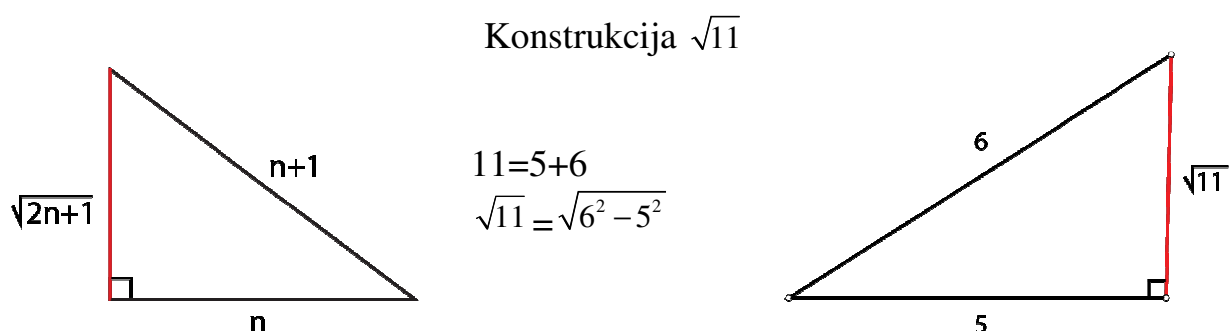
Svaki neparni prirodni broj možemo prikazati kao razliku kvadrata dva uzastopna prirodna broja.

n i $n+1$ su dva uzastopna prirodna broja

Vrijedi:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Kako je $2n+1=n+n+1$, odnosno svaki neparni prirodni broj jednak je zbroju dva uzastopna prirodna broja.



Radikand je prost broj

Kako prosti brojevi imaju samo dva djelitelja, kao razliku kvadrata dva prirodna broja, možemo ih prikazati na samo jedan način.

p – prost broj

$$p = p \cdot 1$$

$$p = a^2 - b^2$$

$$p = (a+b)(a-b)$$

$$a+b=p$$

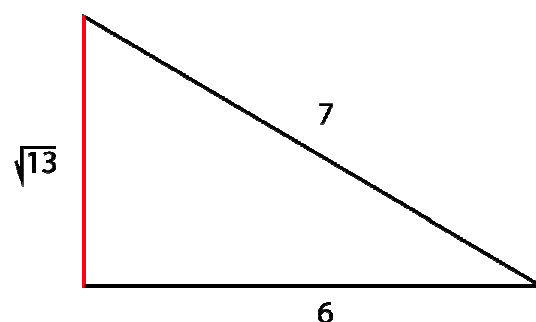
$$a-b=1$$

$$a = \frac{p+1}{2} \quad b = \frac{p-1}{2}$$

Konstrukcija $\sqrt{13}$

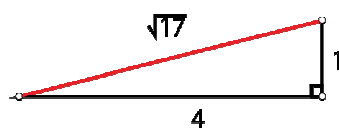
$$a = \frac{13+1}{2} = 7$$

$$b = \frac{13-1}{2} = 6$$

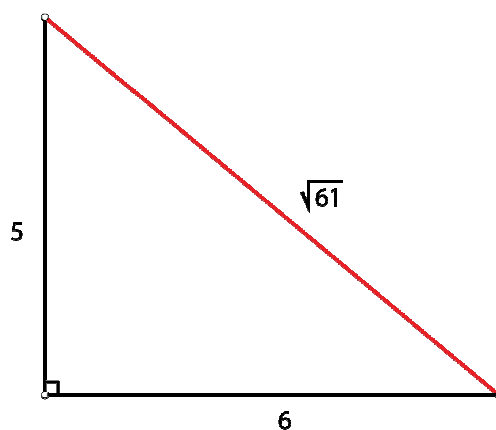


Neke proste brojeve možemo prikazati i u obliku zbroja kvadrata dva prirodna broja.

Konstrukcija $\sqrt{17}$



Konstrukcija $\sqrt{61}$



Radikand je složen neparan broj

Složene neparne brojeve možemo prikazati u obliku razlike kvadrata dva prirodna broja na barem dva načina.

$$2n+1 = (2n+1) \cdot 1 \quad 1^\circ$$

$$= p \cdot q \quad 2^\circ$$

$$= r \cdot s \quad 3^\circ$$

...

$$1^\circ \quad \begin{aligned} a^2 - b^2 &= 2n+1 \\ (a+b)(a-b) &= 2n+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 2n+1 \\ \underline{a-b} &= 1 \end{aligned}$$

$$a = \frac{2n+2}{2} = n+1$$

$$b = \frac{2n-1}{2} = n-1$$

$$2^\circ \quad (a+b)(a-b) = p \cdot q$$

$$\begin{aligned} a+b &= p \\ \underline{a-b} &= q \end{aligned}$$

$$a = \frac{p+q}{2}$$

$$b = \frac{p-q}{2}$$

$$3^\circ \quad (a+b)(a-b) = r \cdot s \quad \dots$$

$$\begin{aligned} a+b &= r \\ \underline{a-b} &= s \end{aligned}$$

$$a = \frac{r+s}{2}$$

$$b = \frac{r-s}{2}$$

Primjer: Konstrukcija $\sqrt{45}$

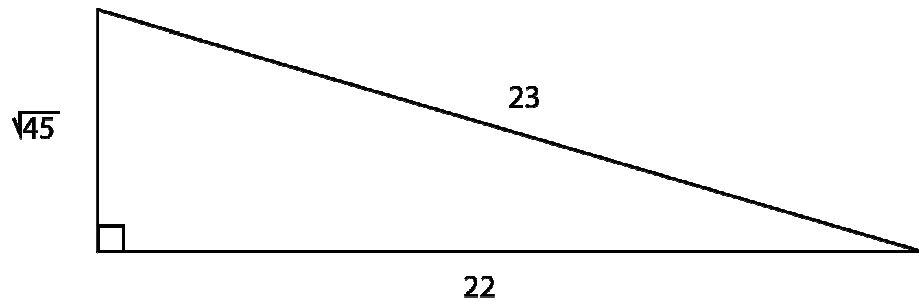
$$\begin{aligned} 45 &= 45 \cdot 1 \\ &= 15 \cdot 3 \\ &= 9 \cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad a+b &= 45 \\ \underline{a-b} &= 1 \\ a &= 23 \\ b &= 22 \end{aligned}$$

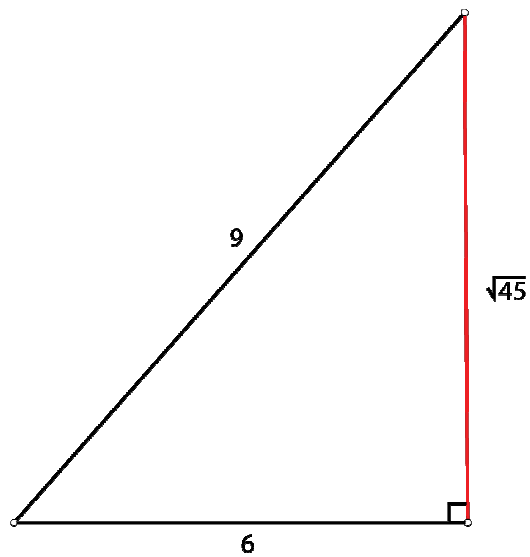
$$\begin{aligned} 2^\circ \quad a+b &= 15 \\ \underline{a-b} &= 3 \\ a &= 9 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ \quad a+b &= 9 \\ \underline{a-b} &= 5 \\ a &= 7 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

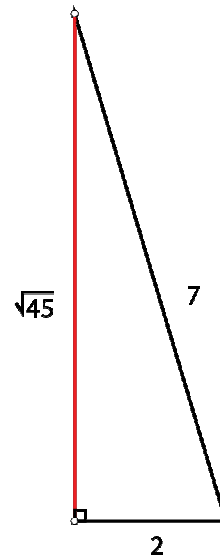
Slika 1.



Slika 2.

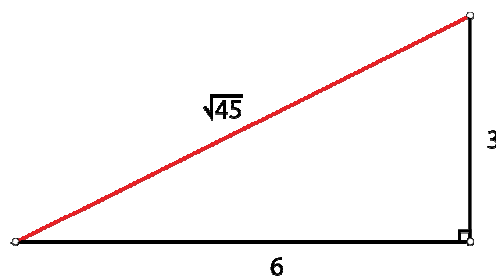


Slika 3.



Broj 45 možemo prikazati i kao zbroj kvadrata dva prirodna broja.

$$\sqrt{45} = \sqrt{6^2 + 3^2}$$



Konstrukcija \sqrt{a} kad je radikand paran broj

Opet razlikujemo dva slučaja:

1. Radikand je djeljiv s 4
2. Radikand u svom rastavu ima jedan faktor 2

U prvom slučaju broj je oblika $4n$, $n \in \mathbb{N}$.

Svaki takav broj možemo prikazati u obliku razlike kvadrata dva prirodna broja.

$$4n = 2n \cdot 2$$

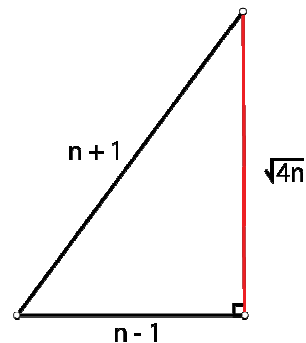
$$\begin{aligned} 4n &= a^2 - b^2 \\ &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

$$a+b=2n$$

$$\underline{a-b=2}$$

$$a=n+1$$

$$b=n-1$$



Primjer: Konstrukcija $\sqrt{12}$

$$12 = 6 \cdot 2$$

$$4n = 12$$

$$n = 3$$

$$a+b=6$$

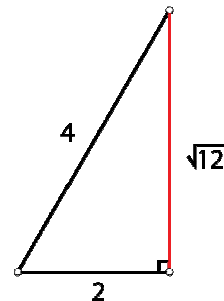
$$n+1=4$$

$$\underline{a-b=2}$$

$$n-1=2$$

$$a=4$$

$$b=2$$



Primjer: Konstrukcija $\sqrt{96}$

$$96 = 48 \cdot 2$$

$$1^\circ \quad a+b=48$$

$$2^\circ \quad a+b=24$$

$$3^\circ \quad a+b=12$$

$$4^\circ \quad a+b=16$$

$$= 24 \cdot 4$$

$$\underline{a-b=2}$$

$$\underline{a-b=4}$$

$$\underline{a-b=8}$$

$$\underline{a-b=6}$$

$$= 6 \cdot 16$$

$$b=23$$

$$b=10$$

$$b=2$$

$$a=11$$

$$= 12 \cdot 8$$

$$a=25$$

$$a=14$$

$$a=10$$

$$b=5$$

Broj načina na koji se $4n$ može prikazati kao razlika kvadrata dva prirodna broja ovisi o broju prim faktora 2. Ako u rastavu broja ima n faktora 2, onda taj broj možemo prikazati kao razliku kvadrata dva prirodna broja na $n-1$ način.

