Pristup konstrukciji izvoda/dokaza u sustavu prirodne dedukcije

Luka Mikec (ime.prezime@math.hr)

Prva verzija i izlaganje: 6. 10. 2018.
Posljednja verzija: 9. 10. 2018.

Najnovija verzija ovog teksta je na adresi:
https://docs.google.com/document/d/1YDxcN3XfNa5Fh2i_l2yACbPfkyvi9igGbfklKD3zgoo/edit?usp=sharing

- korištenjem tzv. principa inverzije:
  izvodivost konkluzije povlači izvodivost premisa.

- naravno, taj princip ne vrijedi općenito.

- (okvirni) primjeri korištenja:
  1. treba izvesti $A \land B$ iz $\{A, B\}$.
     Pregledom pravila izvođenja uočimo da postoji pravilo izvođenja
     (konkretno, uvođenje konjunkcije) kojemu je $A \land B$ konkluzija.
     Znamo da je konkluzija izvodiva (pretpostavka zadatka je da jest),
     pa P.I. sad implicira da su A, B (premise tog pravila) izvedive.
     Stoga su nam sad novi ciljevi izvesti formulu A, odnosno B, a njih već imamo u premisama.
  2. treba izvesti $A \lor B$ iz $\{A \land A\}$.
     Analogno kao ranije, no sad nam se nude dva pravila s traženom konkluzijom:
     ```
       A        B
     ------   ------
     A ∨ B    A ∨ B
     ```
     Ako krenemo prvim putem, uspjet ćemo završiti izvod (A ćemo moći izvesti iz $A \land A$).
     No ako krenemo drugim putem, nećemo.
     Tu uočavamo da korištenje principa inverzije i dalje ostavlja prostor "pogađanju",
     tj. i dalje sami moramo probati procijeniti što je sljedeći najbolji korak.
     Ne moramo pogoditi iz prve -- ako pogriješimo, vratimo se natrag i probamo dalje.
  3. treba izvesti $P \lor \neg P$ iz $\{P \to P\}$.
     Kao u drugom primjeru, opet imamo dvije mogućnosti
     ```
        P         ¬P
     -------   -------
     P ∨ ¬P    P ∨ ¬P
     ```
     No niti jedna mogućnost nas neće dovesti do cilja. Naime, pretpostavimo da treba dokazati P.
     To znači da P slijedi iz premise. Nije moguće da kontigencija (P) slijedi iz tautologije ($P \to P$).
     Ovaj primjer demonstrira da ne samo da nas princip inverzije nekad neće mehanički usmjeriti
     prema cilju (što smo vidjeli u drugom primjeru), već nekad uopće neće funkcionirati.
     Osnovna metoda u takvim slučajevima je koristiti isključenje disjunkcije (ako imamo neku disjunkciju),

ili pravila koja na neki način koriste reductio ad absurdum,
obično su to pravila uključenja ili isključenja negacije ili kontradikcije.

- u nastavku je detaljnija skica korištenja principa inverzije kao pomoći pri konstrukciji izvoda.
  - prvo, promotrimo formulu (nazovimo ju F) koju želimo izvesti (jednu među njima, ako ih je više).
    Potom biramo:
  - 1. mogući postupak (P1). Javlja li se F kao dio neke formule G u ostatku izvoda?
    Preciznije, u dijelu izvoda kojeg možemo koristiti (iznad promatrane formule itd.)
    Ako da, koristimo pravila isključenja kako bismo malo po malo "razbili" G i iz nje izvukli F.
    Npr. ako tražimo T a imamo $(U \land (T \land V)) \land Z$, redom bismo htjeli izvući sljedeće formule:

    ```
    (U ∧ (T ∧ V)) ∧ Z;
     U ∧ (T ∧ V);
           T ∧ V;
           T.
    ```
  - 2. mogući postupak (P2). Postoji li pravilo izvođenja kojem je konkluzija F?
    Ako da, pokušamo dokazati premise tog pravila.

- napomena: pojam "premise" kroz ovaj tekst/izlaganje koristimo u smislu
  "ono iz čega izvodimo konkluziju", što nisu nužne formule
  (npr. u ovom smislu i sami izvodi mogu biti premise).
- napomena: ne moramo se strogo držati postupka; koristimo ga prvenstveno kad nismo sigurni što dalje.
- napomena: korisno je označivati si dijelove izvoda koje treba dovršiti (ja ću stavljati zvjezdice),
  te kvačice kod formula koje ne traže dodatne formule (u koraku u kojem se riješe ću
  uokviriti kvačice, da bude vidljivije što smo napravili).

