

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
27. siječnja 2020.

4. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. a) Prvi način:**

Označimo igrače brojevima od 1 do 10. Ispišimo mogućnosti za jednog od igrača (jer izbor igrača ne utječe na rezultat), primjerice za igrača broj 1:

1 i 2, 1 i 3, 1 i 4, 1 i 5, 1 i 6, 1 i 7, 1 i 8, 1 i 9, 1 i 10.

1 BOD

S obzirom na to da je svejedno kojeg smo igrača promatrali, zaključujemo da će svaki igrač odigrati 9 partija.

1 BOD

**Drugi način:**

Kako svaki igrač mora odigrati sa svakim, promotrimo jednog od igrača, primjerice prvog.

Prvi igrač mora odigrati partije sa svakim od preostalih 9 igrača, dakle odigrat će 9 partija.

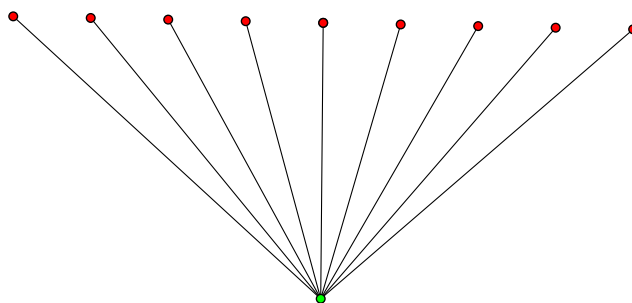
1 BOD

S obzirom na to da je svejedno kojeg smo igrača promatrali, zaključujemo da će svaki igrač odigrati 9 partija.

1 BOD

**Treći način:**

Prikažimo grafički sve partije koje je odigrao jedan igrač, pri čemu svakog od igrača označimo točkom.



1 BOD

Ukupan broj partija jednak je ukupnom broju dužina kojima smo spojili jednu točku (igrača) s preostalim točkama (igračima), tj. zaključujemo da će svaki igrač odigrati 9 partija.

1 BOD

**b) Prvi način:**

Zapišimo sve moguće partije koje će odigrati igrači na turniru pazeći da partije koje igraju isti igrači ne brojimo dva puta:

1 BOD

1 i 2, 1 i 3, 1 i 4, 1 i 5, 1 i 6, 1 i 7, 1 i 8, 1 i 9, 1 i 10      9 partija

2 i 3, 2 i 4, 2 i 5, 2 i 6, 2 i 7, 2 i 8, 2 i 9, 2 i 10      8 partija

3 i 4, 3 i 5, 3 i 6, 3 i 7, 3 i 8, 3 i 9, 3 i 10      7 partija

1 BOD

4 i 5, 4 i 6, 4 i 7, 4 i 8, 4 i 9, 4 i 10      6 partija

5 i 6, 5 i 7, 5 i 8, 5 i 9, 5 i 10      5 partija

6 i 7, 6 i 8, 6 i 9, 6 i 10      4 partija

7 i 8, 7 i 9, 7 i 10      3 partije

8 i 9, 8 i 10      2 partije

9 i 10      1 partija

1 BOD

Ukupno je odigrano  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$  partija.

1 BOD

**Drugi način:**

Zbrojimo redom sve partije koje su odigrali igrači počevši od prvog.

Prvi igrač je odigrao 9 partija.

Drugi igrač je odigrao također 9 partija no već smo brojali njegovu partiju s prvim igračem pa dodajemo novih 8 partija.

Treći igrač je odigrao također 9 partija no već smo brojali njegove partije s prvim i drugim igračem pa dodajemo novih 7 partija. 2 BODA

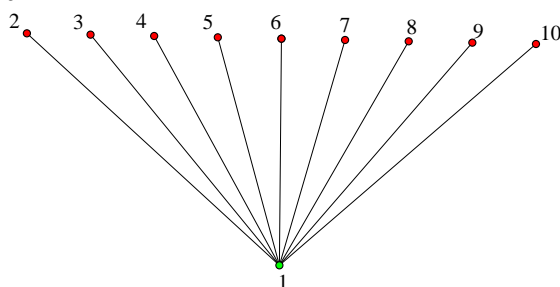
Dalje zaključujemo da od četvrtog igrača trebamo dodati novih 6 partija, od petog igrača novih 5 partija, od šestog igrača nove 4 partije, od sedmog igrača nove 3 partije, od osmog igrača nove 2 partije, od devetog još 1 partiju i to onu s desetim igračem. 1 BOD