Broj 44 – 2 prim faktora 2 – 1 način
 Broj 56 - 3 prim faktora 2 - 2 načina
 Broj 80 - 4 prim faktora 2 – 3 načina
 Broj 96 – 5 prim faktora 2 – 4 načina

Broj $4n$ možemo prikazati kao razliku kvadrata dva prirodna broja ako su a i b iste parnosti

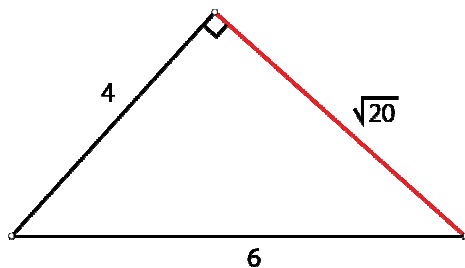
1° a i b su parni

$$\begin{aligned} a &= 2p \\ b &= 2q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4n &= (2p)^2 - (2q)^2 \\ &= 4p^2 - 4q^2 \end{aligned}$$

Konstrukcija $\sqrt{20}$

$$20 = 6^2 - 4^2$$



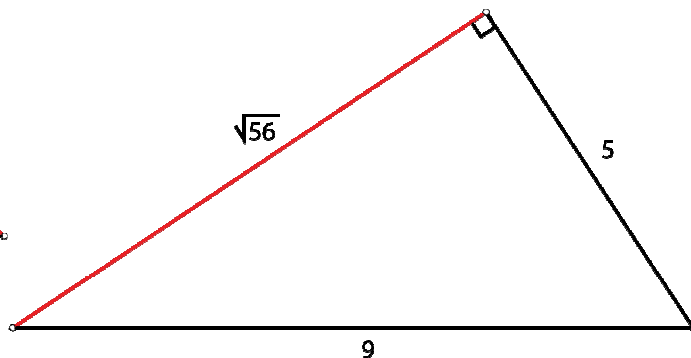
2° a i b su neparni

$$\begin{aligned} a &= 2p+1 \\ b &= 2q+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4n &= (2p+1)^2 - (2q+1)^2 \\ &= 4p^2 + 4p + 1 - 4q^2 - 4q - 1 \\ &= 4p^2 + 4p - 4q^2 - 4q \end{aligned}$$

Konstrukcija $\sqrt{56}$

$$56 = 9^2 - 5^2$$



Prikaz broja $4n$ kao zbroj kvadrata dva prirodna broja.

1° a i b su parni .

2° a i b su neparni

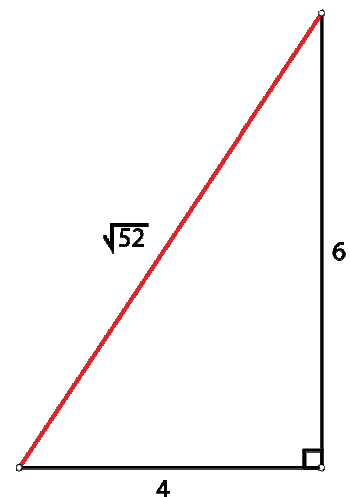
$$\begin{aligned} a &= 2p \\ b &= 2q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2p+1 \\ b &= 2q+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4n &= a^2 + b^2 \\ 4n &= (2p)^2 + (2q)^2 \\ 4n &= 4p^2 + 4q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4n &= (2p+1)^2 + (2q+1)^2 \\ 4n &= 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1 \\ 4n &= 4p^2 + 4p + 4q^2 + 4q + 2 \end{aligned}$$

Kao zbroj kvadrata $4n$ možemo prikazati samo ako su a i b parni.



Radikand u rastavu ima samo jedan faktor 2

To su brojevi oblika $2n$, gdje je broj n neparan broj.

$$2n = 2n \cdot 1 \quad \text{ili} \quad 2n = n \cdot 2$$

$$2n = a^2 - b^2$$

$$a - b = 2$$

$$\underline{a + b = n}$$

$$2n = (a + b)(a - b)$$

$$a = \frac{n+2}{2} \notin \mathbb{N}$$

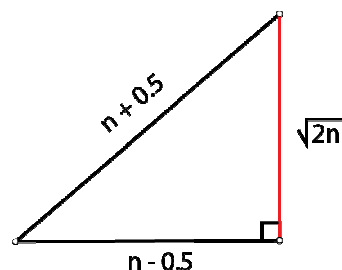
$$a + b = 2n$$

$$b = \frac{n-2}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$\underline{a - b = 1}$$

$$a = \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2} = n + 0.5$$

$$b = \frac{2n-1}{2} = n - \frac{1}{2} = n - 0.5$$



Primjer:

$$\sqrt{34}$$

$$34 = 34 \cdot 1 \quad \text{ili} \quad 34 = 17 \cdot 2$$

$$a + b = 34$$

$$a + b = 17$$

$$\underline{a - b = 1}$$

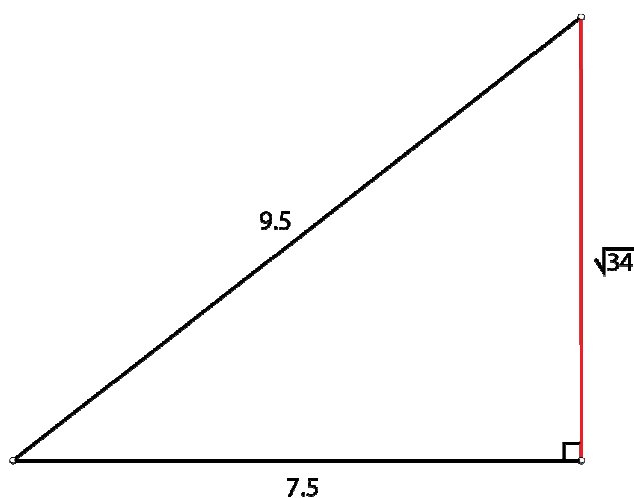
$$\underline{a - b = 2}$$

$$a = \frac{35}{2} = 17.5$$

$$a = \frac{19}{2} = 9.5$$

$$b = \frac{33}{2} = 16.5$$

$$b = \frac{15}{2} = 7.5$$



Takve brojeve ne možemo prikazati u obliku razlike kvadrata dva prirodna broja, ali možemo u obliku kvadrata dva decimalna broja.

Iz navedenih jednakosti:

$$(2p)^2 + (2q)^2 = 4p^2 + 4q^2$$

$$(2p)^2 - (2q)^2 = 4p^2 - 4q^2$$

$$(2p+1)^2 - (2q+1)^2 = 4p^2 + 4p - 4q^2 - 4q$$

$$(2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4p^2 + 4p + 4q^2 + 4q + 2$$

proizlazi da broj $2n$ možemo prikazati jedino u obliku kvadrata zbroja dva neparna prirodna broja.

To su brojevi : 2, 10, 18, 26, 34, 50, 58, 74, 82, 90, 98, ...

Možemo ih zapisati u obliku $4k+2, k \in \mathbb{N}_0$ (izuzetak su brojevi 42 i 66)

Brojevi: 6, 14, 22, 30, 38, 46, 54, 62, 70, 78, 86, 94, ... , imaju oblik

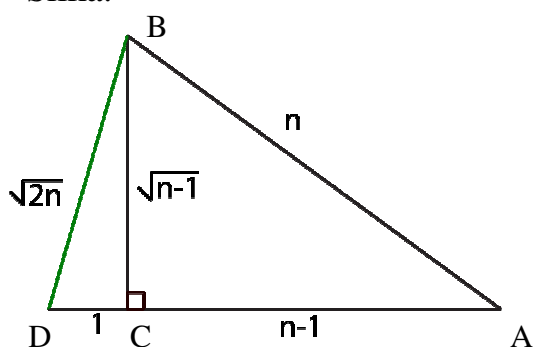
$8k+6, k \in \mathbb{N}_0$ i ne mogu se prikazati niti u obliku zbroja niti u obliku razlike kvadrata dva prirodna broja.

Konstrukcija $\sqrt{2n}$

Prvi način:

Jedan od načina je da se u prvom koraku konstruira $\sqrt{2n-1}$ kao jedna od kateta, a za drugu katetu uzima se broj 1, pa je hipotenuza tog trokuta $\sqrt{2n}$.

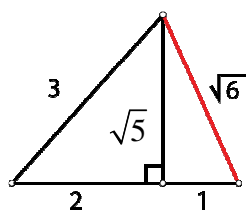
Slika:



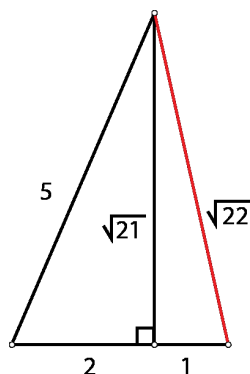
Dokaz:

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= n^2 - (n-1)^2 \\ &= n^2 - n^2 + 2n - 1 \\ &= 2n - 1 \\ |BC| &= \sqrt{2n-1} \\ |BD|^2 &= (\sqrt{2n-1})^2 + 1^2 \\ |BD|^2 &= 2n - 1 + 1 = 2n \\ |BD| &= \sqrt{2n} \end{aligned}$$

Konstrukcija $\sqrt{6}$



Konstrukcija $\sqrt{22}$



Drugi način:

Drugi način konstrukcije $\sqrt{2n}$ je taj da se u prvom koraku konstruira pravokutni trokut s katetom \sqrt{n} , a zatim jednakokračni pravokutni trokut s katetama \sqrt{n} . Tada je njegova hipotenuza $\sqrt{2n}$.