==========
Primjer 1.
==========

Zadatak: izvesti $(A \land B) \to C$ iz $A \to (B \to C)$.

1. korak

```
| A → (B → C) ☑      (☑ jer nemamo što raditi oko pretpostavke,
|---                     tj. bilo kakva pretpostavka je uvijek dopušten dio izvoda)
| *
| (A ∧ B) → C
```

P1? Formula $(A \land B) \to C$ se ne javlja gore, dakle ne možemo ju "izvući".
P2? Pravilo uvođenja pogodbe ima kao konkluziju formulu traženog oblika (nešto → nešto).

2. korak

```
| A → (B → C) ✔
```

```
|---
|| A ∧ B ☑
||---
|| *
|| C
| (A ∧ B) → C ☑
```

P1? Formula C se javlja u prvoj premisi. Želimo izvući C iz nje:

```
 A → (B → C);
       B → C;
            C.
```

Dakle, imamo dva zadatka: prvo iz A → (B → C) doći do B → C, a onda iz B → C doći do C.
Recimo da u sljedećem koraku odlučimo riješiti prvi dio, tj. kako doći od A → (B → C) do B → C.
Pregledom pravila izvođenja uočimo da pravilo isključenja pogodbe ima traženi oblik.
Potrebno nam je dokazati A.

Napomena: možda su oznake zvjezdica i poredak rješavanja drugačiji nego uživo (oboje je u redu).

3. korak

```
| A → (B → C) ✔
|---
|| A ∧ B ✔
||---
|| **
|| A
|| B → C ☑
|| *
|| C
| (A ∧ B) → C ✔
```

Recimo da sada gledamo *, tj. promatramo formulu C.

P1? Formula C je u prvoj premisi, te u retku kojeg smo upravo dodali.
Taj smo redak upravo i dodali kako bismo izvukli C, pa koristimo njega.
Uočimo da se C u toj formuli nalazi odmah uz glavni operator, u ovom slučaju operator →.
To znači da možemo odmah tražiti pravilo (bez daljnjeg izvlačenja) koje ima ovakav oblik:

```
 B → C
 (možda još neke dodatne formule ovdje)
 -----------
 C
```

Vidimo da pravilo isključenja pogodbe ima traženi oblik, pa dodajemo potrebnu premisu B.

4. korak

```
| A → (B → C) ✔
|---
|| A ∧ B ✔
||---
|| **
|| A
|| B → C ✔
|| *
```

|| B
|| C ☑
| (A ∧ B) → C ✔

Recimo da i dalje gledamo *, tj. promatramo formulu B.

P1? Da, B se javlja u više formula. Iskustvom/intuicijama pogodimo da nam treba A ∧ B.
    (Ako pogriješimo, naprosto se vratimo u ovaj korak kad vidimo da ne možemo dalje.)
    Tražimo pravilo izvoda sljedećeg oblika:
     A ∧ B
     (možda još neke dodatne formule ovdje)

     B
    Pravilo isključenja konjunkcije ima traženi oblik, i nisu potrebne dodatne formule, pa brišemo *.

5. korak
| A → (B → C) ✔
|---
|| A ∧ B ✔
||---
|| **
|| A
|| B → C ✔
|| B ☑
|| C ✔
| (A ∧ B) → C ✔

Preostaje **, odnosno formula A. Postupamo analogno kao u prethodnom koraku.

6. korak
| A → (B → C) ✔
|---
|| A ∧ B ✔
||---
|| A ☑
|| B → C ✔
|| B ✔
|| C ✔
| (A ∧ B) → C ✔

Ovo je traženi izvod jer više nema zvjezdica (odnosno, jer su svugdje kvačice).
Preostaje nadopisati brojeve linija i opravdanja (i maknuti kvačice, naravno).

```
==========
Primjer 2.
==========
```

Obrat prethodnog primjera. Ovaj primjer nismo stigli uživo.

Zadatak: izvesti A → (B → C) iz (A ∧ B) → C.

