

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

8.-10. svibnja 2019.

## BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA\*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD\*
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA\*

\*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drugačije.

## B KATEGORIJA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		27
2.		52
3.		30
4.		30
5.		50
<b>UKUPNO</b>		<b>189</b>

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

### Zadatak 1.

Dovršite sljedeće rečenice podcrtavanjem ili zaokruživanjem. Svaki potpuno točno ispunjen podzadatak nosi **3 boda**, izostanak rješenja **1 bod**, a inače podzadatak nosi **-3 boda**. U slučaju negativnog ukupnog broja bodova, cijeli zadatak donosi 0 bodova.

1. Formula  $A \rightarrow \neg A$  je **samo zadovoljiva (ispunjiva)** / **samo nevaljana (oboriva)** / **i ispunjiva i nevaljana** / **niti ispunjiva niti nevaljana**.
2. Ako znamo da je formula  $\neg A \wedge \neg \neg A$  konjunkt u nekoj konjunkciji, a ne znamo što je drugi konjunkt, *nije isključeno* da je cijela konjunkcija: **valjana** / **nevaljana** / **zadovoljiva** / **nezadovoljiva** / **ništa od navedenog** (označite sve što može vrijediti).
3. Ako znamo da je formula  $A \vee B$  konjunkt u nekoj konjunkciji, a ne znamo što je drugi konjunkt, na temelju toga **jest** / **nije** isključeno da je cijela konjunkcija istovrijedna (ekvivalentna) formuli  $B \vee C$ .
4. Za barem jednu formulu s kvantifikatorima (količiteljima) koja nije kontradikcija, **postoji** / **ne postoji** njoj istovrijedna formula bez kvantifikatora.
5. Iz *knjiga je velika osim ako je dosadna* **slijedi** / **ne slijedi** ako *knjiga nije dosadna, nije ni velika*.
6. Za **neke** / **sve** parove pojmova jednakog sadržaja, vrijedi da su im i opsezi jednaki.
7. Pretpostavimo da smo započeli istinitosno stablo s neke dvije formule (jedna ispod druge na vrhu stabla), te da su (nakon rješavanja) sve grane tog stabla zatvorene. Na temelju toga **možemo** / **ne možemo** isključiti mogućnost da su početne dvije formule ekvivalentne.
8. Pretpostavimo da želimo ispitati je li ili nije neka formula iskazne logike: valjana, nevaljana, zadovoljiva i nezadovoljiva. Označite svojstva za koja vrijedi da sigurno možemo zaključiti posjeduje li ih dana formula samo na temelju istinitosnog stabla započetog tom formulom, kao i samo na temelju istinitosnog stabla započetog negacijom te formule: **valjana** / **nevaljana** / **zadovoljiva** / **nezadovoljiva** / **ništa od navedenog**
9. Ako mačka Annie mjaučje, a mačka Frozen prede, onda **slijedi** / **ne slijedi** sljedeće: Annie i Frozen su istovjetne samo ako Annie prede, a Frozen mjaučje.