Ukupno je odigrano  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$  partija. 1 BOD

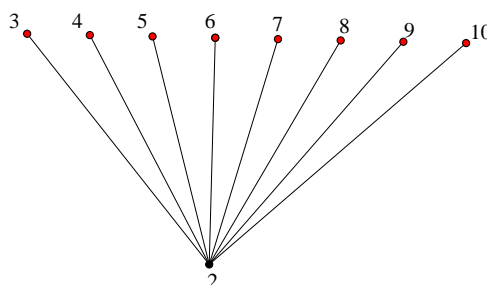
### Treći način:

Prikažimo grafički sve partije koje su odigrali igrači. Za pregledniji grafički prikaz neka svaki od igrača bude jedna točka, a točke označimo brojevima od 1 do 10. Tada je broj partija jednak broju nacrtanih dužina, kojima su rubne točke igrači.

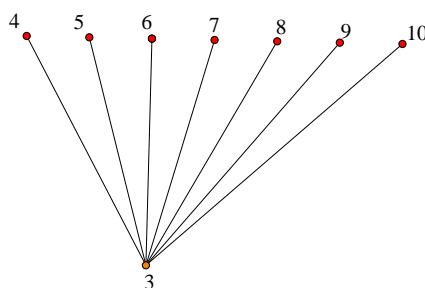
Prvi igrač je odigrao 9 partija.



Drugi je igrač odigrao 9 partija, no onu s prvim igračem već smo brojali pa dobijemo još 8 novih:



Treći je igrač odigrao 9 partija, no onu s prvim i drugim igračem već smo brojali pa dobijemo još 7 novih:



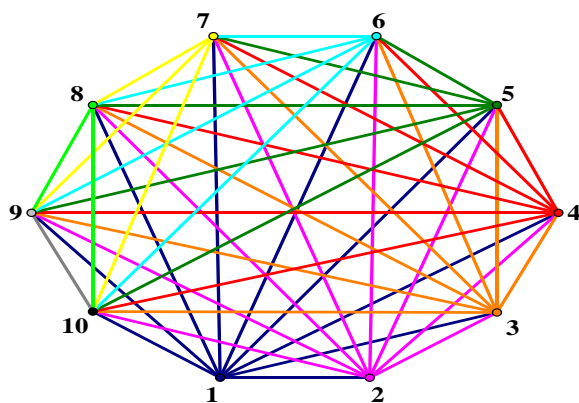
2 BODA

Analognim postupcima zaključujemo da od četvrtog igrača trebamo dodati novih 6 partija, od petog igrača novih 5 partija, od šestog igrača nove 4 partije, od sedmog igrača nove 3 partije, od osmog igrača nove 2 partije, od devetog još 1 partiju i to onu s desetim igračem. 1 BOD

Ukupno je odigrano  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$  partija. 1 BOD

### Četvrti način:

Moguće je i grafičko rješenje kao na slici.



1 BOD

Iz slike vidimo da je prvi igrač odigrao 9 partija, drugi 8 koje još nismo brojali, treći 7 koje još nismo brojali, četvrti 6 koje još nismo brojali, peti 5 koje još nismo brojali, šesti 4 koje još nismo brojali, sedmi 3 koje još nismo brojali, osmi 2 koje još nismo brojali i deveti još jednu s desetim igračem koju još nismo brojali.

2 BODA

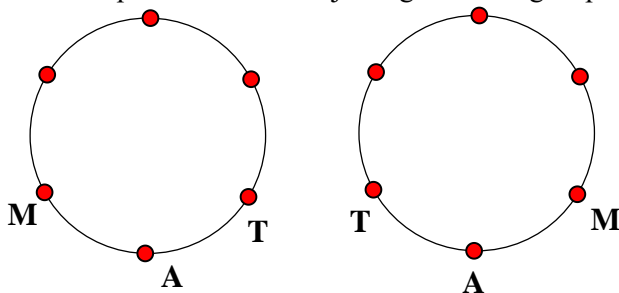
Ukupno je odigrano  $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$  partija.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

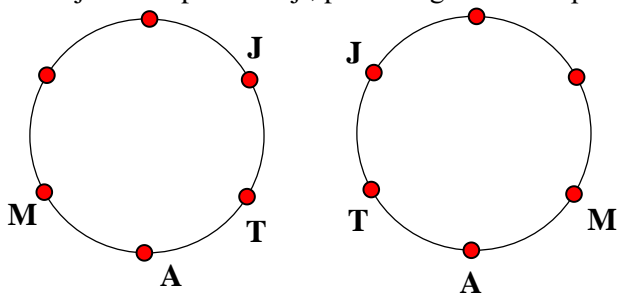
2. Budući da Ana ne sjedi pored dječaka, pored Ane sjede preostale dvije djevojčice, Marija i Tina.