1. korak

```
| (A ∧ B) → C ☑
|---
| *
| A → (B → C)
```

P1? Formula A → (B → C) se ne javlja gore, dakle ne možemo ju "izvući".
P2? Pravilo uvođenja pogodbe ima kao konkluziju formulu traženog oblika (nešto → nešto).

2. korak

```
| (A ∧ B) → C ✔
|---
|| A ☑
||---
|| *
|| B → C
| A → (B → C) ☑
```

P1? Formule B → C nema gore.
P2? Opet isto pravilo, uvođenje pogodbe, ima konkluziju traženog oblika.

3. korak

```
| (A ∧ B) → C ✔
|---
|| A ✔
||---
||| B ☑
|||---
||| *
||| C
|| B → C ☑
| A → (B → C) ✔
```

P1? Formula C je u prvoj premisi, i to operand prve premise
(tj. nalazi se odmah uz glavni operator, u ovom slučaju operator →, prve premise).
To znači da možemo odmah tražiti pravilo koje ima ovakav oblik:

```
  (A ∧ B) → C
  (možda još neke dodatne formule ovdje)
  -----------
  C
```

Vidimo da pravilo isključenja pogodbe ima traženi oblik, pa dodajemo potrebnu premisu.

4. korak
| (A ∧ B) → C ✔
|---
|| A ✔
||---
||| B ✔
|||---
||| *
||| A ∧ B
||| C ☑
|| B → C ✔
| A → (B → C) ✔

P1? Formula A ∧ B se javlja u premisi, ali vidimo da je ona tamo antecedent.
Općenito ne možemo dokazati antecedent iz pogodbe.
(Da je bila neka složenija formula, možda bismo prvo probali izvući A ∧ B iz nje,
p ako ne bismo uspjeli, onda bismo se vratili u ovaj korak i isprobali P2).

P2? Da, pravilo uvođenja konjunkcije ima kao konkluziju formulu traženog oblika (nešto ∧ nešto).
Dodajemo premise tog pravila u sljedećem koraku.

5. korak
| (A ∧ B) → C ✔
|---
|| A ✔
||---
||| B ✔
|||---
||| *
||| A
||| **
||| B
||| A ∧ B ✔
||| C ✔
|| B → C ✔
| A → (B → C) ✔

Sada imamo dvije praznine, * i **.
Fokusirajmo se i dalje na * (svejedno je, morat ćemo prije ili kasnije i **). Tu promatramo formulu A.

Uočimo da imamo formulu A ranije, pa ovdje koristimo opetovanje (reiteraciju).

6. korak
| (A ∧ B) → C ✔
|---
|| A ✔
||---
||| B ✔
|||---
||| A ☑
||| **

||| B
||| A ∧ B ✔
||| C ✔
|| B → C ✔
| A → (B → C) ✔

Analogno kao 5. korak, ali za ** i formulu B.

7. korak
| (A ∧ B) → C ✔
|---
|| A ✔
||---
||| B ✔
|||---
||| A ✔
||| B ☑
||| A ∧ B ✔
||| C ✔
|| B → C ✔
| A → (B → C) ✔

Ovo je traženi izvod jer više nema zvjezdica (odnosno, jer su svugdje kvačice).
Preostaje nadopisati brojeve linija i opravdanja (i maknuti kvačice, naravno).

==========
Primjer 3.
==========

Izvesti D iz { (B → B) → A, A <→ ¬C, (B ∨ ¬C) → D }.
Pisat ćemo samo koristimo li dalje P1 ili P2

1. korak
| (B → B) → A ☑
| A <→ ¬C ☑
| (B ∨ ¬C) → D ☑
|---
| *
| D

P1.

2. korak
| (B → B) → A ✔
| A <→ ¬C ✔
| (B ∨ ¬C) → D ✔
|---
| *
| B ∨ ¬C
| D ☑

P2 (iako se B ∨ ¬C nalazi u 3. premisi; tamo je ona antecedent pa nam to nije korisno),
imamo dvije mogućnosti, B, odnosno ¬C, no B se javlja kao dio tautologije (B → B) što nam nije korisno.

3. korak
| (B → B) → A ✔
| A <→ ¬C ✔
| (B ∨ ¬C) → D ✔
|---
| *
| ¬C
| B ∨ ¬C ☑
| D ✔

P1 (radit ćemo s drugom premisom).

4. korak
| (B → B) → A ✔
| A <→ ¬C ✔
| (B ∨ ¬C) → D ✔
|---
| *
| A
| ¬C ☑
| B ∨ ¬C ✔
| D ✔

P1.