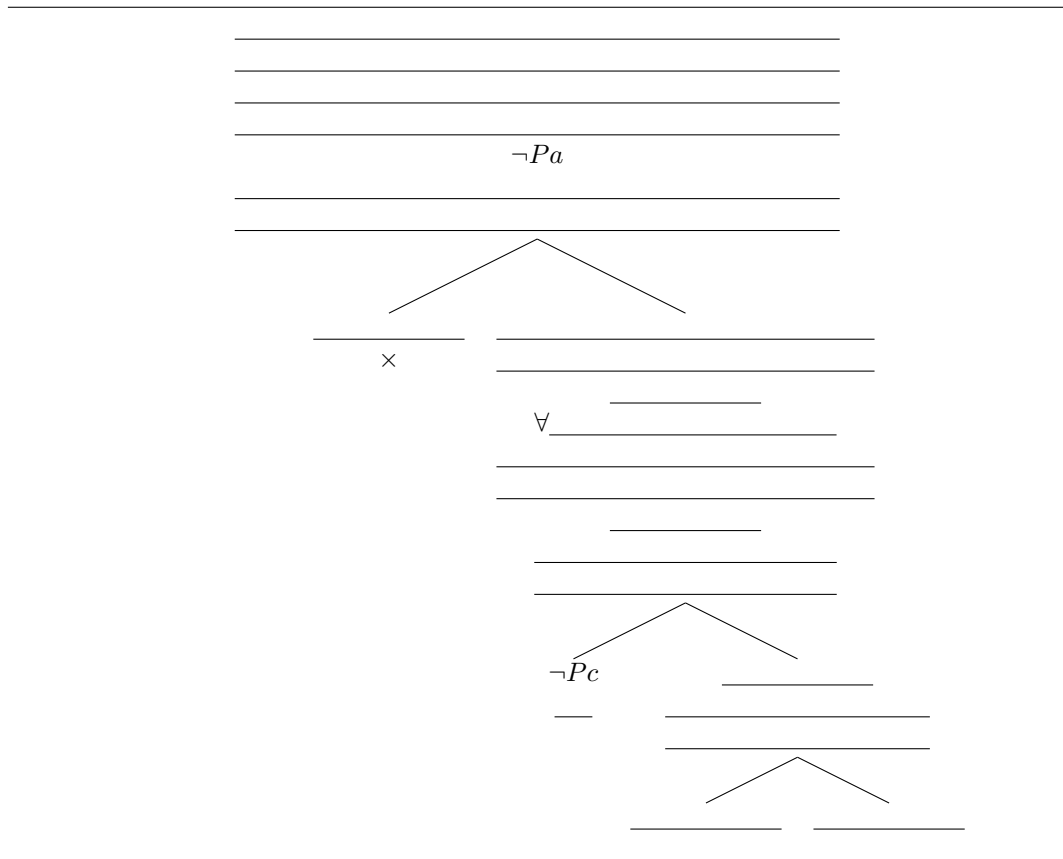
(9×3 boda = 27 bodova)

Istinitosnim (semantičkim) stablom provjerite je li

$$\forall x(\neg Px \rightarrow \exists y(Qyx \wedge \forall z(Pz \rightarrow \neg Ryz))) \rightarrow \forall x(\neg Px \rightarrow \forall y(Py \rightarrow \exists z(Qzx \wedge \neg Rzy)))$$

valjan iskaz. Na crte ili pokraj njih možete upisivati samo formule i/ili simbole  $\checkmark$ ,  $\circ$  i  $\times$ .

*Dozvoljeno je pisanje opravdanja, ali se ne boduje niti ikako može utjecati na dobiveni broj bodova.*



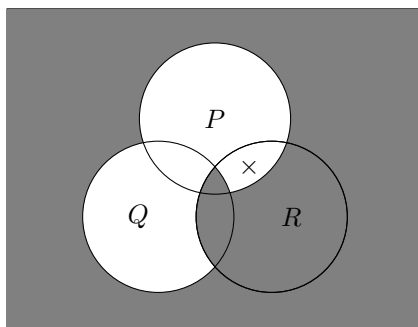
Iskaz \_\_\_\_\_ valjan.

Bodovanje: potpuni izostanak rješenja nosi 10 bodova. Inače:

*Svaki* potpuno točno ispunjen redak zajedno s pripadajućom kvačicom ✓ (ako je potrebna) nosi 2 boda. Odgovor na pitanje o valjanosti iskaza nosi 2 boda ako i samo ako je cijelo stablo ispravno ispunjeno.