Prikažimo pomoću crteža dvije mogućnosti tog rasporeda:



2 BODA

Janko sjedi nasuprot Mariji, pa su mogućnosti rasporeda sljedeće:

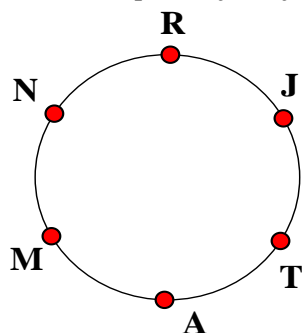


1 BOD

Kako Janko sjedi pored Roka, s njegove lijeve strane, desni raspored sjedenja nije moguć jer Janko sjedi pored Tine, s njezine lijeve strane.

1 BOD

Konačan raspored sjedenja je:



Dakle, pored Tine, s njene desne strane sjedi Janko, a pored Nina, s njegove lijeve strane Roko.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. a) Majka je pogledala na sat u 13 h i 5 min, a kako je Barbara stigla prije 10 minuta, znači da je na kolodvor stigla u 12 h i 55 min.

1 BOD

Budući da je putovala četiri sata i dvadeset dvije minute, imamo:

$$12 - 4 = 8 \text{ i } 55 - 22 = 33$$

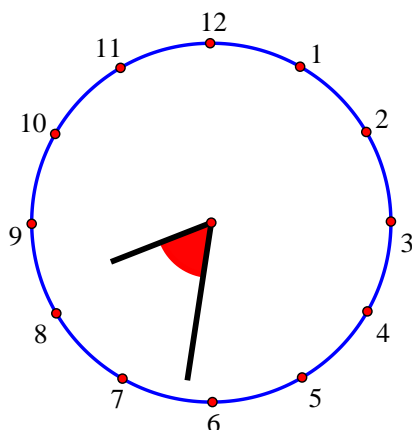
2 BODA

Dakle, Barbara je krenula u 8 h i 33 min.

1 BOD

b) Skica:

1 BOD

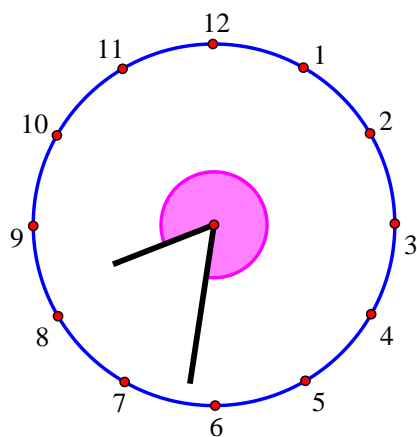


U 8 h i 33 min kazaljke sata određivale su šiljasti kut.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Napomena:** Moguće rješenje je i izbočeni kut. Skicu treba bodovati 1 BODOM kao i zaključak da kazaljke na satu određuju izbočeni kut.



#### 4. Prvi način:

Prikažimo grafički manji pribrojnik:



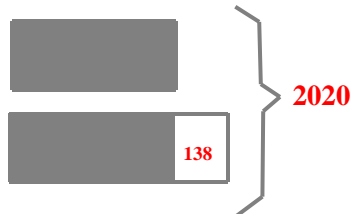
1 BOD

Onda je grafički prikaz većeg pribrojnika:



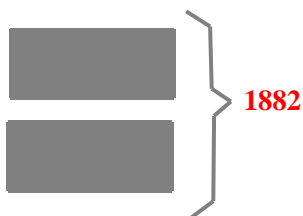
1 BOD

Kako je njihov zbroj 2020 dobijemo:



1 BOD

Sada je




1 BOD

odnosno,  $1882 : 2 = 941$ .

 = 941

Dakle, jedan pribrojnik (manji) je 941.

1 BOD

  $138 = 941 + 138 = 1079$

Drugi pribrojnik je 1079.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

#### Drugi način:

Zbroj dva pribrojnika je 2020, a razlikuju se za 138 pa vrijedi:

$$2020 : 2 = 1010$$

1 BOD

$$138 : 2 = 69$$

1 BOD

Jedan pribrojnik je  $1010 - 69 = 941$ .

