

Državno natjecanje iz fizike 2018/2019

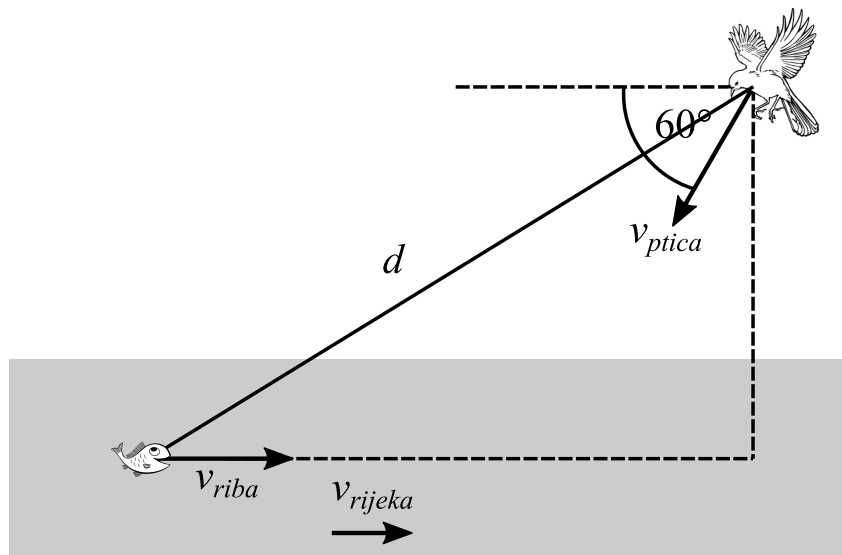
Poreč, 10.-13. travnja 2019.

Srednje škole – 1. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (17 bodova)

Položaj ribe i ptice u početnom trenutku, kao i smjer njihove brzine prikazani su na slici 1.



Slika 1: Zadatak 1 – početni položaji i brzine ribe i ptice.

Sa skice se može vidjeti da vrijedi:

$$d^2 = ((v_{riba} + v_{rijeka})t_1 + \frac{1}{2}v_{ptica}t_1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_{ptica}t_1\right)^2 \quad (2 \text{ boda})$$

$$\frac{d^2}{t_1^2} = (v_{riba} + v_{rijeka})^2 + v_{ptica}(v_{riba} + v_{rijeka}) + \frac{1}{4}v_{ptica}^2 + \frac{3}{4}v_{ptica}^2$$

$$\frac{d^2}{t_1^2} = (v_{riba} + v_{rijeka})^2 + v_{ptica}(v_{riba} + v_{rijeka}) + v_{ptica}^2$$

Uvrstimo brojeve: $d = 42 \text{ m}$, $t_1 = 3 \text{ s}$, $v_{riba} + v_{rijeka} = (17.6 + 4) \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$:

$$196 = 36 + 6v_{ptica} + v_{ptica}^2$$

$$v_{ptica}^2 + 6v_{ptica} - 160 = 0$$

$$(v_{ptica} - 10)(v_{ptica} + 16) = 0 \quad (2 \text{ boda})$$

Slijedi da je brzina ptice $v_{ptice} = 10 \text{ m/s}$. (1 bod)

Početni položaj uzdizanja ptice s ribom te smjer njezine brzine prikazani su na slici 2.