**26×2 boda = 52 boda)**

**Zadatak 3.**



Na temelju gornjega dijagrama odgovorite jesu li sljedeći iskazi istiniti (I), neistiniti (N) ili im se na temelju dijagrama ne može utvrditi istinitosna vrijednost (?):

1.  $\forall x(\neg Px \rightarrow Qx) \wedge \exists xRx$  \_\_\_\_\_
2.  $(\forall xQx \rightarrow \neg \exists xRx) \rightarrow \forall x(Rx \rightarrow Qx)$  \_\_\_\_\_
3.  $\forall x(Rx \rightarrow Px) \leftrightarrow \forall x(\neg Qx \rightarrow Rx)$  \_\_\_\_\_
4.  $\neg \exists x(Px \wedge Qx) \rightarrow \forall x(\neg Px \rightarrow Qx)$  \_\_\_\_\_
5.  $\forall x(\neg Qx \rightarrow Rx) \vee \exists x\neg(Px \rightarrow \neg Qx)$  \_\_\_\_\_
6.  $\exists x(Px \wedge Qx) \rightarrow \neg \exists x(Px \vee Qx)$  \_\_\_\_\_
7.  $\forall y((\exists x\neg Qx \rightarrow \forall xPx) \rightarrow (Qy \rightarrow Qy))$  \_\_\_\_\_
8.  $\forall x(Qx \rightarrow \neg \forall y\neg Qy) \wedge \neg(\forall y\neg Qy \rightarrow \neg \exists xQx)$  \_\_\_\_\_
9.  $\exists x(Rx \wedge \neg Qx) \leftrightarrow \exists y(Qy \wedge \neg Ry)$  \_\_\_\_\_
10.  $\forall y(\forall z(\neg Qz \rightarrow Rz) \rightarrow (Qy \vee Ry))$  \_\_\_\_\_

**(10×3 boda = 30 bodova)**

#### Zadatak 4.

a) U članku “Zašto  $2 + 2 = 4$  ?” Boran Berčić opisuje pet različitih filozofskih teorija o prirodi matematičke istine. Upišite na prazna mjesta u sljedećim rečenicama imena tih teorija ili pojmove *istinit/neistinit* tako da su rečenice koje na taj način dobijete u skladu s navodima u članku.

1. Ako je realizam istinit, a fizikalizam neistinit, platonizam je \_\_\_\_\_.
2. Ako je \_\_\_\_\_ istinit, matematika je empirijska znanost.
3. Matematički iskazi nemaju istinitosnu vrijednost samo ako je \_\_\_\_\_ istinit.
4. Ako je \_\_\_\_\_ istinit, matematički su iskazi istiniti na temelju jezične konvencije.
5. \_\_\_\_\_ je istinit samo ako su matematički iskazi istine psihologije.
6. Ako su matematički iskazi nužno istiniti, ali nisu niti istine psihologije niti istiniti na temelju jezične konvencije, \_\_\_\_\_ je istinit.
7. Realizam nije istinit ako i samo ako je bilo \_\_\_\_\_ bilo \_\_\_\_\_ istinit.

b) Pridružimo rečenicama iz prethodnoga podzadatka sljedeće tri tvrdnje:

8. Matematika je empirijska znanost samo ako matematički iskazi nisu nužno istiniti.
9. Matematički su iskazi istiniti ako imaju istinitosnu vrijednost.
10. Ako su matematički iskazi istiniti, onda su nužno istiniti.

Slijedi li iz tvrdnji 1.–10. da je platonizam istinit ako je realizam istinit? **DA / NE**

c) Navedite neki brojem rečenica minimalan podskup rečenica 1.–10. iz kojega slijedi da ako je fizikalizam istinit, onda matematički iskazi nisu nužno istiniti? (Navedite samo redne brojeve rečenica.) \_\_\_\_\_

d) Koju od sljedećih rečenica treba dodati rečenicama 1.–10. da bi iz njih slijedilo da je platonizam istinit ako fikcionalizam nije istinit? Zaokružite redni broj rečenice.

11. Ako fikcionalizam nije istinit, nije istinit ni fizikalizam.
12. Ako je platonizam istinit, matematički su iskazi nužno istiniti.
13. Ako su matematički iskazi nužno istiniti, onda oni nisu niti istine psihologije niti istiniti na temelju jezične konvencije

**Napomena:** točni odgovori na podzadatke b), c) i d) priznaju se samo ako je podzadatak a) u potpunosti točno riješen.

(10×3 boda = 30 bodova)