2 BODA

Drugi pribrojnik je  $1010 + 69 = 1079$ .

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

#### Treći način:

Neka je manji od pribrojnika  $a$ , onda je veći  $a + 138$ .

2 BODA

Sada vrijedi:

$$a + a + 138 = 2020$$

1 BOD

$$a + a = 1882$$

1 BOD

$$a = 941$$

Jedan pribrojnik je 941.

1 BOD

Drugi pribrojnik je  $941 + 138 = 1079$ .

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

#### 5. Prvi način:

Kada svaku kovanicu iskoristimo jednom, platili smo 8 kn.

1 BOD

Preostaje još platiti 12 kuna, koristeći bilo koje kovanice.

1 BOD

Sve mogućnosti plaćanja prikažimo tablicom:

<b>5 kn</b>	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
<b>2 kn</b>	1	0	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
<b>1 kn</b>	0	2	1	3	5	7	0	2	4	6	8	10	12

3 BODA

Traženi iznos može se platiti na 13 načina.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Drugi način:**

Mogućnosti prikazimo tablicom (ili nabrojanjem):

<b>5 kn</b>	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
<b>2 kn</b>	1	2	4	3	2	1	7	6	5	4	3	2	1
<b>1 kn</b>	3	1	2	4	6	8	1	3	5	7	9	11	13

SVE točno zapisane kombinacije:

5 BODOVA

Iznos od 20 kn možemo platiti kovanicama na 13 različitih načina.

1 BOD

**Napomena:** Ako učenik ponudi djelomično točno rješenje bodovati tako da svake tri točne kombinacije nose po 1 BOD.

..... UKUPNO 6 BODOVA

**6. Prvi način:**

Označimo redom s N, A, K i M iznose novca koje su dale Nensi, Ana, Karla i Mirna.

Sada uvjete iz zadatka možemo zapisati kao:

$$M + A + N + K = 150$$

$$M + N + K = 120$$

$$N + A + K = 102$$

1 BOD

Iz prve dvije jednakosti zaključujemo da je Ana dala  $150 - 120 = 30$  kuna.

2 BODA

Iz prve i treće jednakosti zaključujemo da je Mirna dala  $150 - 102 = 48$  kuna.

2 BODA

Sada iz druge ili treće jednakosti zaključujemo da su Nensi i Karla zajedno dale 72 kune ( $120 - 48 = 72$  ili  $102 - 30 = 72$ ), tj.  $N + K = 72$ .

1 BOD

Osim toga znamo i da je Karla dala 10 kuna više od Nensi tj.

$$K = N + 10$$

To znači da je dvostruki iznos koji je dala Nensi  $72 - 10 = 62$ .

2 BODA

Dakle, Nensi je dala  $62 : 2 = 31$  kunu.

1 BOD

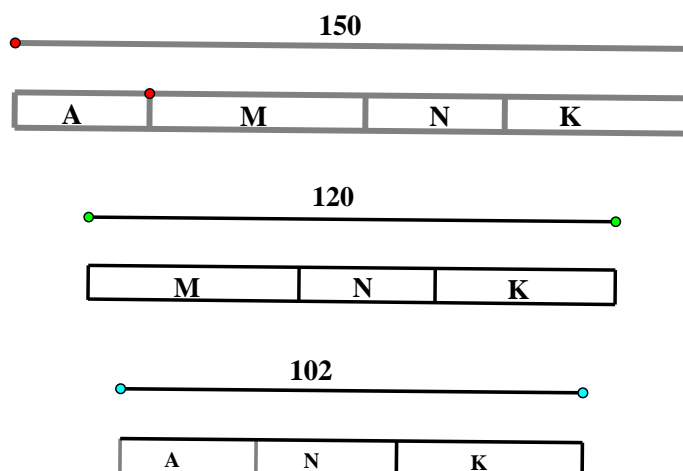
Onda je Karla dala 41 kunu.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Uvjete zadatka možemo prikazati grafički:



1 BOD

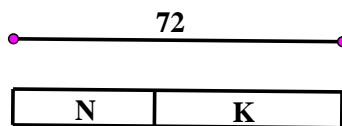
Iz prve i druge slike zaključujemo da je Ana dala  $150 - 120 = 30$  kuna.