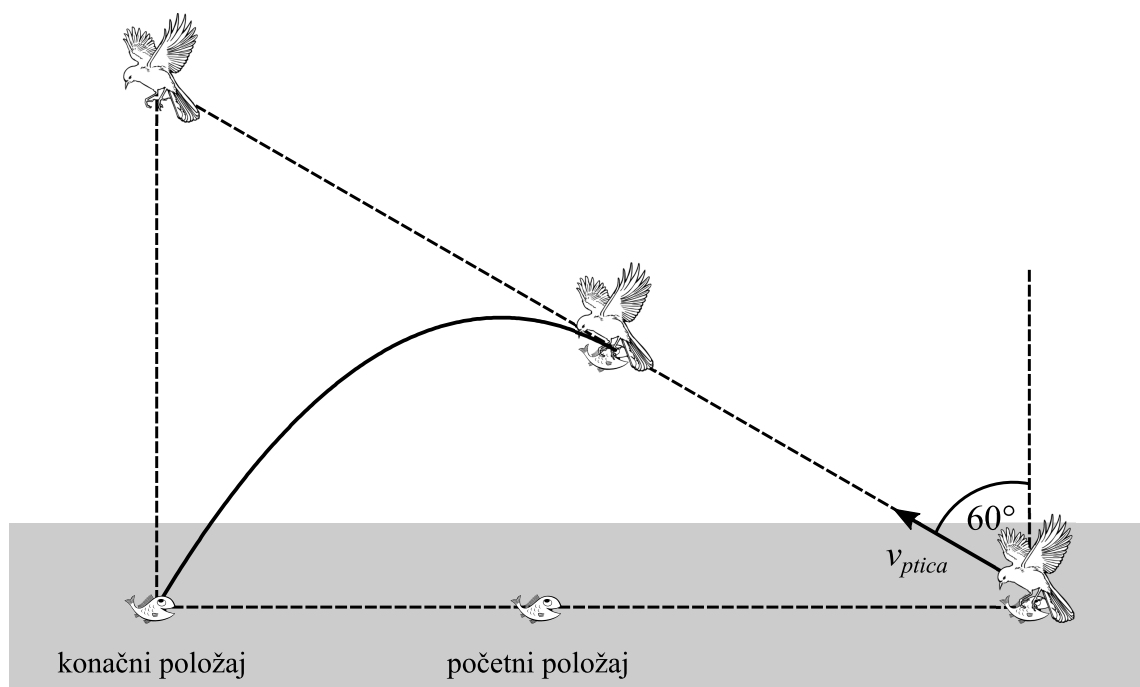
Ptica će se za $t_2 = 2 \text{ s}$ popesti na visinu:

$$y_2 = \frac{1}{2}v_{ptica}t_2 = 10 \text{ m} \quad (1 \text{ bod})$$

U trenutku ispuštanja riba ima početnu brzinu iznosa $v_0 = v_{ptica}$ u smjeru 30° u odnosu na horizontalu. Za gibanje ribe vrijede sljedeće jednačbe:

$$y(t) = y_2 + \frac{1}{2}v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1 \text{ bod})$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0t \quad (1 \text{ bod})$$



Slika 2: Zadatak 1 – zajedničko gibanje ribe i ptice, putanja ribe i ptice nakon ispuštanja ribe do njezinog pada u rijeku.

Maksimalnu visinu, koju postiže riba, možemo odrediti iz sljedeće relacije gdje smo uzeli u obzir da je vertikalna komponenta brzine u najvišoj točki putanje jednaka nuli:

$$\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 = 2gy_3 \Rightarrow y_3 = \frac{v_0^2}{8g} = 1.25 \text{ m (1 bod)}$$

$$y_{max} = y_2 + y_3 = 11.25 \text{ m (1 bod)}$$

U trenutku pada ribe u rijeku vrijedi:

$$y(t_4) = 0 = y_2 + \frac{1}{2}v_0t_4 - \frac{1}{2}gt_4^2$$

$$0 = 10 + 5t_4 - 5t_4^2$$

$$t_4^2 - t_4 - 2 = 0$$

$$(t_4 - 2)(t_4 + 1) = 0 \text{ (1 bod)}$$

Prihvatljivo rješenje za vrijeme pada ribe u rijeku je $t_4 = 2$ s nakon što ju je riba ispustila. **(1 bod)**

Udaljenost točke pada ribe u vodu od početne točke jednaka je:

$$(v_{riba} + v_{rijeka})t_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_{ptica}(t_2 + t_4) = 6 \text{ m/s} \cdot 3 \text{ s} - \frac{\sqrt{3}}{2}10 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} = -16.6 \text{ m, odnosno } 16.6 \text{ m lijevo od početnog položaja (2 boda).}$$