□ CBD

$$|BC|^2 = |BD|^2 - |DC|^2$$

$$|BC|^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

$$|BC|^2 = n$$

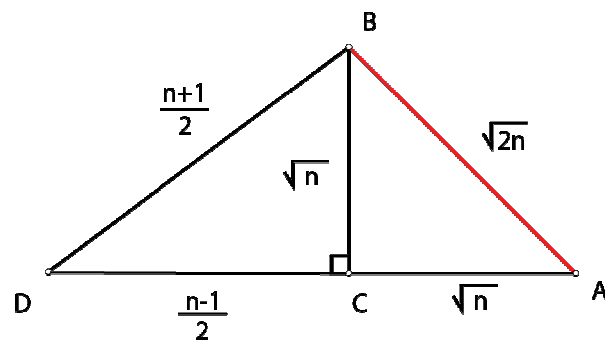
$$|BC| = \sqrt{n}$$

□ ABC

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

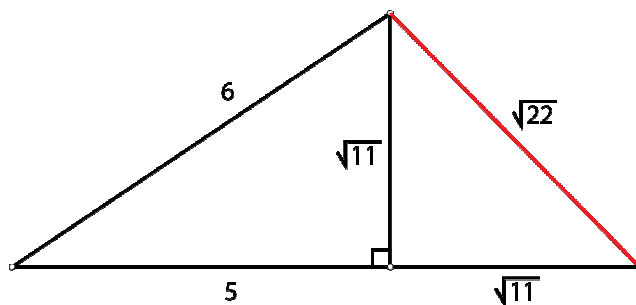
$$|AB|^2 = (\sqrt{n})^2 + (\sqrt{n})^2$$

$$|AB| = \sqrt{2n}$$

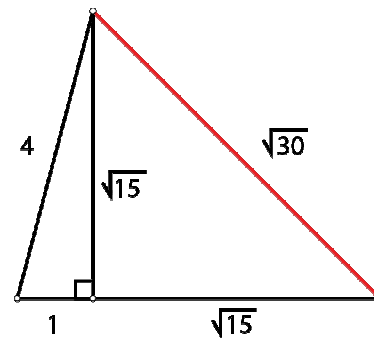


Primjeri:

Konstrukcija $\sqrt{22}$



Konstrukcija $\sqrt{30}$



Treći način:

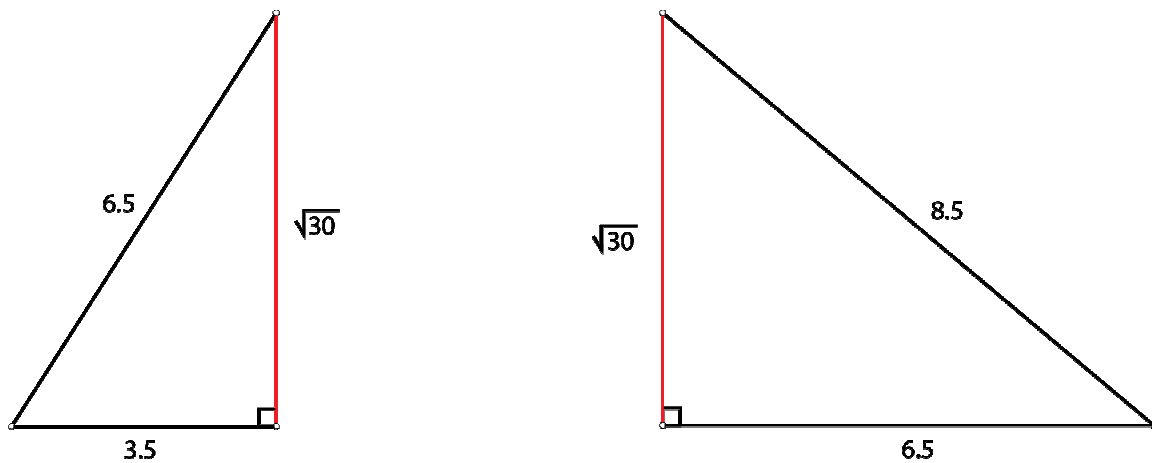
Radikand $2n$ prikazujemo kao razliku kvadrata dva decimalna broja.

$$2n = (n + 0.5)^2 - (n - 0.5)^2$$

Primjer:

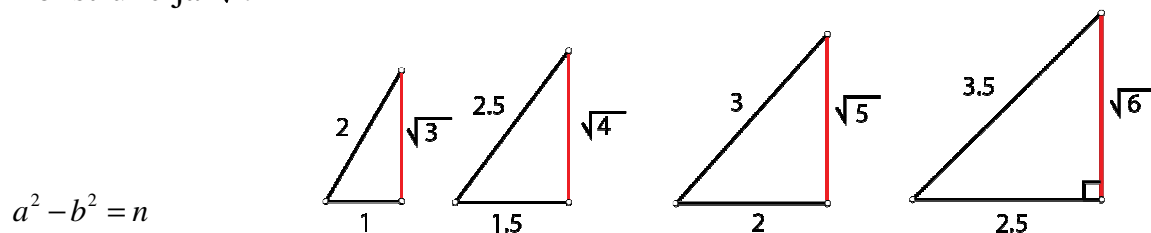
Konstrukcija $\sqrt{30}$:

$30 = 30 \cdot 1$	$1^\circ \quad a+b=30$	$2^\circ \quad a+b=15$	$3^\circ \quad a+b=10$	$4^\circ \quad a+b=6$
$= 15 \cdot 2$	$\underline{a-b=1}$	$\underline{a-b=2}$	$\underline{a-b=3}$	$\underline{a-b=5}$
$= 6 \cdot 5$	$b=14.5$	$a=8.5$	$a=6.5$	$a=5.5$
$= 10 \cdot 3$	$a=15.5$	$b=6.5$	$b=3.5$	$b=0.5$



Iz dosadašnje analize vidljivo je da se svaki prirodni broj može prikazati kao razlika kvadrata dva prirodna broja ili dva decimalna broja.

Konstrukcija \sqrt{n}



$$a^2 - b^2 = n$$

$$(a+b)(a-b) = n \cdot 1$$

$$a+b=n$$

$$\underline{a-b=1}$$

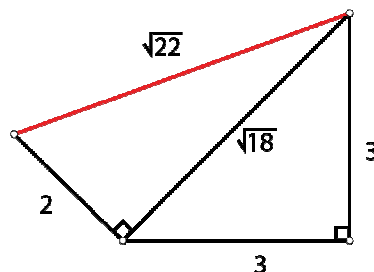
$$a = \frac{n+1}{2} \quad b = \frac{n-1}{2}$$

Četvrti način:

Konstrukcijom pravokutnog trokuta kome je zbroj kvadrata nad katetama $\sqrt{2n}$

Konstrukcija $\sqrt{22}$

$$\begin{aligned}\sqrt{22} &= 1^2 + (\sqrt{21})^2 \\ &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{20})^2 \\ &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{19})^2 \\ &= 2^2 + (\sqrt{18})^2 \\ &= (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{17})^2 \\ &\vdots \\ &= (\sqrt{11})^2 + (\sqrt{11})^2\end{aligned}$$

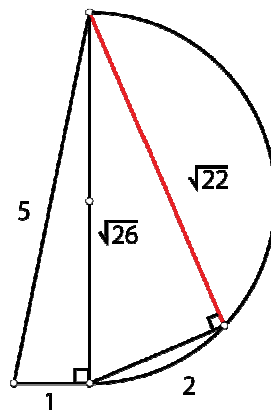


Peti način:

Konstrukcijom pravokutnog trokuta kome je razlika kvadrata nad hipotenuzom i kvadrata nad jednom katetom $\sqrt{2n}$

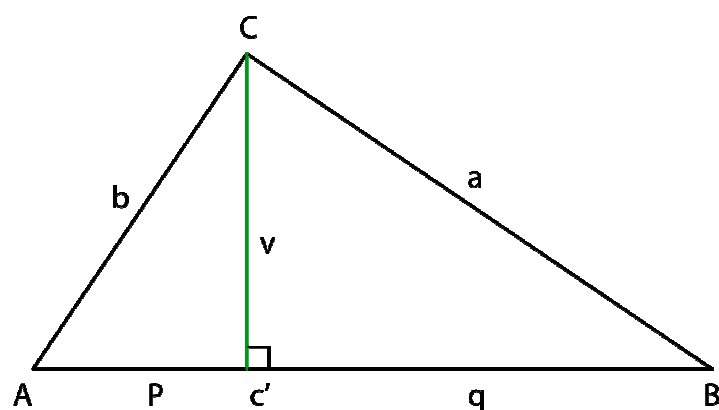
Konstrukcija $\sqrt{22}$

$$\begin{aligned}\sqrt{22} &= (\sqrt{23})^2 - 1 \\ &= (\sqrt{24})^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= (\sqrt{25})^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= (\sqrt{26})^2 - 2^2 \\ &= (\sqrt{27})^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= (\sqrt{28})^2 - (\sqrt{6})^2\end{aligned}$$



U petom načinu koristimo i Talesov poučak o obodnom kutu.

B - Primjena Euklidovog poučka

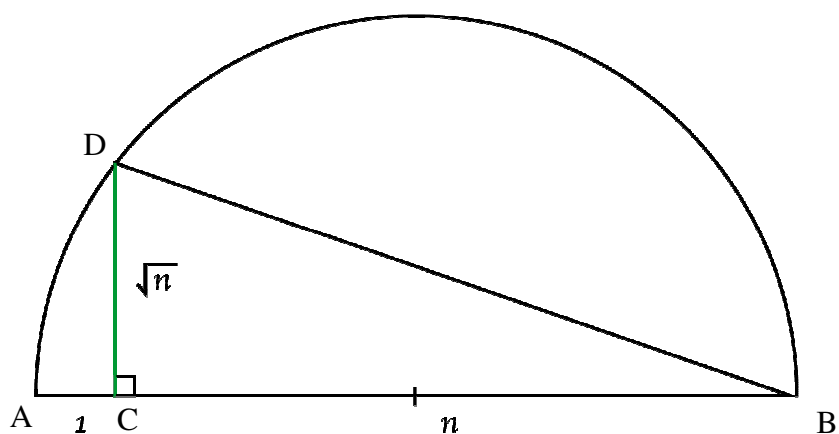


$$\begin{aligned} \triangle AC'C &\sim \triangle C'BC \\ |CC'| : |AC'| &= |C'B| : |C'C| \\ v : p &= q : v \\ v^2 &= pq \\ v &= \sqrt{pq} \end{aligned}$$

Iz sličnosti trokuta $AC'C$ i trokuta $C'BC$ visina $v = \sqrt{pq}$.

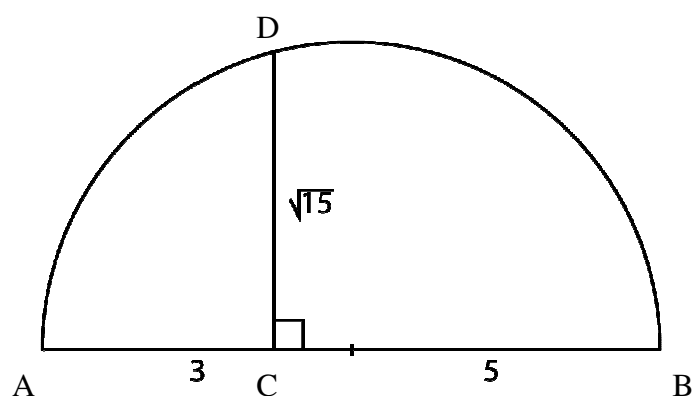
Kako svaki prirodni broj možemo prikazati kao umnožak dva broja primjenom Euklidovog poučka, možemo konstruirati \sqrt{a} , $a \in \mathbb{N}$.