**Zadatak 5.** Dopršite započetu dedukciju. **Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).**

1	$\neg\neg\neg A \rightarrow A$	pretp.
2		pretp.
3		pretp.
4	$A$	_____
5		_____
6		_____
7		_____
8		_____
9		_____
10		pretp.
11		_____
12		_____
13		_____
14		_____
15		pretp.
16		pretp.
17		_____
18	$B$	_____
19		_____
20		_____
21	$((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge (B \rightarrow C))$	_____

*Bodovanje.* Potpuni izostanak rješenja nosi 10 bodova. Inače, svaki potpuno točno ispunjen redak (formula i opravdanje) nosi 2 boda, a prazan ili pogrešan 0 bodova. Dodatnih 10 bodova nosi svako rješenje bez greške, ili gdje su jedine greške u opravdanjima.

**(20×2+10 = 50 bodova)**

## PRILOG: Dopusštena pravila prirodne dedukcije (1/2)

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što znači da uvijek započinje podizvodom. Primjere možete vidjeti na dnu sljedeće stranice.
- Opravdanja se sastoje od tri podatka: simbol veznika, slovo u ili i (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Te tri informacije mogu biti odijeljene razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak te tri informacije proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteracija (opetovanje) ne sadrži slovo u ili i.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak rednog broja  $k$  mogao se pojaviti prije retka rednog broja  $j$ , a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati  $\wedge u, j, k$  ili  $\wedge u, k, j$ . U sva četiri slučaja, pravilo zovemo  $\wedge u$ .
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.

Uvođenje konjunkcije. \*

j		$A$	
		$\vdots$	
k		$B$	
		$\vdots$	
		$A \wedge B$	$\wedge u, j, k$

Uvođenje disjunktije.

j		$A$		j		$B$	
		$\vdots$				$\vdots$	
		$A \vee B$	$\vee u, j$			$A \vee B$	$\vee u, j$

Uvođenje kondicionala.

j			$A$	pretp.
			$\vdots$	
k			$B$	
			$A \rightarrow B$	$\rightarrow u, j-k$

Uvođenje bikondicionala.

j			$A$	pretp.
			$\vdots$	
k			$B$	
m			$B$	pretp.
			$\vdots$	
n			$A$	
			$A \leftrightarrow B$	$\leftrightarrow u, j-k, m-n$

Uvođenje kontradikcije. \*

j		$A$	
		$\vdots$	
k		$\neg A$	
		$\vdots$	
		$\perp$	$\perp u, j, k$

Uvođenje negacije.

j			$A$	pretp.
			$\vdots$	
k			$\perp$	
			$\neg A$	$\neg u, j-k$

Isključenje konjunkcije.

j		$A \wedge B$		j		$A \wedge B$	
		$\vdots$				$\vdots$	
		$A$	$\wedge i, j$			$B$	$\wedge i, j$

Isključenje disjunktije.

e		$A \vee B$	
		$\vdots$	
j		$A$	pretp.
		$\vdots$	
k		$C$	
m		$B$	pretp.
		$\vdots$	
n		$C$	
		$C$	$\vee i, e, j-k, m-n$

Isključenje kondicionala. \*

j		$A \rightarrow B$	
		$\vdots$	
k		$A$	
		$\vdots$	
		$B$	$\rightarrow i, j, k$

Isključenje bikondicionala. \*

j		$A \leftrightarrow B$		j		$A \leftrightarrow B$	
		$\vdots$				$\vdots$	
k		$A$		k		$B$	
		$\vdots$				$\vdots$	
		$B$	$\leftrightarrow i, j, k$			$A$	$\leftrightarrow i, j, k$

Isključenje kontradikcije.

j		$\perp$	
		$\vdots$	
		$A$	$\perp i, j$

Isključenje negacije.

j		$\neg \neg A$	
		$\vdots$	
		$A$	$\neg i, j$

Reiteracija (opetovanje).

j		$A$	
		$\vdots$	
		$A$	re., j (ili op., j)

## PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (2/2)

- U nastavku navodimo pravila za kvantifikatore (količitelje). Koristimo logiku prvog reda bez funkcijskih simbola. Pravila su (zbog preciznosti) opisana apstraktnije nego što ste možda učili u školi, no suštinski su to ista pravila. **Na dnu je primjer konkretnog dokaza.**
- Neka je  $A$  formula koja možda sadrži pojave (javljanja, nastupe) neke varijable  $x$ .
  - Označimo s  $A(t/x)$  formulu jednaku formuli  $A$ , osim što je **svaka** slobodna pojava varijable  $x$  u  $A$  zamijenjena pojavom (pseudo)konstante  $t$ .
- Neka je  $A$  formula koja možda sadrži pojave neke (pseudo)konstante  $t$ .
  - Označimo s  $A(x/t)$  formulu jednaku formuli  $A$ , osim što je **svaka** pojava (pseudo)konstante  $t$  u  $A$  zamijenjena pojavom varijable  $x$ .
  - Označimo s  $A(x//t)$  formulu jednaku formuli  $A$ , osim što je **nula ili više** pojava (pseudo)konstante  $t$  u  $A$  zamijenjeno pojavom varijable  $x$ .

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j		$A$	
		$\vdots$	
		$\exists x A(x//t)$	$\exists u, j$

Ako formula  $A$  već sadrži kvantifikatore nad varijablom  $x$ , pojave  $t$  u  $A$  ne smiju biti u doseg tih kvantifikatora.

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora.

j		$A$	
		$\vdots$	
		$\forall x A(x/t)$	$\forall u, j$

Pseudokonstanta  $t$  se pritom ne smije javljati u pretpostavci nekog (pod)dokaza koji još nije završen. Ako formula  $A$  već sadrži kvantifikatore nad varijablom  $x$ , pojave  $t$  u  $A$  ne smiju biti u doseg tih kvantifikatora.

Isključenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j		$\exists x A$	
		$\vdots$	
k		$A(t/x)$	pretp.
		$\vdots$	
m		$B$	
		$B$	$\exists i, j, k-m$

Pseudokonstanta  $t$  se ne smije javljati u formulama u redcima ispred retka  $k$ , niti u formuli  $B$ .

Isključenje univerzalnog kvantifikatora.

j		$\forall x A$	
		$\vdots$	
		$A(t/x)$	$\forall i, j$

Dajemo primjer dokaza da je formula  $(\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pc$  teorem. Dokaz je duži no što je potrebno, kako bismo demonstrirali primjenu svih pravila za kvantifikatore.

1		$\exists x Rxx$	pretp.
2		$Raa$	pretp.
3		$\exists y Ray$	$\exists u, 2$
4		$\exists x \exists y Rxy$	$\exists u, 3$
5		$\exists x \exists y Rxy$	$\exists i, 1, 2-4$
6		$\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy$	$\rightarrow u, 1-5$
7		$(\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pb$	$\vee u, 6$
8		$\forall z ((\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pz)$	$\forall u, 7$
9		$(\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pc$	$\forall i, 8$

Dajemo primjer izvoda formule  $\neg \neg Pc$  iz formula  $Pc$  i  $\neg Pd$ .

1		$Pc$	pretp.
2		$\neg Pd$	pretp.
3		$\neg Pc$	pretp.
4		$\perp$	$\perp u, 1, 3$
5		$\neg \neg Pc$	$\neg u, 3-4$

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE 2019.

## B KATEGORIJA

## RJEŠENJA

### Zadatak 1.

1. i ispunjiva i nevaljana
2. nevaljana, nezadovoljiva
3. jest (kakva god bila konjunkcija, ako je  $C$  istinito,  $A, B$  neistinito, prva formula je neistinita, druga istinita)
4. postoji (npr.  $A \vee \neg A, \forall x Px \vee \neg \forall x Px$ )
5. ne slijedi
6. sve
7. ne možemo
8. ništa od navedenog
9. slijedi