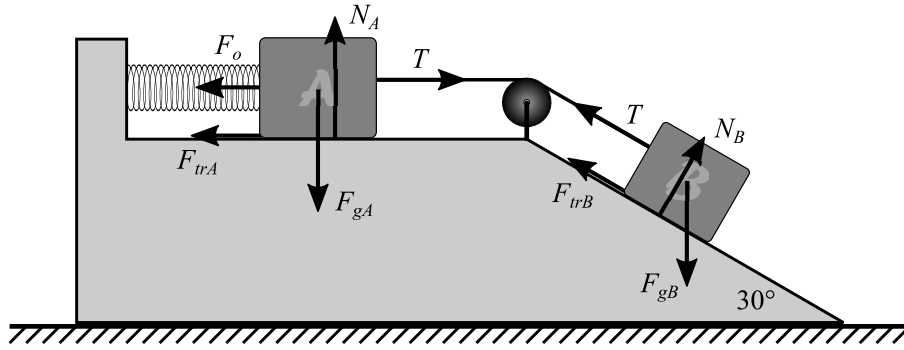
Riba i ptica se u horizontalnom smjeru gibaju jednakom brzinom pa prelaze i jednaku horizontalnu udaljenost. U trenutku pada ribe u rijeku njihova udaljenost jednaka je:

$$\frac{1}{2}v_{ptica}(t_2 + t_4) = 20 \text{ m. (1 bod)}$$

Putanje ribe i ptice prikazane su na slici: **(2 boda).**

2. zadatak (17 bodova)

Tijelo B gibat će se niz kosinu zbog čega će se tijelo A gibati prema desno. Sile na tijela A i B za vrijeme njihovog gibanja prikazane su na slici 3. Ubrzanje tijela A i B a' se mijenja za vrijeme gibanja jer se mijenja iznos sile opruge. Možemo napisati 2. Newtonov zakon za tijelo A i tijelo B po komponentama paralelno i okomito na podlogu:



Slika 3: Zadatak 2 – sile na tijelo A i B dok platforma miruje na horizontalnoj podlozi.

$$m_A a' = T - F_{trA} - F_o \text{ (1 bod)}$$

$$0 = N_A - F_{gA} \text{ (1 bod)}$$

$$m_B a' = \frac{1}{2} F_{gB} - F_{trB} - T \text{ (1 bod)}$$

$$0 = N_B - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{gB} \text{ (1 bod)}$$

Sila trenja jednaka je umnošku koeficijenta trenja i sile podloge na tijelo pa slijedi:

$$F_{trA} = \mu N_A = \mu F_{gA} \text{ (1 bod)}$$

$$F_{trB} = \mu N_B = \mu \frac{\sqrt{3}}{2} F_{gB} \text{ (1 bod)}$$

Uvrštavanjem izraza za sile trenja u prvu i treću jednadžbu i njihovim zbrajanjem dobije se:

$$F_o = \left(\frac{1}{2} m_B - \mu \left(m_A + \frac{\sqrt{3}}{2} m_B \right) \right) g - (m_A + m_B) a'$$

Sila opruge je:

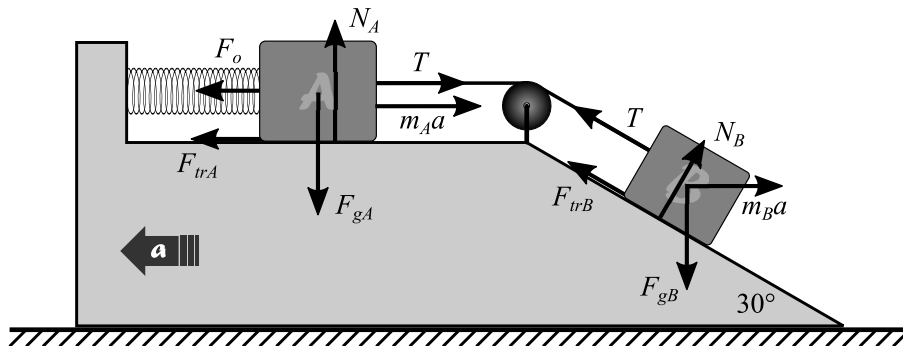
$$F_o = k(l - l_0) = k(1.1l_0 - l_0) = 0.1kl_0. \text{ (1 bod)}$$