2 BODA

Iz prve i treće slike zaključujemo da je Mirna dala  $150 - 102 = 48$  kuna.

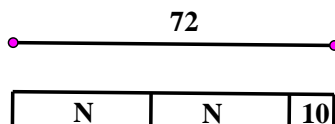
2 BODA

Iz druge ili treće slike dobijemo da su Nensi i Karla zajedno dale 72 kn, odnosno:



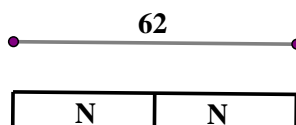
1 BOD

Kako je Karla dala 10 kuna više od Nensi imamo:



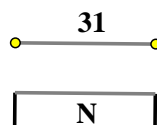
1 BOD

Sada je:



1 BOD

Odnosno:



Dakle, Nensi je dala 31 kunu,  
a Karla 41 kunu.

1 BOD

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

## 7. Prvi način:

Ako su  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  redom različite znamenke tisućica, stotica, desetica i jedinica traženog četveroznamenkastog broja  $\overline{abcd}$  imamo:

$$a + b + c + d = 15.$$

1 BOD

Kako traženi broj mora biti paran, znamenka jedinica može biti 0, 2, 4, 6 ili 8.

1 BOD

Znamenka jedinica je tri puta manja od znamenke tisućica odnosno znamenka tisućica je tri puta veća od znamenke jedinica.

Ako je  $d = 0$ , onda je  $a = 3 \cdot 0 = 0$  što je nemoguće jer je broj četveroznamenkast.

1 BOD

Ako je  $d = 2$ , onda je  $a = 3 \cdot 2 = 6$ .

1 BOD

Ako je  $d = 4$ , onda je  $a = 12$ , što je nemoguće jer je  $a$  znamenka, a isto vrijedi za  $d = 6$  ili 8.

1 BOD

Kako je  $d = 2$  i  $a = 6$ , a znamenka desetica je manja od znamenke jedinica, tj.  $c < d$  zaključujemo  $c = 0$  ili  $c = 1$ .

2 BODA

Sad imamo dva slučaja:

- Ako je  $c = 0$ , onda je  $b = 15 - 6 - 0 - 2 = 7$ , pa je traženi broj **6702**.
- Ako je  $c = 1$ , onda je  $b = 15 - 6 - 1 - 2 = 6$ , što je nemoguće jer znamenke broja moraju biti različite.

1 BOD

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:**

Iz drugog uvjeta slijedi da znamenke tisućica i jedinica mogu biti parovi 9 i 3, 6 i 2 te 3 i 1, 3 BODA  
ali zbog tvrdnje da se radi o parnom broju proizlazi da je znamenka tisućica 6, a znamenka jedinica 2.

1 BOD

Nadalje, zbog trećeg uvjeta, znamenka desetica može biti 0 ili 1.

2 BODA

Kako znamenke moraju biti različite, traženi brojevi mogu biti:

6102, 6302, 6402, 6502, 6702, 6802, 6902,

6012, 6312, 6412, 6512, 6712, 6812, 6912.

2 BODA

No, iz uvjeta da zbroj znamenaka mora biti 15, slijedi da je samo  $6 + 7 + 0 + 2 = 15$ .

1 BOD

Brunina šifra za mobitel je 6702.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Treći način:**

Iz drugog uvjeta slijedi da znamenke tisućica i jedinica mogu biti parovi 9 i 3, 6 i 2 te 3 i 1, 3 BODA  
ali zbog tvrdnje da se radi o parnom broju proizlazi da je znamenka tisućica 6, a znamenka jedinica 2.

1 BOD

Nadalje, zbog trećeg uvjeta, znamenka desetica može biti 0 ili 1.

2 BODA

Ako je znamenka desetica 0, zbog uvjeta o zbroju znamenaka znamenka stotica je 7,  
pa je rješenje 6702.

1 BOD

Ako je znamenka desetica 1, zbog uvjeta o zbroju znamenaka znamenka stotica je 6,  
pa je rješenje 6612, no to ne može biti tražena šifra jer znamenke moraju biti različite.

2 BODA

Brunina šifra za mobitel je 6702.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena 1:** Ako je učenik naveo samo rješenje, bez postupka, bodovati s 2 BODA.

**Napomena 2:** Ukoliko je učenik došao do točnog rješenja, ali nije razmatrao dvije mogućnosti znamenke desetice, bodovati sa 7 BODOVA.