Konstrukcija \sqrt{n}



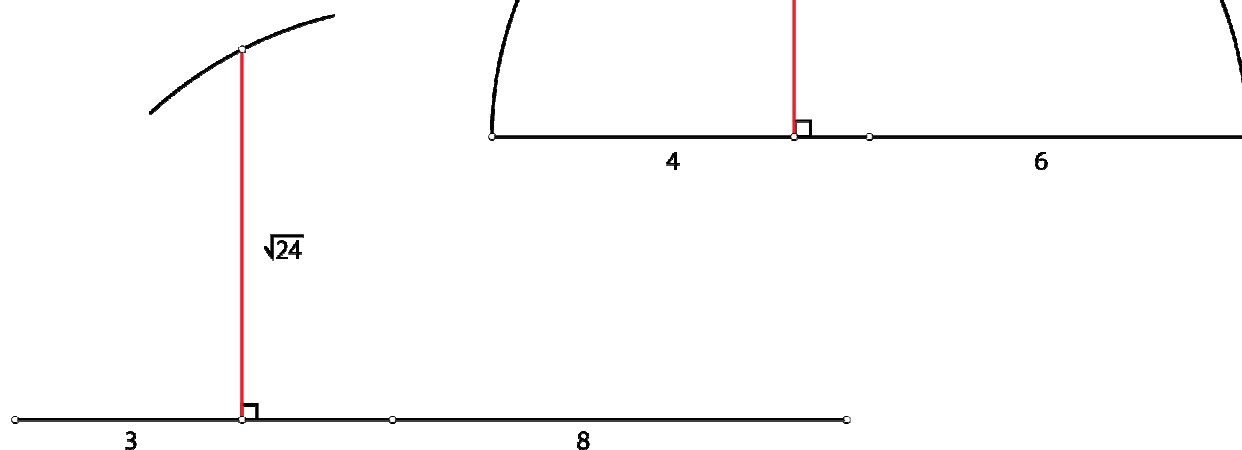
Konstrukcija $\sqrt{15}$

$$\begin{aligned} 15 &= 3 \cdot 5 \\ |AC| &= 3 \\ |CB| &= 5 \\ |CD| &= \sqrt{15} \end{aligned}$$



Konstrukcija $\sqrt{24}$

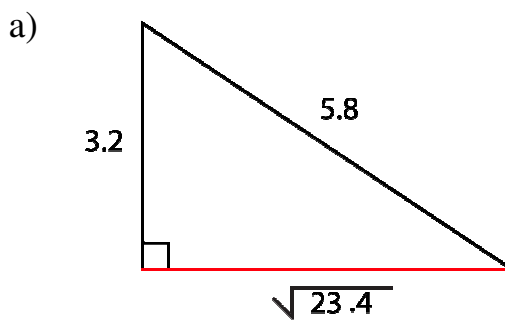
$$\begin{aligned} 24 &= 1 \cdot 24 \\ &= 2 \cdot 12 \\ &= 3 \cdot 8 \\ &= 4 \cdot 6 \end{aligned}$$



Radikand je decimalan broj

Konstrukcija $\sqrt{23.4}$

$$\begin{aligned} 23.4 &= 23.4 \cdot 1 & a+b &= 9 \\ &= 7.8 \cdot 3 & a-b &= 2.6 \\ &= 3.9 \cdot 6 & a &= 5.8 \\ &= 2.6 \cdot 9 & b &= 3.2 \\ &= 4.5 \cdot 5.2 \\ &= 11.7 \cdot 2 \end{aligned}$$



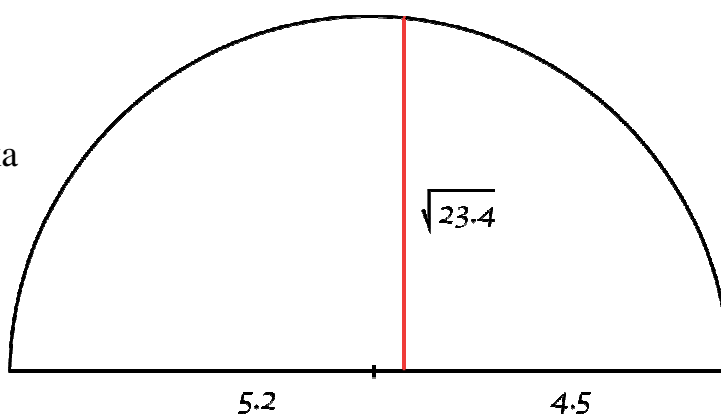
a) Primjenom Pitagorina poučka:

$$\sqrt{23.4} = \sqrt{5.8^2 - 3.2^2}$$

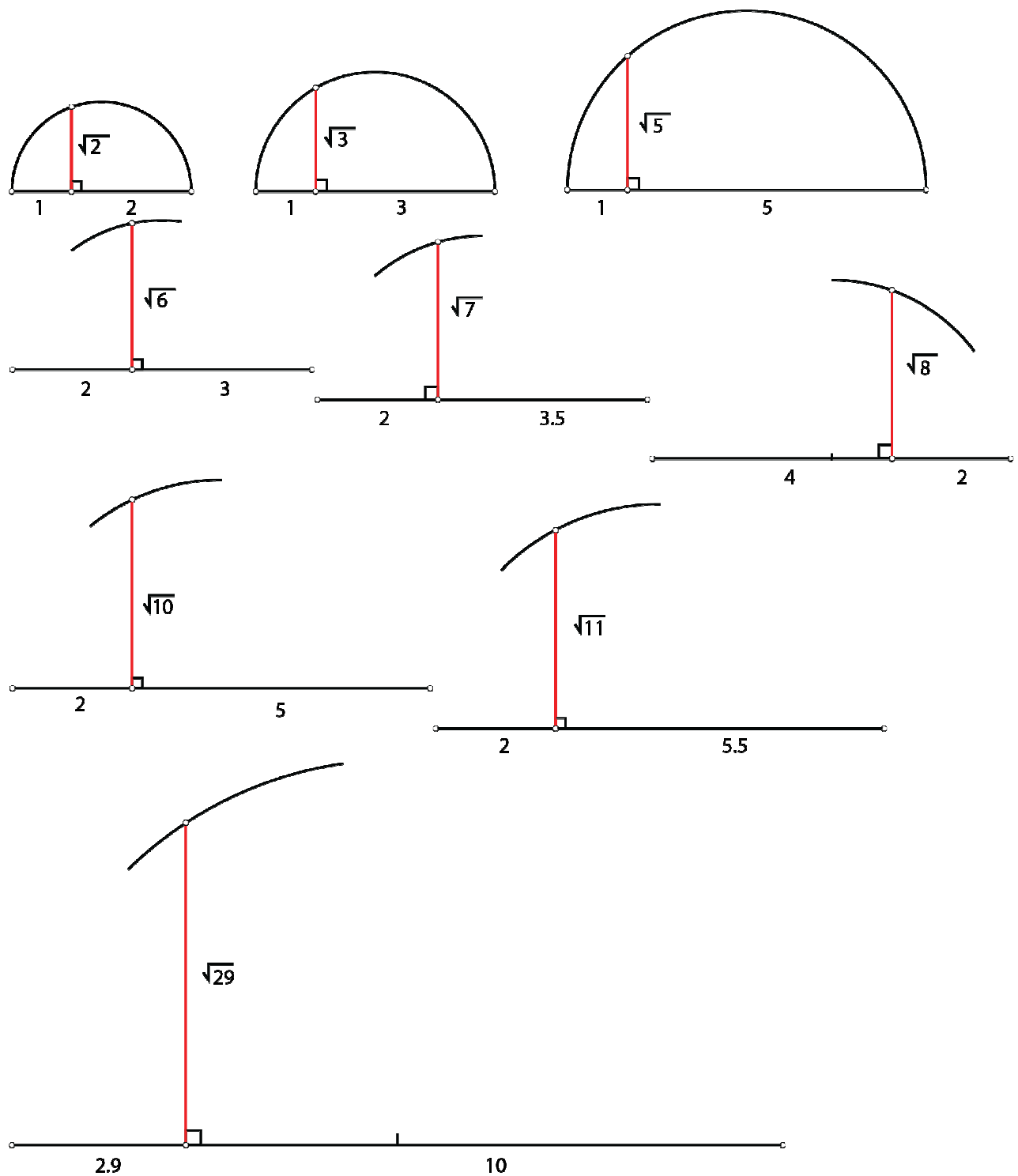
b)

b) Primjenom Euklidova poučka

$$\sqrt{23.4} = \sqrt{5.2 \cdot 4.5}$$



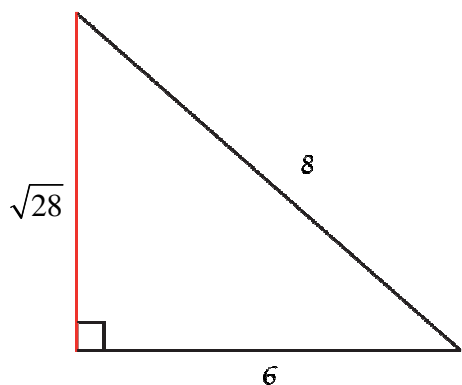
Konstrukcija \sqrt{n} , $2 \leq n \leq 99$ primjenom Euklidova poučka



C - Primjena Pitagorina, Euklidova i Talesovog poučka

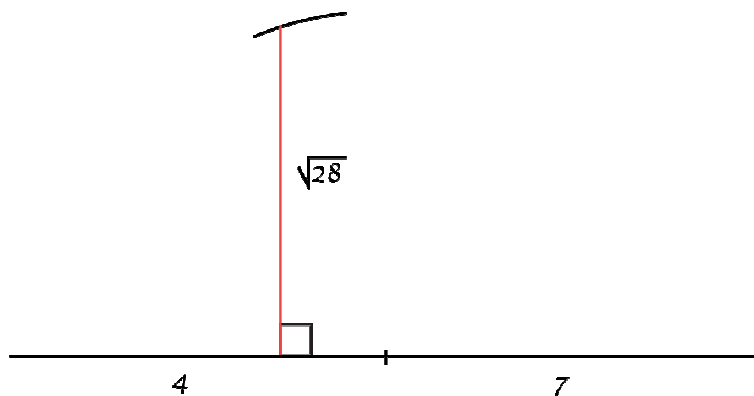
Konstrukcija $\sqrt{28}$ cm

Pitagora $\sqrt{28} = \sqrt{8^2 - 6^2}$



Pitagora – Pitagora

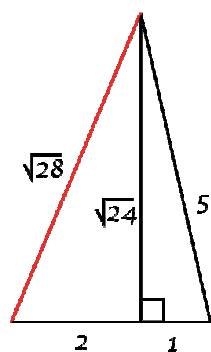
Euklid $\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7}$



Euklid-Pitagora

$$\sqrt{24} = \sqrt{5^2 - 1^2}$$

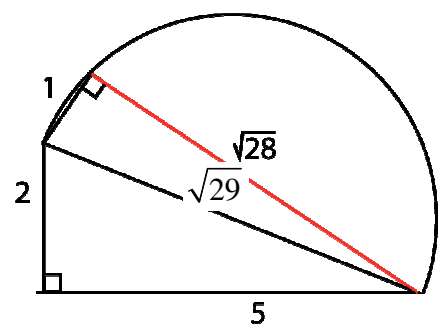
$$\sqrt{28} = \sqrt{(\sqrt{24})^2 + 2^2}$$