Uvrštavanjem omjera masa $m_B = 2m_A$, ubrzanja tijela $a' = 0.1g$, izraza za silu opruge i koeficijenta trenja $\mu = 0.2$ dobije se:

$$0.2kl_0 = (1 - 0.3(1 + \sqrt{3})) m_A g$$

$$k = (5 - 2\sqrt{3}) \frac{m_A g}{l_0} \text{ (1 bod)}$$

Kada platforma ubrzava, na tijela A i B djeluje inercijalna sila u smjeru suprotnom od ubrzanja platforma. Iz uvjeta zadatka da će se opruga dodatno produljiti zaključujemo da inercijalna sila na tijela A i B djeluje prema desno što znači da je ubrzanje platforme prema lijevo **(1 bod)**. U ovom slučaju sve sile na tijela A i B u sustavu platforme prikazane su na slici 4.



Slika 4: Zadatak 2 – sile na tijelo A i B dok platforma ubrzava prema lijevo. Sile su prikazane u sustavu platforme.

U trenutku u kojem je ubrzanje tijela A i B u odnosu na platformu jednako nuli, 2.

Newtonov zakon za tijelo A i tijelo B po komponentama paralelno i okomito na podlogu glasi:

$$0 = T + m_A a - F_{trA} - F'_o \quad (1 \text{ bod})$$

$$0 = N_A - F_{gA} \quad (1 \text{ bod})$$

$$0 = \frac{1}{2} F_{gB} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_B a - F_{trB} - T \quad (1 \text{ bod})$$

$$0 = N_B + \frac{1}{2} m_B a - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{gB} \quad (1 \text{ bod})$$

Na sličan način kao u prethodnom slučaju izrazimo sile trenja, uvrstimo i zbrojimo jednažbe:

$$0 = \left(m_A + \frac{\sqrt{3}}{2} m_B + \mu \frac{1}{2} m_B \right) a - F'_o - \left(\mu m_A - \frac{1}{2} m_B + \mu \frac{\sqrt{3}}{2} m_B \right) g$$

Sila opruge je u ovom slučaju $F'_o = k(l' - l_0) = 0.4kl_0$. Uvrštavanjem poznatih vrijednosti dobije se:

$$(1.2 + \sqrt{3}) m_A a = 0.4l_0 (5 - 2\sqrt{3}) \frac{m_A g}{l_0} + (0.2\sqrt{3} - 0.8) m_A g$$

$$a = \frac{1.2 - 0.6\sqrt{3}}{1.2 + \sqrt{3}} g = 0.055g = 0.54 \text{ m/s}^2 \quad (4 \text{ boda})$$

3. zadatak (18 bodova)

Novčić A najprije će se sudariti s novčićem B. Njihovi položaji u trenutku sudara prikazani su na slici 5. Sila novčića A na novčić B djeluje okomito na tangentu u točki njihova dodira te će stoga brzina novčića B nakon sudara u_B imati isti smjer. Iz pravokutnog trokuta prikazanog na slici hipotenuze $4a$ i jedne katete $2a$ zaključujemo da je kut između smjera djelovanja sile i pozitivnog smjera osi y 30° (1 bod). Zakon očuvanja količine gibanja za sudar novčića A i B možemo napisati po komponentama u koordinatnom sustavu:

$$0 = m_A u_{Ax} - m_B \frac{1}{2} u_B \quad (1 \text{ bod})$$

$$m_A v_A = m_A u_{Ay} + m_B \frac{\sqrt{3}}{2} u_B \quad (1 \text{ bod})$$

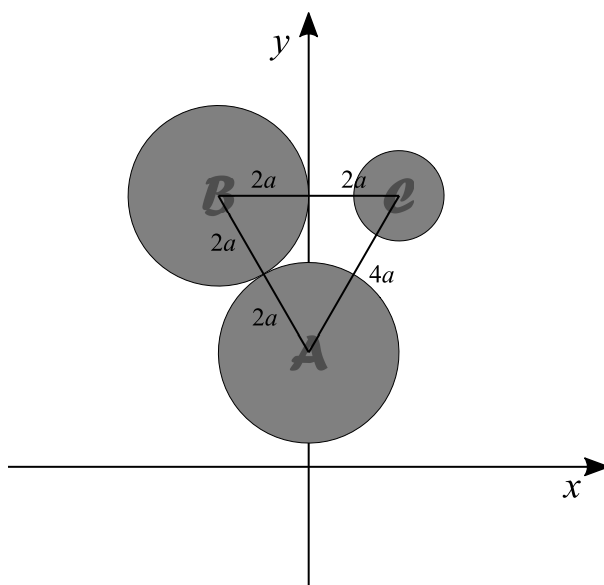
Zakon očuvanja energije za ovaj sudar glasi:

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 \quad (1 \text{ bod})$$

S obzirom na to da se novčić B nakon sudara s novčićem A giba u 2. kvadrantu koordinatnog sustava zaključujemo da će se s novčićem C sudariti novčić A. Iz zadanog podatka da nakon svih sudara novčić A miruje, možemo zaključiti sljedeće:

- sudar novčića A i C je centralan, (1 bod)
- mase novčića A i C su jednake, (1 bod)
- brzina novčića C nakon sudara jednaka je brzini novčića A prije sudara. (1 bod)

Centralni sudar novčića znači da je sila novčića A na novčić C u smjeru brzine novčića A prije sudara. U suprotnom, slično kao u sudaru novčića A i B, smjer brzine novčića C nakon sudara bila bi u smjeru okomitom na tangentu u točki njihova dodira, odnosno pod određenim kutem u odnosu na brzinu novčića A prije sudara. Prethodno bi zbog zakona očuvanja količine gibanja nužno značilo da bi novčić A nakon sudara imao komponentu brzine okomitu na smjer brzine prije sudara. No, budući da je zadano da novčić A nakon



Slika 5: Zadatak 3 – položaji novčića u trenutku prvog sudara (sudar novčića A i B).

sudara miruje, zaključujemo da je sudar novčića A i C centralan (**2 boda**). Dalje možemo analizirati centralni elastični sudar novčića A i C gdje su brzine novčića prije sudara: u_A i $u_C = 0$, a nakon sudara: u'_A i u'_C . Zakoni očuvanja količine gibanja i energije su kako slijedi (gibanje novčića prije i nakon sudara je duž osi paralelne smjeru brzine u_A):

$$m_A u_A = m_A u'_A + m_C u'_C$$

$$\frac{1}{2} m_A u_A^2 = \frac{1}{2} m_A u'^2_A + \frac{1}{2} m_C u'^2_C$$

Iz zakona očuvanja količine gibanja izrazimo u_A :

$$u_A = u'_A + \frac{m_C}{m_A} u'_C,$$

uvrstimo u zakon očuvanja energije i sredimo pa dobijemo jednadžbu:

$$u'_C \left(\left(1 - \frac{m_C}{m_A} \right) u'_C - 2u'_A \right) = 0$$

Rješenje $u'_C = 0$ i $u'_A = u_A$ odbacujemo jer ne odgovara uvjetima ovog sudara. Iz drugog rješenja za brzine novčića A i C nakon sudara slijedi:

$$u'_A = \frac{m_A - m_C}{m_A + m_C} u_A, \quad u'_C = \frac{2m_A}{m_A + m_C} u_A$$

Iz zahtjeva zadatka da je $u'_A = 0$ slijedi $m_A = m_C = 5$ g, a nadalje za brzinu novčića A prije sudara s novčićem C slijedi $u_A = u'_C = 10$ cm/s. (**4 boda**)