**Ukupno 27 bodova.**

### Zadatak 2.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg(\forall x(\neg Px \rightarrow \exists y(Qyx \wedge \forall z(Pz \rightarrow \neg Ryz))) \rightarrow \forall x(\neg Px \rightarrow \forall y(Py \rightarrow \exists z(Qzx \wedge \neg Rzy))))}{\forall x(\neg Px \rightarrow \exists y(Qyx \wedge \forall z(Pz \rightarrow \neg Ryz)))} \checkmark \\
 \frac{\neg \forall x(\neg Px \rightarrow \forall y(Py \rightarrow \exists z(Qzx \wedge \neg Rzy)))}{\exists x \neg(\neg Px \rightarrow \forall y(Py \rightarrow \exists z(Qzx \wedge \neg Rzy)))} \checkmark \\
 \frac{\neg(\neg Pa \rightarrow \forall y(Py \rightarrow \exists z(Qza \wedge \neg Rzy)))}{\neg Pa} \checkmark \\
 \frac{\neg \forall y(Py \rightarrow \exists z(Qza \wedge \neg Rzy))}{\neg Pa \rightarrow \exists y(Qya \wedge \forall z(Pz \rightarrow \neg Ryz))} \checkmark \\
 \begin{array}{cc}
 \frac{\neg \neg Pa}{\times} & \frac{\exists y(Qya \wedge \forall z(Pz \rightarrow \neg Ryz))}{Qba \wedge \forall z(Pz \rightarrow \neg Rbz)} \checkmark \\
 & \frac{Qba}{\forall z(Pz \rightarrow \neg Rbz)} \checkmark \\
 & \frac{\exists y \neg(Py \rightarrow \exists z(Qza \wedge \neg Rzy))}{\neg(Pc \rightarrow \exists z(Qza \wedge \neg Rzc))} \checkmark \\
 & \frac{Pc}{\neg \exists z(Qza \wedge \neg Rzc)} \checkmark \\
 & \frac{Pc \rightarrow \neg Rbc}{\neg Pc} \checkmark \\
 & \frac{\neg Rbc}{\forall z \neg(Qza \wedge \neg Rzc)} \checkmark \\
 & \frac{\neg(Qba \wedge \neg Rbc)}{\neg Qba} \checkmark \\
 & \frac{\neg \neg Rbc}{\times} \checkmark
 \end{array}
 \end{array}$$

Bodovanje je opisano u zadatku.

**Ukupno 52 boda.**

### Zadatak 3.

1. I, 2. N, 3. ?, 4. I, 5. ?, 6. ?, 7. I, 8. N, 9. ?, 10. I.

**Ukupno 30 bodova.**

### Zadatak 4.

- a) 1. istinit, 2. fizikalizam, 3. fikcionalizam, 4. nominalizam, 5. konceptualizam, 6. platonizam, 7. fikcionalizam, nominalizam, konceptualizam (bilo kojim redoslijedom)
- b) Da.
- c) 2, 8
- d) 13

**Ukupno 30 bodova.**

**Zadatak 5.**

1	$\neg\neg\neg A \rightarrow A$	pretp.
2	$(A \wedge B) \rightarrow C$	pretp.
3	$\neg\neg\neg A$	pretp.
4	$A$	$\rightarrow$ i, 1, 3
5	$\neg A$	$\neg$ i, 3
6	$\perp$	$\perp$ u, 4, 5
7	$\neg\neg\neg\neg A$	$\neg$ u, 3–6
8	$\neg\neg A$	$\neg$ i, 7
9	$A$	$\neg$ i, 8
10	$B$	pretp.
11	$A \wedge B$	$\wedge$ u, 9, 10
12	$C$	$\rightarrow$ i, 2, 11
13	$B \rightarrow C$	$\rightarrow$ u, 10–12
14	$A \wedge (B \rightarrow C)$	$\wedge$ u, 9, 13
15	$A \wedge (B \rightarrow C)$	pretp.
16	$A \wedge B$	pretp.
17	$B \rightarrow C$	$\wedge$ i, 15
18	$B$	$\wedge$ i, 16
19	$C$	$\rightarrow$ i, 17, 18
20	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$\rightarrow$ u, 16–19
21	$((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge (B \rightarrow C))$	$\leftrightarrow$ u, 2–14, 15–20

Bodovanje je opisano u zadatku.

**Ukupno 50 bodova.**