Pitagora- Pitagora-Tales

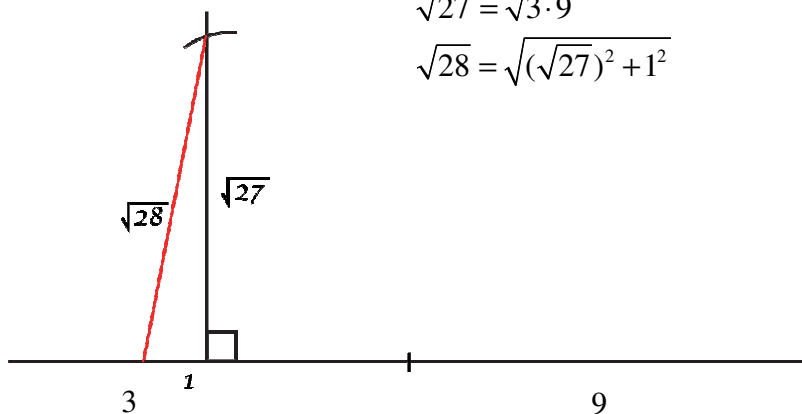
$$\sqrt{29} = \sqrt{5^2 + 2^2}$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{(\sqrt{29})^2 - 1^2}$$



$$\sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9}$$

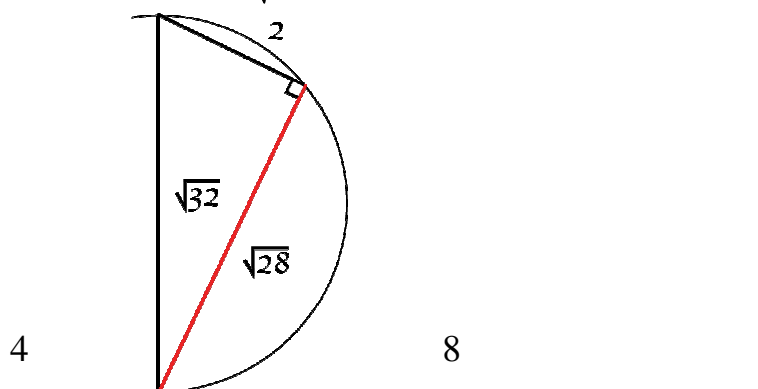
$$\sqrt{28} = \sqrt{(\sqrt{27})^2 + 1^2}$$



Euklid – Tales - Pitagora

$$\sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 8}$$

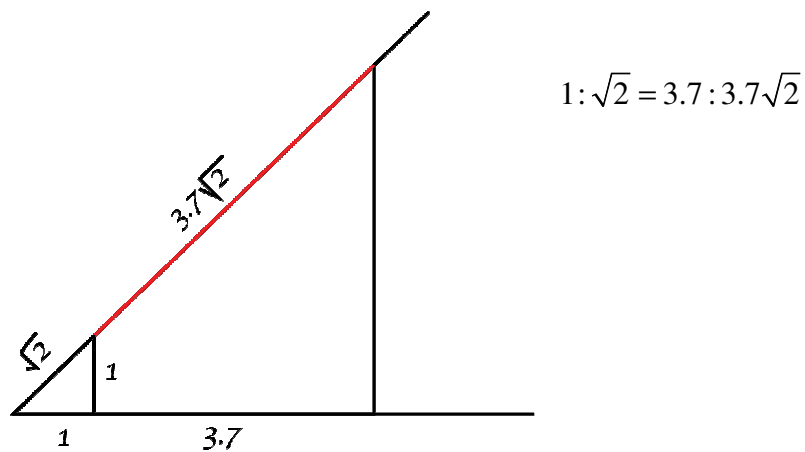
$$\sqrt{28} = \sqrt{(\sqrt{32})^2 - 2^2}$$



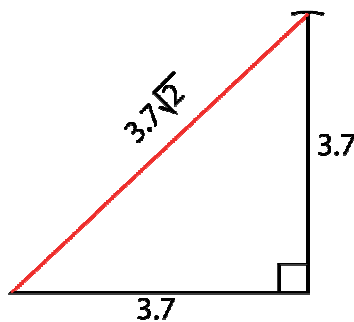
D - Konstrukcija dužina duljina $a\sqrt{2}$ i $a\sqrt{3}$

Konstrukcija $3.7\sqrt{2}$ cm

a) Talesov poučak o proporcionalnim dužinama



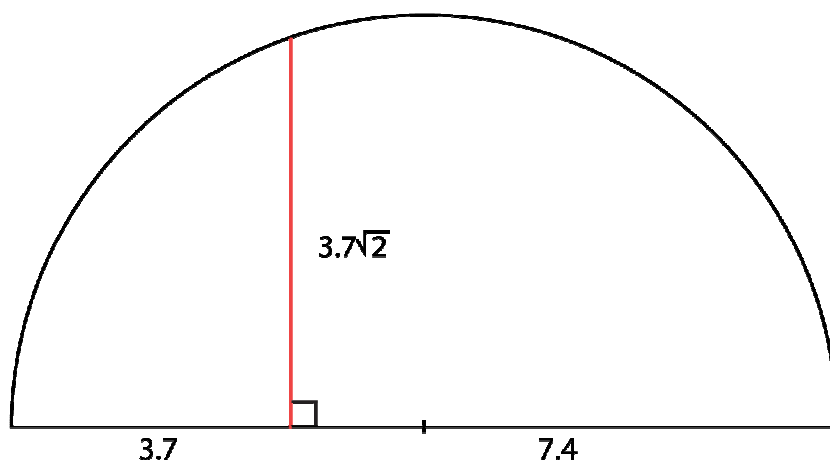
b) Pitagorin poučak



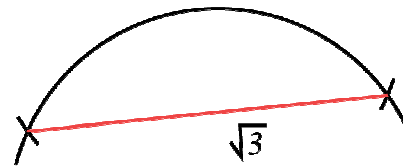
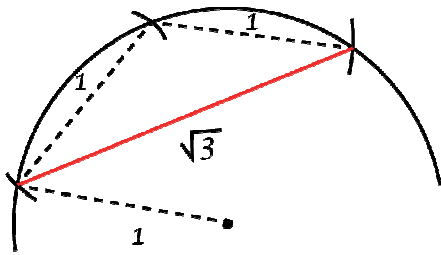
$$\sqrt{3.7^2 + 3.7^2} = \sqrt{2 \cdot 3.7^2} = 3.7\sqrt{2}$$

c) Euklidov poučak

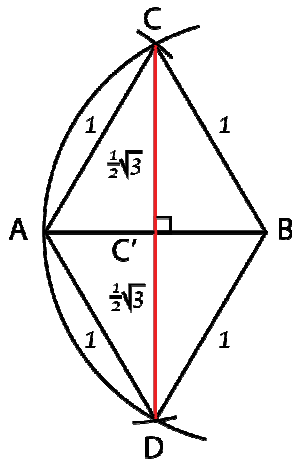
$$\sqrt{3.7 \cdot (3.7 \cdot 2)} = 3.7\sqrt{2}$$



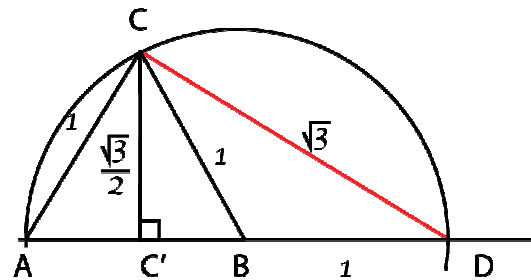
Najbrža konstrukcija $\sqrt{3}$ i $a\sqrt{3}$



Dokaz: 1. način



2. način



Trokut ABC- jednakostraničan trokut
a=1

Trokut ABD- jednakostraničan trokut
-osnosimetrična slika trokuta ABC

$\overline{CC'}$ - visina trokuta ABC

$$|CC'| = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ - duljina visine } \overline{CC'}$$

$$|CD| = 2|CC'| = \sqrt{3}$$

Točka B – središte kružnice polumjera 1

Trokut ABC- jednakostraničan
trokut, a=1

Nacrtamo kružnicu $k(B, 1)$

Nacrtamo promjer \overline{AD} i

tetivu \overline{CD}

Točka C' - nožište visine

U trokutu $CC'D$ vrijedi:

$$|DC|^2 = |DC'|^2 + |CC'|^2$$

$$|DC|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$|DC|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$$

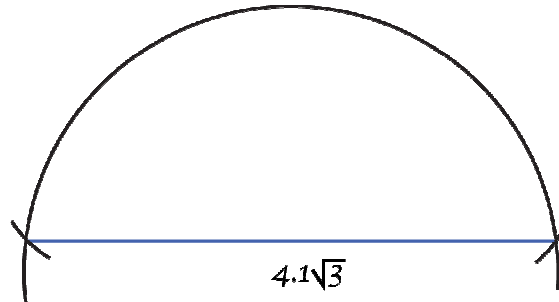
$$|DC| = \sqrt{3}$$

Konstrukcija $a\sqrt{3}$

Konstruira se kružnica polumjera a (dovoljan je kružni luk veći od trećine kružnice), a zatim se taj polumjer nanese dva puta na kružnicu.

Spojnica početne i završne točke je tetiva duljine $a\sqrt{3}$.

Konstrukcija $4.1\sqrt{3}$ cm



E-Dodatak

Još neke konstrukcije primjenom Euklidova poučka

Konstrukcija $b\sqrt{a}$ cm

$$b\sqrt{a} = \sqrt{b^2 a} = \sqrt{b \cdot ba}$$

$$|AC| = b$$

$$|CB| = ba$$

$$|AB| = b + ab$$

$$|AS| = |SB| = |SD| - \text{polumjer } r$$

$$r = \frac{b + ab}{2} \quad |CS| = \frac{ab - b}{2}$$

Primjenom Pitagorina poučka na trokut CSD slijedi:

$$|CD|^2 = \left(\frac{b + ab}{2}\right)^2 - \left(\frac{ab - b}{2}\right)^2$$

$$|CD|^2 = |SD|^2 - |CS|^2$$

$$|CD|^2 = b^2 a$$

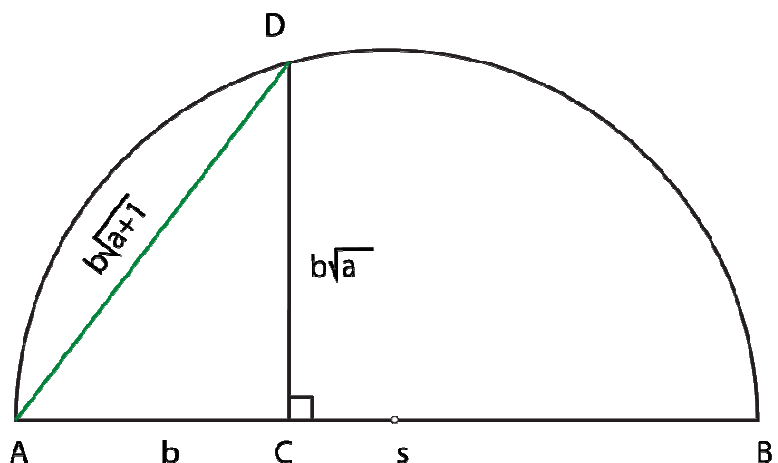
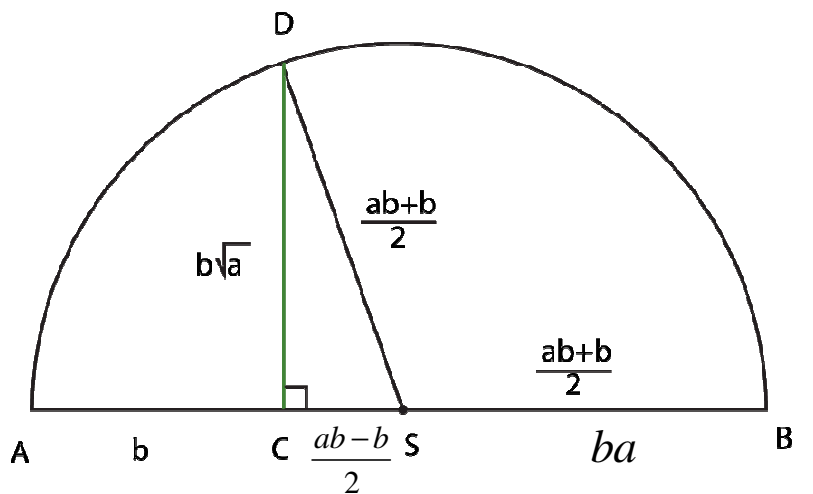
$$|CD| = b\sqrt{a}$$