Ako je sudar novčića A i C centralan, to znači da se novčić A prije sudara s novčićem C, a nakon sudara s novčićem B gibao duž spojnice središta novčića A i C. Iz slike možemo vidjeti da iz toga slijedi da brzina novčića A nakon sudara s novčićem B zatvara kut od 30° s pozitivnim smjerom osi y , odnosno da je $u_{Ax} = \frac{1}{2} u_A$ i $u_{Ay} = \frac{\sqrt{3}}{2} u_A$ (**1 bod**). Prethodno uvrstimo u zakon očuvanja količine gibanja za sudar novčića A i B pa dobijemo:

$$0 = m_A \frac{1}{2} u_A - m_B \frac{1}{2} u_B$$

$$m_A v_A = m_A \frac{\sqrt{3}}{2} u_A + m_B \frac{\sqrt{3}}{2} u_B$$

Iz prve jednadžbe slijedi $m_A u_A = m_B u_B$. Uvrštavanjem u drugu dobijemo:

$$v_A = \sqrt{3} u_A = \sqrt{3} u'_C = 17.3 \text{ cm/s} \quad (\mathbf{1 \text{ bod}})$$

Uvrštavanjem prethodnih izraza u zakon očuvanja energije dobije se omjer masa novčića:

$$\frac{m_A}{m_B} = 2 \quad (\mathbf{1 \text{ bod}})$$

Pa je prema tome masa novčića B $m_B = \frac{1}{2} m_A = 2.5$ g (**1 bod**).

Nadalje za brzinu novčića B nakon sudara slijedi:

$$u_B = \frac{m_A}{m_B} u_A = 2u_A = 20 \text{ cm/s} \quad (\mathbf{1 \text{ bod}}).$$

4. zadatak (18 bodova)

Venera se giba oko Sunca po kružnoj putanji radi djelovanja gravitacijske sile te stoga 2. Newtonov zakon glasi:

$$m_{Venera} \frac{v^2}{r} = G \frac{m_{Venera} m_{Sunce}}{r^2}, \quad (\mathbf{2 \text{ boda}})$$

gdje je v orbitalna brzina Venere, a r polumjer kružne putanje Venere oko Sunca. Brzina v nadalje je jednaka:

$$v = \frac{2r\pi}{T_{Venera}}. \quad (\mathbf{1 \text{ bod}})$$

Uvrštavanjem prethodnog u 2. Newtonov zakon dobijemo:

$$\frac{4r\pi^2}{T_{Venera}^2} = G \frac{m_{Sunce}}{r^2} \Rightarrow T_{Venera} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G m_{Sunce}}} = 224.7 \text{ dana} \quad (\mathbf{2 \text{ boda}})$$

Uzmimo da se u početnom trenutku $t = 0$ Venera nalazi u položaju donje konjunkcije na kutu 0° . Smjer rotacije Zemlje i Venere oko Sunca prikazan je na slici 6. Uspoređujući sideričke periode Venere i Zemlje zaključujemo da se Venera giba brže od Zemlje. Za vrijeme jednog sideričkog perioda Venere Zemlja će se pomaknuti za kut:

$$\Delta\phi = \frac{360^\circ}{T_{Zemlja}} T_{Venera} = 221.5^\circ \quad (1 \text{ bod})$$

U vremenu sljedećeg sideričkog perioda Venere, odnosno u trenutku $t = 2T_{Venera}$ Zemlja će se dodatno zakrenuti za $\Delta\phi$ te će biti na kutu:

$$2 \cdot 221.5^\circ - 360^\circ = 83^\circ \quad (1 \text{ bod})$$

U trenutku $t = 3T_{Venera}$ Zemlja je na položaju:

$$3 \cdot 221.5^\circ - 360^\circ = 304.5^\circ \quad (1 \text{ bod})$$

Sa slike možemo vidjeti da nakon vremena T_{Venera} Zemlja još nije napravila puni krug oko Sunca. U trenutku $2T_{Venera}$ Zemlja je napravila jedan puni krug i nalazi se na 83° . Također možemo vidjeti da Venera između T_{Venera} i $2T_{Venera}$ sustiže Zemlju te da se razlika kuta između Venere i Zemlje smanjila. U trenutku $3T_{Venera}$ vidimo da je Venera prestigla Zemlju što znači da se donja konjunkcija Venere dogodila u trenutku T_S koji je između $2T_{Venera}$ i $3T_{Venera}$. Dakle, Venera će između dva položaja donje konjunkcije napraviti dva puna kruga oko Sunca, a Zemlja jedan (1 bod). Na slici su također prikazani položaji dvije uzastopne donje konjunkcije Venere pri čemu se Zemlja i Venera u drugoj konjunkciji nalaze na kutu α . Vrijedi:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{T_{Zemlja}} (T_S - T_{Zemlja}) \quad (1 \text{ bod})$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{T_{Venera}} (T_S - 2T_{Venera}) \quad (1 \text{ bod})$$

Izjednačimo prethodne dvije jednadžbe:

$$\frac{360^\circ}{T_{Zemlja}} (T_S - T_{Zemlja}) = \frac{360^\circ}{T_{Venera}} (T_S - 2T_{Venera})$$

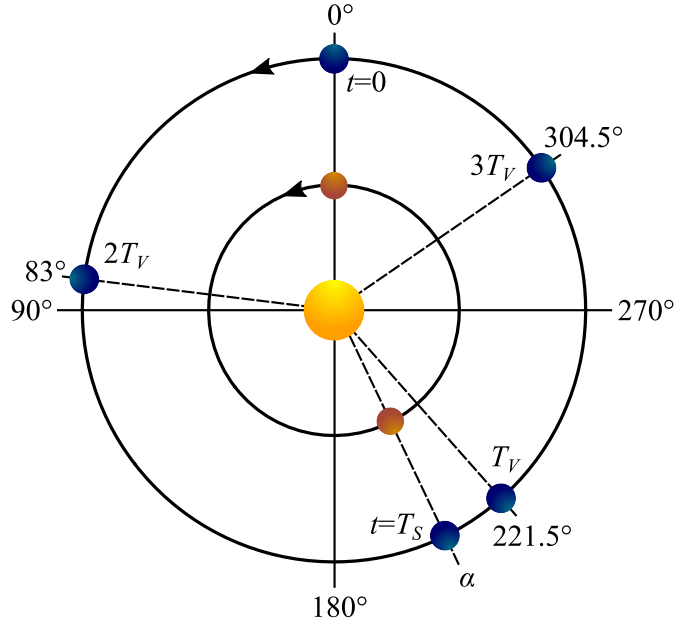
Sređivanjem za sinodički period Venere T_S dobijemo:

$$T_S = \frac{T_{Zemlja} T_{Venera}}{T_{Zemlja} - T_{Venera}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{Venera}} - \frac{1}{T_{Zemlja}}} = 583.9 \text{ dana} \quad (2 \text{ boda})$$

Uvjet za opažanje sljedećeg Venerinog tranzita je da se Venera nalazi u donjoj konjunkciji i to na istom položaju u odnosu na daleke zvijezde kao 8. lipnja 2004. Prethodno smo odredili da se nakon svakog sideričkog perioda Zemlja i Venera zakrenu za kut α . Slijedi da traženi uvjet možemo zapisati kao $n\alpha \approx m360^\circ$, gdje su n i m prirodni brojevi (2 boda). Najprije izračunamo kut α :

$$\alpha = 360^\circ \frac{2T_{Venera} - T_{Zemlja}}{T_{Zemlja} - T_{Venera}} = 215.5^\circ \quad (1 \text{ bod})$$

Uvrštavanjem prirodnih brojeva dobivamo da je $5 \cdot 215.5^\circ \approx 3 \cdot 360^\circ$ (1 bod) što znači da se sljedeći Venerin tranzit dogodio 5 sideričkih perioda Venere nakon 8. lipnja 2004., odnosno nakon $5 \cdot 583.9 \text{ dana} = 2919.5 \text{ dana} \approx 8 \text{ godina}$ (1 bod).



Slika 6: Zadatak 4