5. korak
| (B → B) → A ✔
| A <→ ¬C ✔
| (B ∨ ¬C) → D ✔
|---
| *
| B → B
| A ☑
| ¬C ✔
| B ∨ ¬C ✔
| D ✔

P2. (B → B se javlja u premisama, ali kao antecedent, neiskoristivo)

```
6. korak
| (B → B) → A ✔
| A <→ ¬C ✔
| (B ∨ ¬C) → D ✔
|---
|| B ☑
||---
|| *
|| B
| B → B ☑
| A ☑
| ¬C ✔
| B ∨ ¬C ✔
| D ✔
```

Reiteracija.

```
7. korak
| (B → B) → A ✔
| A <→ ¬C ✔
| (B ∨ ¬C) → D ✔
|---
|| B ✔
||---
|| B ☑
| A ✔
| ¬C ✔
| B ∨ ¬C ✔
| D ✔
```

Kao i ranije, sad dodajemo opravdanja itd.

==========
ZADATAK 1.
==========

Izvedite (A → B) → (A → C) iz {A → (B → C)}.
Jedan mogući finalni izvod:

```
| A → (B → C)
|---
|| A → B
||---
||| A
|||---
||| B → C
||| B
||| C
|| A → C
| (A → B) → (A → C)
```

U nastavku dajemo primjere u kojima se koristi isključenje disjunkcije, te reductio ad absurdum. Oboje zahtijeva više kreativnosti i pogađanja od prethodnih primjera; tj. primjena tih pravila je manje mehanička.

```
==========
Primjer 4.
==========
```

Izvesti (A → B) || (C → D) iz {B ∨ D}.

```
1. korak
| B ∨ D  ☑
|---
|
| (A → B) || (C → D)
```

P1? Ne možemo.
P2? Možemo, ali pravilom uključenja disjunkcije nećemo ništa postići (slično kao s P ∨ ¬P na samom početku izlaganja).
Kada ni P1 ni P2 ne pomažu, bar ne na načine na koje smo ih do sada koristili,
možemo probati s isključenjem disjunkcije, ili reductio ad absurdum (potonje se realizira kroz kombinaciju pravila za negaciju i kontradikciju, ovisno o situaciji).
Disjunkcije u izvodu (prvenstveno premisa u formi disjunkcije, ali i konkluzija) daju naslutiti
da treba koristiti pravila za disjunkciju.

```
2. korak
| B ∨ D  ✔
|---
|| B ☑
||---
|| *
|| (A → B) || (C → D)
|
|| D ☑
||---
|| **
|| (A → B) || (C → D)
| (A → B) || (C → D) ☑
```

Fokusirajmo se primjerice na *. Ostatak izvoda je jednostavan. Koristimo P2.

3. korak

```
| B ∨ D  ✔
|---
|| B ✔
||---
|| *
|| A → B
|| (A → B) || (C → D) ☑
|
|| D ✔
||---
|| **
|| (A → B) || (C → D)
| (A → B) || (C → D) ✔
```

P2.

4. korak

```
| B ∨ D  ✔
|---
|| B ✔
||---
||| A ☑
|||---
||| *
||| B
|| A → B ☑
|| (A → B) || (C → D) ✔
|
|| D ✔
||---
|| **
|| (A → B) || (C → D)
| (A → B) || (C → D) ✔
```

Reiteracija/opetovanje.

5. korak

```
| B ∨ D  ✔
|---
|| B ✔
||---
||| A ✔
|||---
||| B ☑
|| A → B ✔
|| (A → B) || (C → D) ✔
|
|| D ✔
||---
|| **
|| (A → B) || (C → D)
| (A → B) || (C → D) ✔
```

(**) rješavamo analogno kao ranije (*), samo s C i D umjesto A i B (koraci i izvodi su jednaki do na tu razliku). Preskočit ćemo te korake ispod.

```
Finalni korak
| B ∨ D  ✔
|---
|| B ✔
||---
||| A ✔
|||---
||| B ✔
|| A → B ✔
|| (A → B) || (C → D) ✔
|
|| D ✔
||---
||| C ✔
|||---
||| D ☑
|| C → D ✔
|| (A → B) || (C → D) ✔
| (A → B) || (C → D) ✔
```

```
==========
ZADATAK 2.
==========
```

Izvedite (A ∨ C) → (C ∧ D) iz {A → C, D}.
Jedan mogući finalni izvod:

```
| A → C
| D
|---
|| A ∨ C
||---
||| A
|||---
||| C
||| C ∧ D
||
||| C
|||---
||| C ∧ D
|| C ∧ D
| (A ∨ C) → (C ∧ D)
```

==========
Primjer 5.
==========

Dokažite P ∨ ¬P.