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2$$

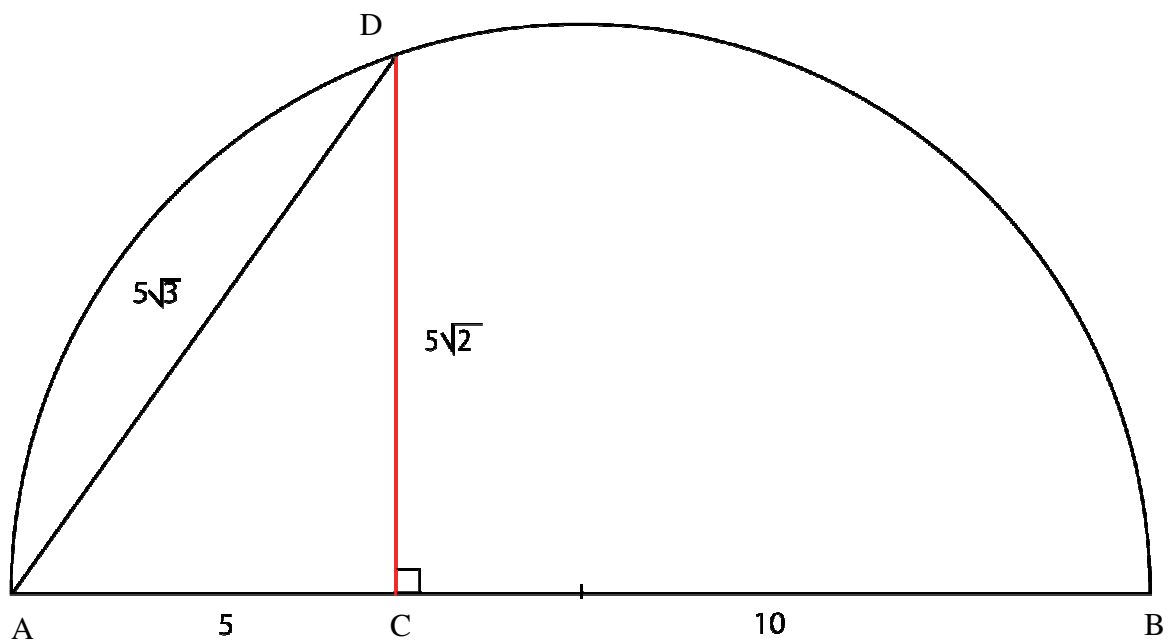
$$|AD|^2 = b^2 + (b\sqrt{a})^2$$

$$|AD|^2 = b^2(a + 1)$$

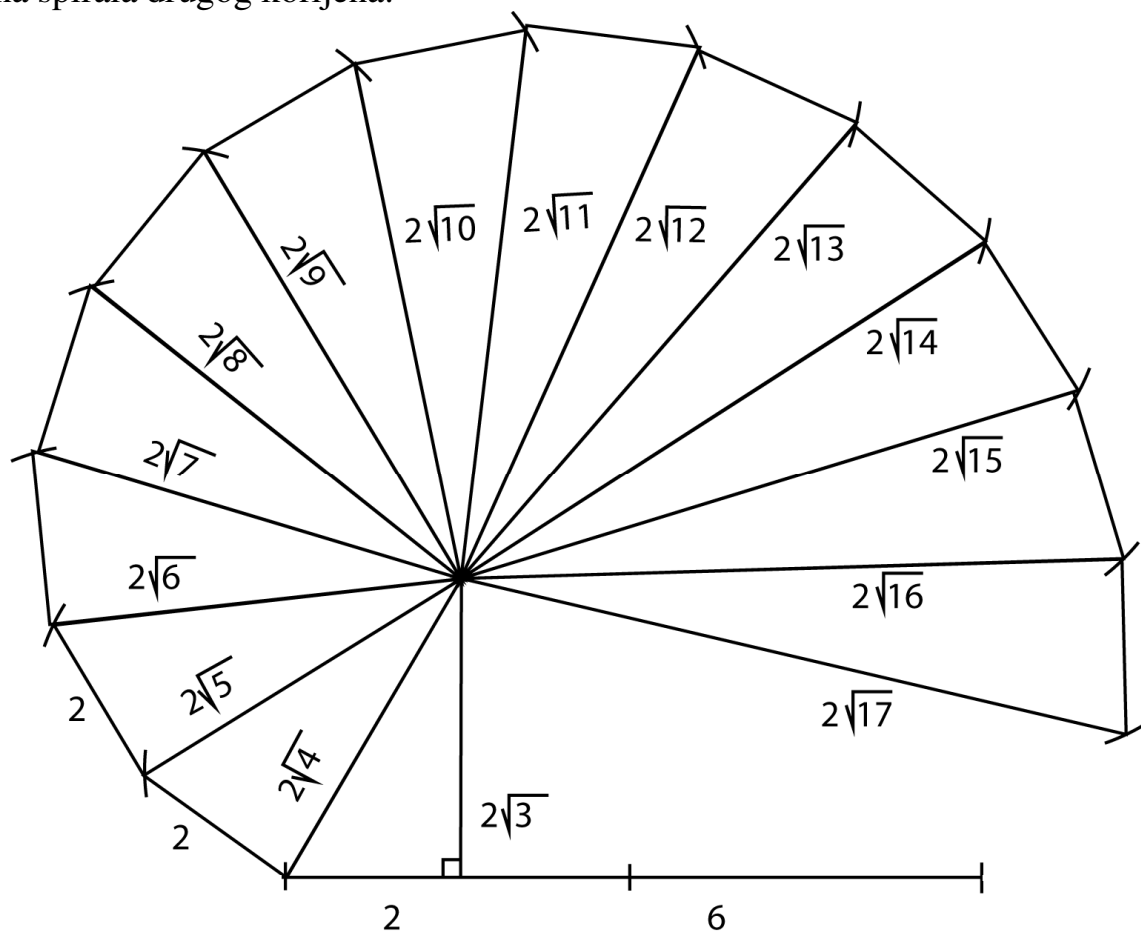
$$|AD| = b\sqrt{a + 1}$$



Konstrukcija $5\sqrt{2}$ i $5\sqrt{3}$



Jedna spirala drugog korijena:



Konstrukcija zbroja $3.4\sqrt{3} + 2.3\sqrt{2}$ i razlike $3.4\sqrt{3} - 2.3\sqrt{2}$

$$|AC| = 3.4$$

$$|CB| = 3 \cdot 3.4$$

$$|CD| = 3.4\sqrt{3}$$

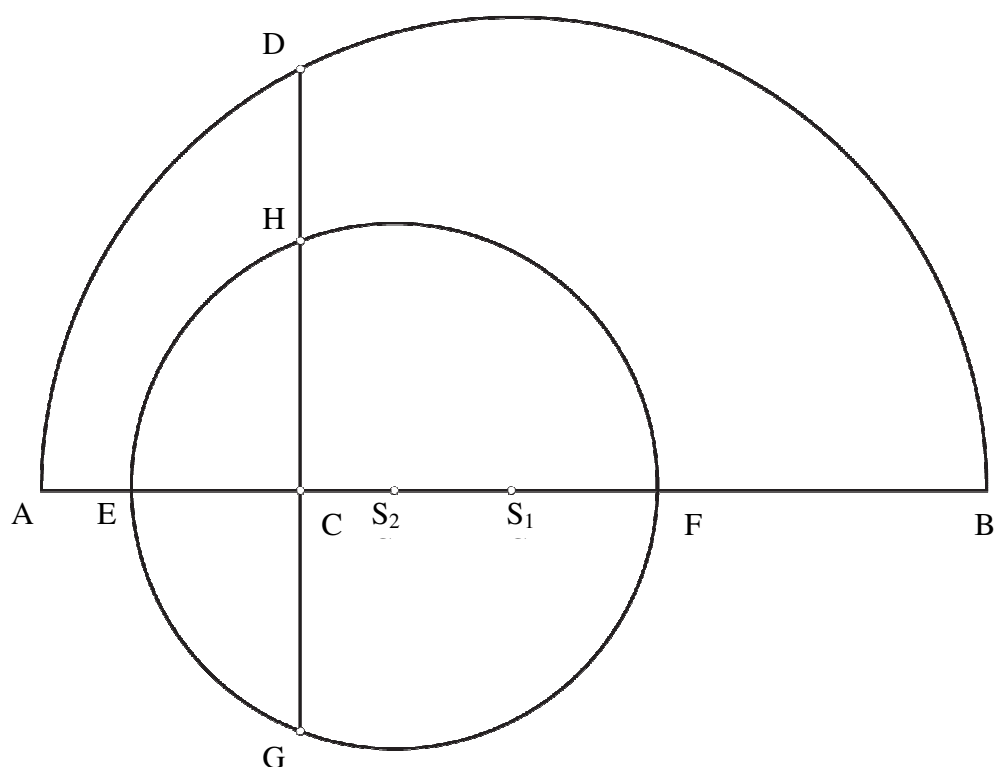
$$|EC| = 2.3$$

$$|CF| = 2 \cdot 2.3$$

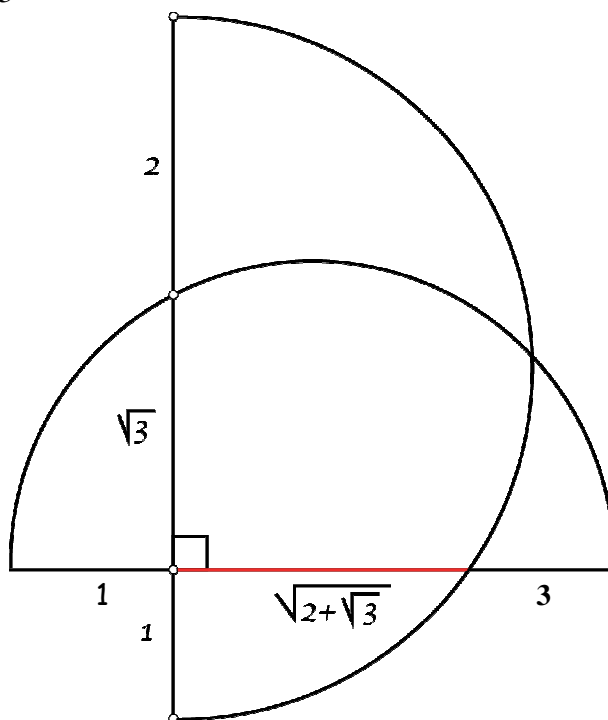
$$|CG| = |CH| = 2.3\sqrt{2}$$

$$|DG| = 3.4\sqrt{3} + 2.3\sqrt{2}$$

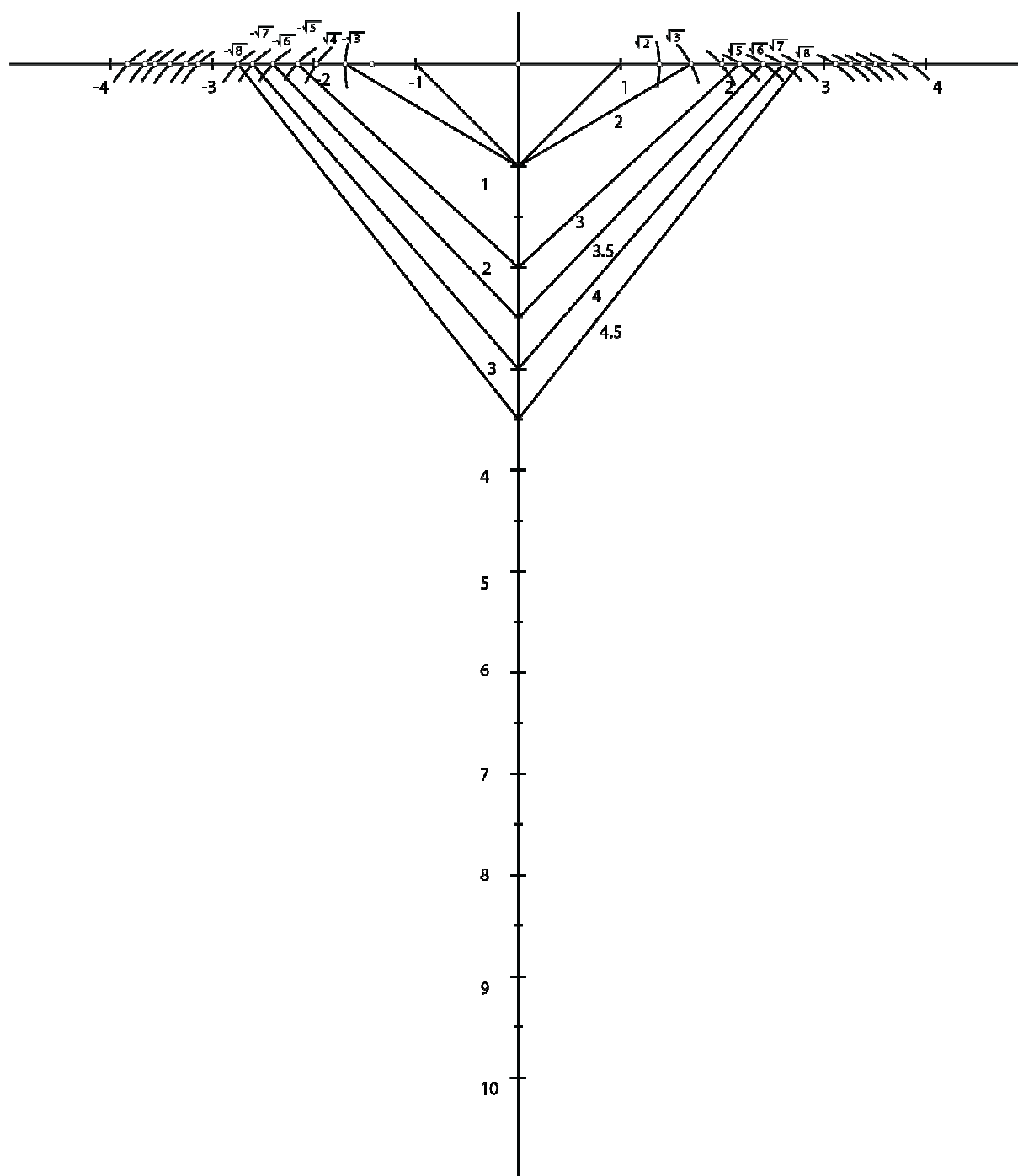
$$|HD| = 3.4\sqrt{3} - 2.3\sqrt{2}$$



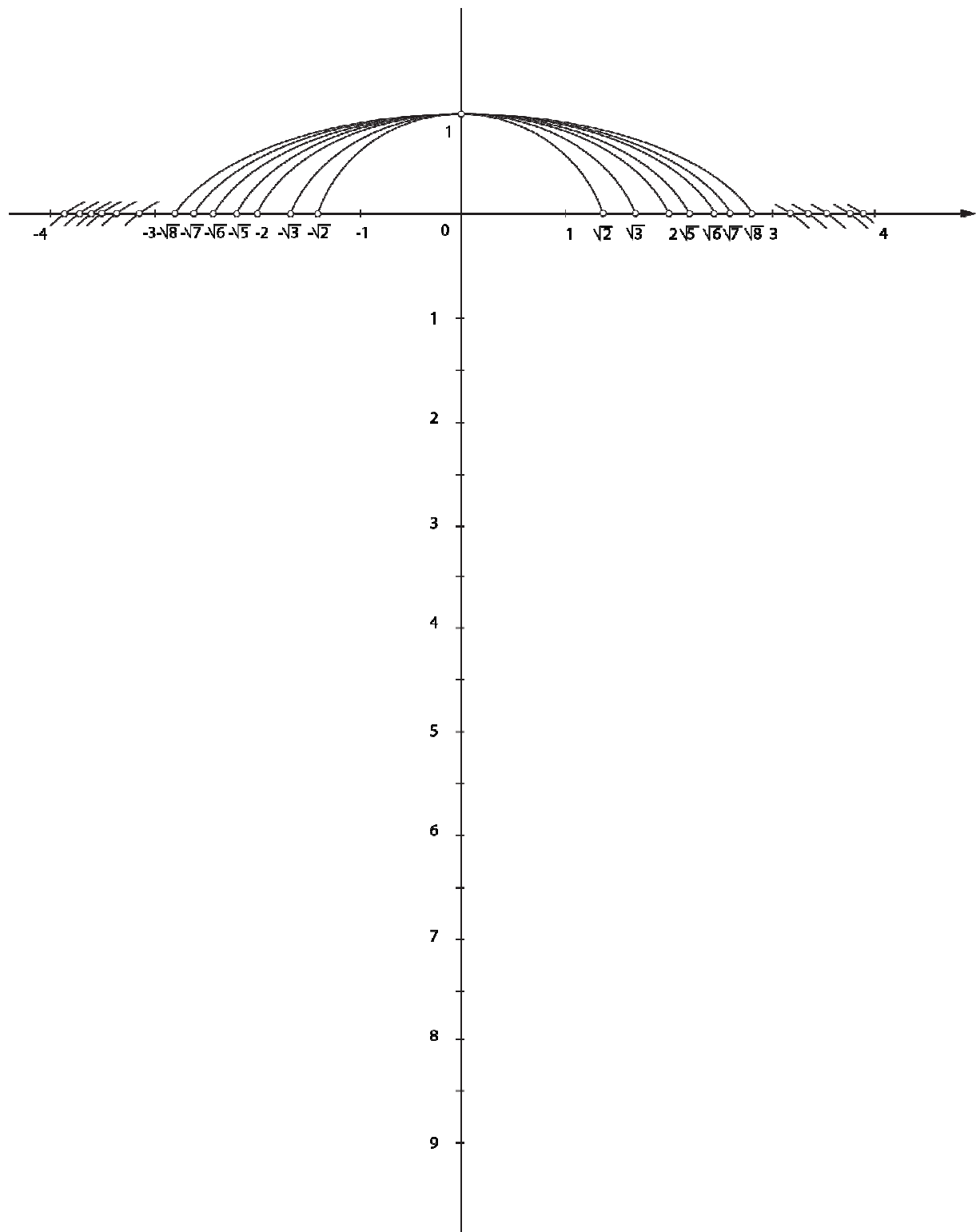
Konstrukcija $\sqrt{2+\sqrt{3}}$



Pridruživanje iracionalnih brojeva točkama brojevnog pravca primjenom Pitagorina poučka.



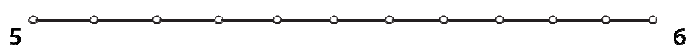
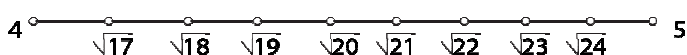
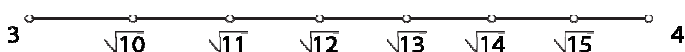
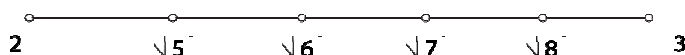
Pridruživanje iracionalnih brojeva točkama brojevnog pravca primjenom Euklidova poučka.



Broj iracionalnih brojeva \sqrt{a} , $a \in N$ ako je $n < \sqrt{a} < n+1$, $n \in N$

Koliko ima iracionalnih brojeva kojima je radikand a prirodni broj, a dekadski vrijednost tog iracionalnog broja iznosi m ?

U stvari tražimo koliko ima prirodnih brojeva između kvadrata dva susjedna broja.



$$n < \sqrt{a} < n+1$$

$$n^2 < a < (n+1)^2$$

$$m = (n+1)^2 - n^2 - 1$$

$$m = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1$$

$$m = 2n$$

Primjer: Koliko ima iracionalnih brojeva kojima je radikand prirodni broj, a čija dekadski vrijednost iznosi 7?