1. korak
```
| *
| P ∨ ¬P ☑
```

Pretpostavimo suprotno i tražimo kontradikciju. (Dodat ćemo "reductio ad absurdum kostur" odjednom.)

2. korak
```
|| ¬(P ∨ ¬P) ☑
||---
|| *
|| ⊥
| ¬¬(P ∨ ¬P) ☑
| P ∨ ¬P ☑
```

Sad je pitanje kako uvesti kontradikciju, koja će formula biti kontradiktorna?
Često je dobra ideja probati s jednostavnim formulama koje se u nekom obliku
već javljaju izvodu, npr. P, ¬P, P ∨ ¬P. Odabrat ćemo P (što nije najbolji izbor, kao što ćemo vidjeti).

3. korak
```
|| ¬(P ∨ ¬P) ✔
||---
|| *
|| P
|| **
|| ¬P
|| ⊥ ☑
| ¬¬(P ∨ ¬P) ✔
| P ∨ ¬P ✔
```

Probajmo dokazati ¬P, opet kroz reductio ad absurdum
(s jednim retkom manje jer je ta formula već negirana).

4. korak
```
|| ¬(P ∨ ¬P) ✔
||---
|| *
|| P
|||P ☑
|||---
||| **
||| ⊥
|| ¬P ☑
|| ⊥ ✔
| ¬¬(P ∨ ¬P) ✔
| P ∨ ¬P ✔
```

Uočimo da iz P možemo dokazati P ⋁ ¬P, a negaciju te formule imamo od ranije.

5. korak
|| ¬(P ⋁ ¬P) ✔
||---
|| *
|| P
|||P ✔
|||---
||| **
||| P ⋁ ¬P
||| ⊥ ☑
|| ¬P ✔
|| ⊥ ✔
| ¬¬(P ⋁ ¬P) ✔
| P ⋁ ¬P ✔
Kao što smo najavili, P ⋁ ¬P dokazujemo iz P, brišemo **.

6. korak
|| ¬(P ⋁ ¬P) ✔
||---
|| *
|| P
|||P ✔
|||---
||| P ⋁ ¬P ☑
||| ⊥ ✔
|| ¬P ✔
|| ⊥ ✔
| ¬¬(P ⋁ ¬P) ✔
| P ⋁ ¬P ✔

Mogli bismo ponoviti slično za * kao što smo napravili kroz korake 4-6 za ** (i tada je izvod gotov).
Međutim, uočimo da je kontradikciju u trećem retku s kraja
moguće dobiti na sličan način kao kontradikciju u petom retku s kraja, tj. koristeći formule
P ⋁ ¬P te ¬(P ⋁ ¬P), umjesto našeg prvog izbora. Stoga restrukturiramo dokaz na sljedeći način:

7. korak
|| ¬(P ⋁ ¬P) ✔
||---
|||P ✔
|||---
||| P ⋁ ¬P ✔
||| ⊥ ✔
|| ¬P ✔
|| *
|| P ⋁ ¬P
|| [ovdje bismo inače dodali ¬(P ⋁ ¬P) i nove zvjezdice, ali već imamo tu formulu]
|| ⊥ ☑
| ¬¬(P ⋁ ¬P) ✔
| P ⋁ ¬P ✔

P2.

```
8. korak
|| ¬(P ∨ ¬P) ✔
||---
|||P ✔
|||---
||| P ∨ ¬P ✔
||| ⊥ ✔
|| ¬P ✔
|| P ∨ ¬P ☑
|| ⊥ ✔
| ¬¬(P ∨ ¬P) ✔
| P ∨ ¬P ✔
```

==========
ZADATAK 3.
==========

Izvedite ¬B → ¬A iz {A → B}.
Jedan mogući finalni izvod:

```
| A → B
|---
|| ¬B
||---
||| A
|||---
||| B
||| ⊥
|| ¬A
| ¬B → ¬A
```