To su prirodni brojevi između 7^2 i 8^2 .

$$n=7$$

$$m=2 \cdot 7=14$$

To su brojevi :

$$\sqrt{50}, \sqrt{51}, \sqrt{52}, \sqrt{53}, \sqrt{54}, \sqrt{55}, \sqrt{56}, \sqrt{57}, \sqrt{58}, \sqrt{59}, \sqrt{60}, \sqrt{61}, \sqrt{62}, \sqrt{63}.$$

**Konstrukcija jednakokračnog trokuta s unutarnjim kutovima
72°, 72°, 36° kome osnovica iznosi 5cm**

$$\triangle ABD \sim \triangle ADC$$

$$|BD| : |AB| = |AB| : |BC|$$

$$x : (b-x) = (b-x) : b$$

$$bx = b^2 + x^2 - 2bx$$

$$b^2 - 3bx + x^2 = 0$$

$$b = \frac{3x + \sqrt{9x^2 - 4x^2}}{2}$$

$$b = \frac{x(3 + \sqrt{5})}{2}$$

$$b - x = a$$

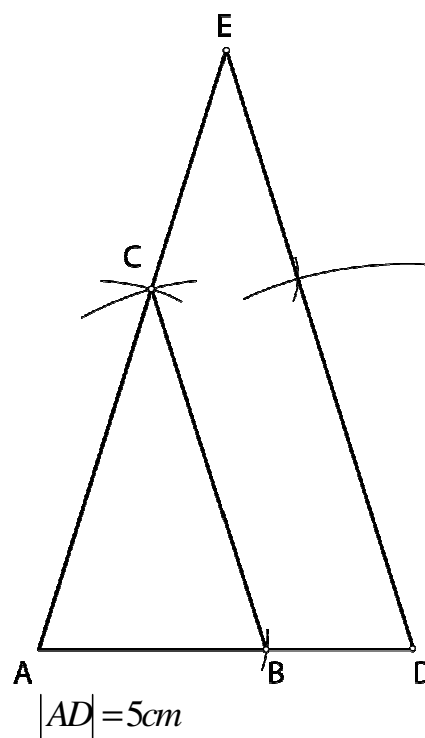
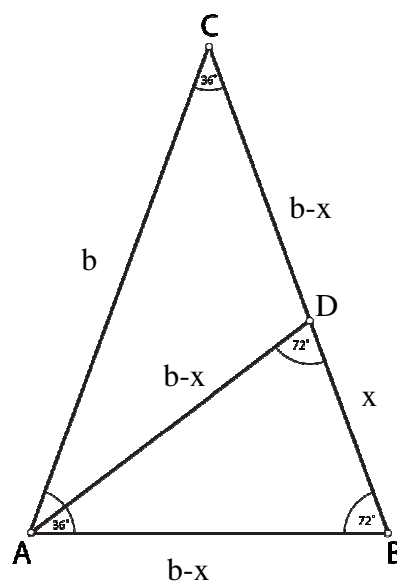
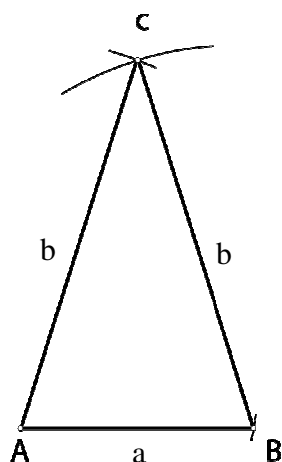
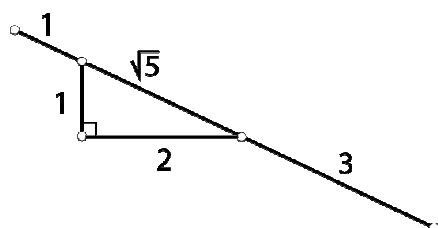
$$x = b - a$$

$$b = \frac{(b-a)(3 + \sqrt{5})}{2}$$

$$2b = 3b + b\sqrt{5} - 3a - a\sqrt{5}$$

$$b(\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5} + 3)a$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 3}$$



Rješenje: $\triangle ADE$

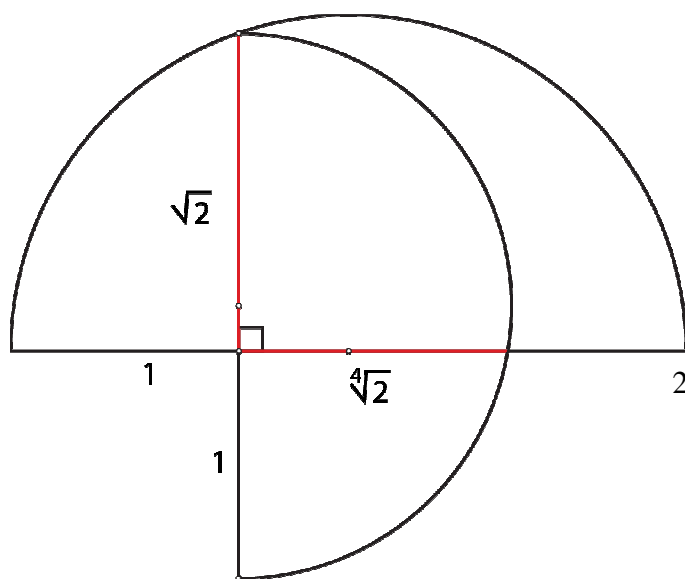
Konstrukcija \sqrt{a} gdje je a jedan od Fibonaccijevih brojeva

Fibonaccijevi brojevi: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,...

Ako je radikand jedan od Fibonaccijevih brojeva možemo ga prikazati u obliku zbroja ili razlike kvadrata dva Fibonaccijeva broja.

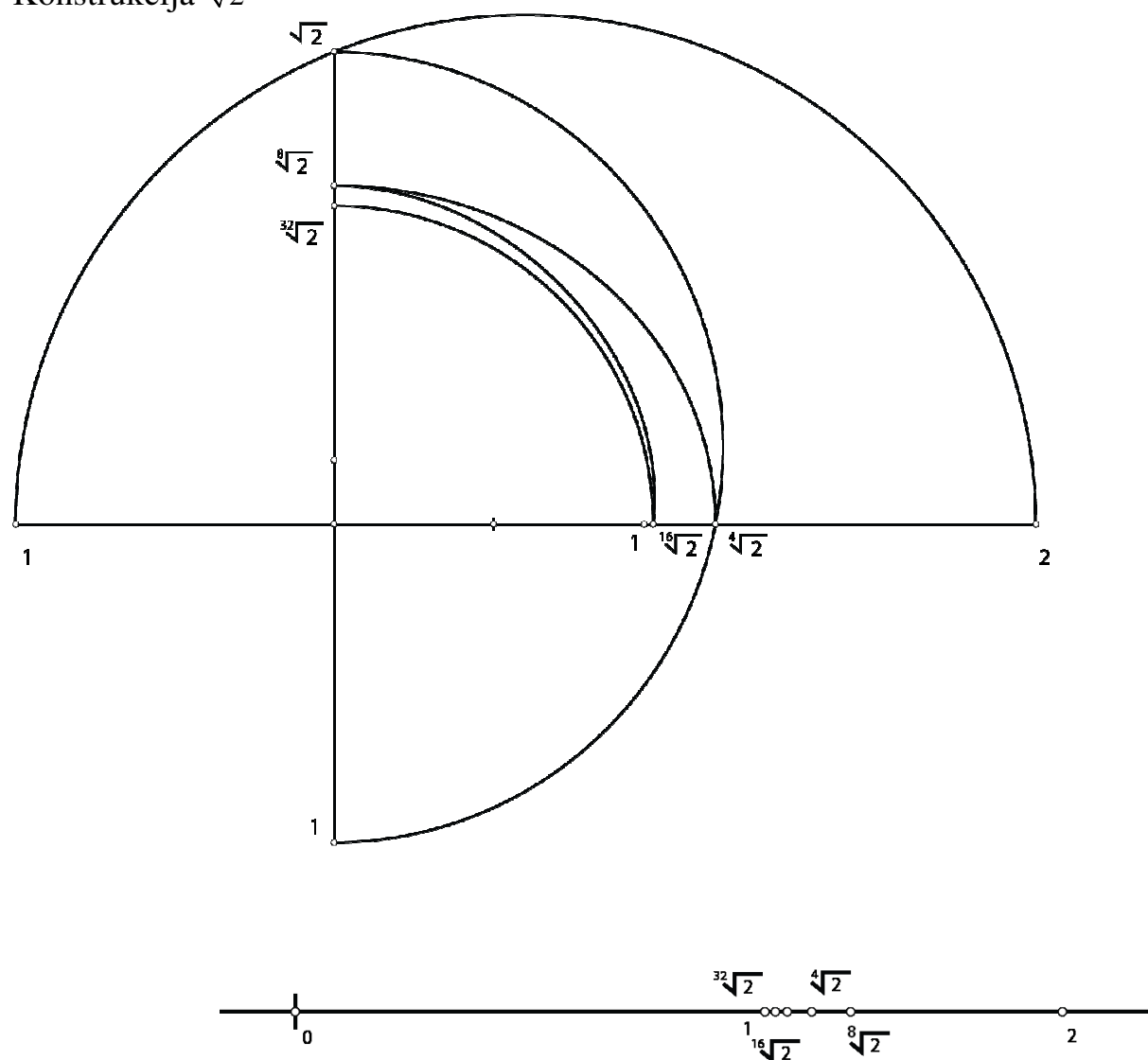
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{21}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{55}$	$\sqrt{89}$
$\sqrt{1^2+1^2}$	$\sqrt{2^2-1^2}$	$\sqrt{2^2+1^2}$	$\sqrt{3^2-1^2}$	$\sqrt{3^2+2^2}$	$\sqrt{5^2-2^2}$	$\sqrt{5^2+3^2}$	$\sqrt{8^2-3^2}$	$\sqrt{8^2+5^2}$

Konstrukcija $\sqrt[4]{2}$



Uzastopno korjenovanje

Konstrukcija $\sqrt[n]{2}$



Uzastopnim korjenovanjem $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$ vrijednost $\sqrt[n]{a}$ približava se nuli ako je $0 < a < 1$, odnosno broju 1 ako je $1 < n < \infty$.

Da bi cjelobrojna vrijednost $\sqrt[n]{a}$ bila 1, onda je broj uzastopnih korjenovanja:

za:

Broj uzastopnih korjenovanja

$2 \leq a < 4$	ili	$2^1 \leq a < 2^2$	1
$4 \leq a < 16$		$2^2 \leq a < 2^4$	2
$16 \leq a < 256$		$2^4 \leq a < 2^8$	3
$256 \leq a < 65536$		$2^8 \leq a < 2^{16}$	4
$65536 \leq a < 4294967296$		$2^{16} \leq a < 2^{32}$	5

Konstrukcija jedinične dužine ako je poznata dužina duljine \sqrt{n}

Ako je zadana dužina duljine $\sqrt{2}$ onda se konstruira jednakokračni pravokutni trokut s hipotenuzom $\sqrt{2}$. Kateta je 1.

U ostalim slučajevima konstruiramo pomoćni trokut proizvoljno odabrane jedinične dužine, sličan trokutu kome je jedna stranica zadana dužina duljine \sqrt{n} . Zatim jednu od stranica s cjelobrojnom jediničnom dužinom duljine m podijelimo na m jednakih dijelova. m -ti dio je traženo rješenje.

Zadano je:

