

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
27. siječnja 2020.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1. Prvi način:**

Neka je  $x$  broj učenika tog šestog razreda.

Tada učenika koji iz vladanja imaju ocjenu „dobro“ ili „loše“ ima:

$$\frac{50}{100} \cdot x + \frac{1}{5} x = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{5} x \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{5}{10} x + \frac{2}{10} x$$

$$= \frac{7}{10} x \quad 1 \text{ BOD}$$

Ostatak, odnosno  $\frac{3}{10}$  razreda, čine učenici s ocjenom „uzorno vladanje“.

Budući da ih je ukupno 9, možemo pisati  $\frac{3}{10} x = 9$ . 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobiva se da je  $x = 30$ . 1 BOD

U tom šestom razredu bilo je 30 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Drugi način:**

Neka je  $x$  broj učenika tog šestog razreda.

Učenika dobrog vladanja ima 50% od  $x$ , lošeg vladanja  $\frac{1}{5} x$ , a 9 je učenika uzornog vladanja.

Ukupan broj učenika tog razreda dobit ćemo ako zbrojimo broj učenika lošeg, dobrog i uzornog vladanja, a to možemo zapisati jednadžbom:

$$\frac{50}{100} \cdot x + \frac{1}{5} x + 9 = x \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{1}{2} x + \frac{1}{5} x + 9 = x \quad 1 \text{ BOD}$$

$$9 = \frac{10}{10} x - \frac{5}{10} x - \frac{2}{10} x \quad 1 \text{ BOD}$$

$$9 = \frac{3}{10} x \quad 1 \text{ BOD}$$

Rješavanjem jednadžbe dobiva se da je  $x = 30$ . 1 BOD

U tom šestom razredu bilo je 30 učenika. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Napomena:** Učenik može koristiti bilo koji zapis racionalnog broja (postotak, razlomak, decimalni broj).

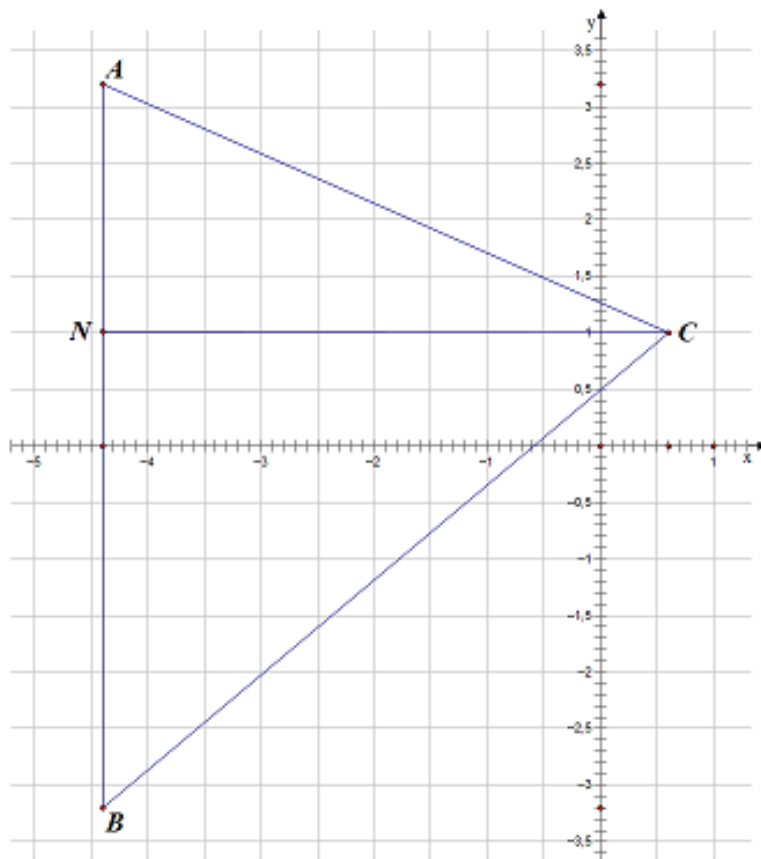
**2. Prvi način:**

Točke  $A$  i  $C$ , zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

Točka  $A$  je u drugom kvadrantu, a točka  $B$ , njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili  $x$  – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka  $B$  ima koordinate  $(-4.4, -3.2)$  i nacrtamo ju. 1 BOD

Tada je  $|AB| = 6.4$  jediničnih dužina. 1 BOD

Duljina visine nacrtane vrhom  $C$  na stranicu  $\overline{AB}$  jednaka je  $|CN| = 5$  jediničnih dužina, pri čemu je točka  $N$  nožište visine. 1 BOD



1 BOD

Površina trokuta  $ABC$  je  $P_{ABC} = \frac{6.4 \cdot 5}{2}$ .

1 BOD

$P_{ABC} = 16$  kvadratnih jedinica.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Drugi način:**

Točke  $A$  i  $C$ , zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

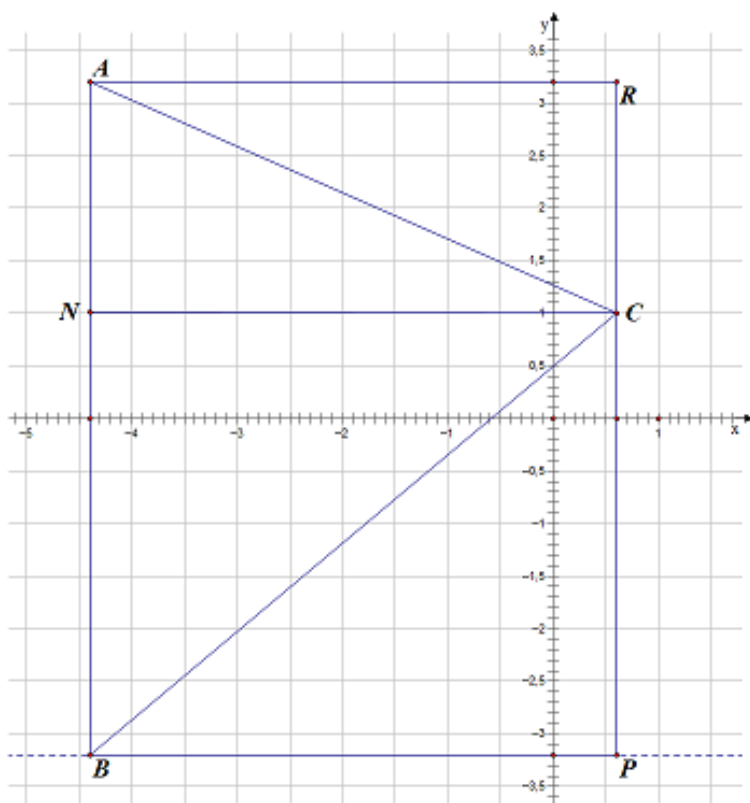
Točka  $A$  je u drugom kvadrantu, a točka  $B$ , njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili  $x$  – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka  $B$  ima koordinate  $(-4.4, -3.2)$  i nacrtamo ju. 1 BOD

Tada je  $|AB| = 6.4$  jediničnih dužina. 1 BOD

Nacrtamo pomoćni pravokutnik  $BPRA$  kojemu je stranica  $\overline{AB}$  trokuta jedna stranica, a treći vrh  $C$  trokuta je na stranici pravokutnika nasuprot stranici trokuta zajedničkoj s pravokutnikom.

Pravokutnik  $BPRA$  ima površinu  $P_{BPRA} = 6.4 \cdot 5 = 32$  kvadratne jedinice.

1 BOD



1 BOD

Kako bi odredili površinu trokuta  $ABC$  trebamo od površine tog pravokutnika oduzeti površine pravokutnih trokuta  $ACR$  i  $BPC$ .

Površina trokuta  $ACR$  iznosi  $P_{ACR} = \frac{5 \cdot 2.2}{2} = 5.5$  kvadratnih jedinica.

Površina trokuta  $BPC$  iznosi  $P_{BPC} = \frac{5 \cdot 4.2}{2} = 10.5$  kvadratnih jedinica.

1 BOD

Površina trokuta  $ABC$  je  $P_{ABC} = 32 - 5.5 - 10.5 = 16$  kvadratnih jedinica.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

### Treći način:

Točke  $A$  i  $C$ , zadane koordinatama, nacrtamo u koordinatnom sustavu.

Točka  $A$  je u drugom kvadrantu, a točka  $B$ , njezina osnosimetrična slika obzirom na os apscisa (ili  $x$  – os), bit će u trećem kvadrantu. Prva koordinata će biti nepromijenjena, a drugoj koordinati mijenjamo predznak, pa točka  $B$  ima koordinate  $(-4.4, -3.2)$  i nacrtamo ju.

1 BOD

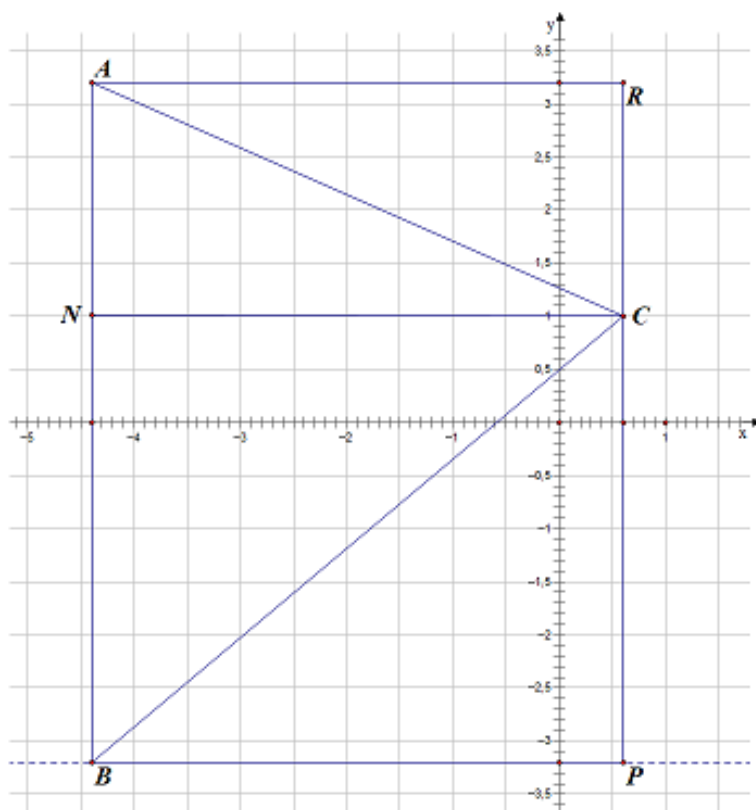
Tada je  $|AB| = 6.4$  jediničnih dužina.

1 BOD

Nacrtamo pomoćni pravokutnik  $BPRA$  kojemu je stranica  $\overline{AB}$  trokuta jedna stranica, a treći vrh  $C$  trokuta je na stranici pravokutnika nasuprot stranici trokuta zajedničkoj s pravokutnikom.

Pravokutnik  $BPRA$  ima površinu  $P_{BPRA} = 6.4 \cdot 5 = 32$  kvadratne jedinice.

1 BOD



1 BOD

Ako u trokut  $ABC$  nacrtamo visinu vrhom  $C$  na stranicu na stranicu  $\overline{AB}$ , trokut  $ABC$  ćemo podijeliti na dva pravokutna trokuta. Tada će vrijediti

$$\triangle ANC \cong \triangle CRA$$

$$\text{ i } \triangle NBC \cong \triangle BPC,$$

pa je površina trokuta  $ABC$  jednaka polovini površine pravokutnika  $BPRA$ .

1 BOD

Površina trokuta  $ABC$  je  $P_{ABC} = \frac{32}{2} = 16$  kvadratnih jedinica.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Napomena 1:** Učenik koji ne naznači mjerne jedinice ne gubi zbog toga naznačene bodove.

**Napomena 2:** Do točke  $B$  se moglo doći konstrukcijom osnosimetrične slika točke  $A$ , obzirom na os apscisa i onda nastaviti rješavanje zadatka kao u nekom od prikazanih načina. U tom slučaju taj korak bodovati s 1 BODOM.

3. Prva bušilica za 1 dan obavi  $\frac{1}{20}$  posla.

Druga bušilica za 1 dan obavi  $\frac{1}{30}$  posla.

Treća bušilica za 1 dan obavi  $\frac{1}{x}$  posla.

1 BOD

Sve tri bušilice zajedno za 1 dan obave  $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{7}$  posla.

1 BOD

Množenjem jednadžbe sa zajedničkim nazivnikom  $420 \cdot x$  dobijemo

$$21x + 14x + 420 = 60x$$

1 BOD

$$420 = 25x$$

$$x = 16.8 \text{ dana}$$

1 BOD

$$x = 16 \text{ dana, } 19 \text{ sati i } 12 \text{ minuta}$$

1 BOD

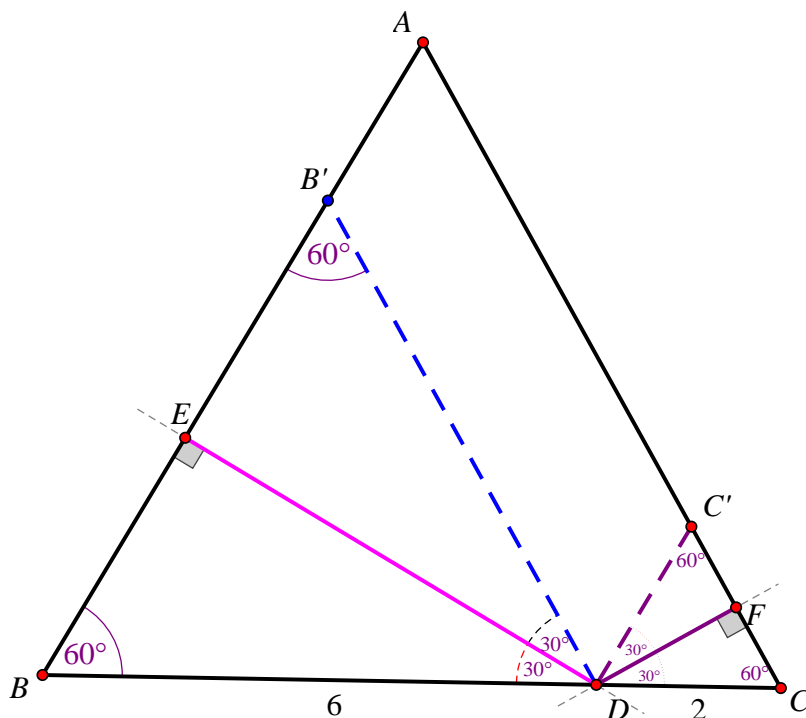
Treća bi bušilica posao napravila za točno 16 dana, 19 sati i 12 minuta.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Skica:

1 BOD



U jednakokraničnom trokutu  $ABC$  veličina kuta  $\angle ABC$  jednaka je  $60^\circ$ , a trokut  $BDE$  je pravokutan, pa je  $|\angle EDB| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

1 BOD

Neka je točka  $B'$  (centralno) simetrična točki  $B$  s obzirom na točku  $E$ .

1 BOD

Tada je trokut  $BDB'$  jednakokraničan.

1 BOD

$|BB'| = |BD| = 6$  cm, a  $|BE| = \frac{1}{2}|BB'| = 3$  cm.

1 BOD

Analogno, trokut  $DCC'$  je jednakokraničan, pri čemu je  $C'$  (centralno) simetrična točki  $C$  s obzirom na točku  $F$ , pa je  $|CC'| = |DC| = 2$  cm, a  $|CF| = \frac{1}{2}|CC'| = 1$  cm.

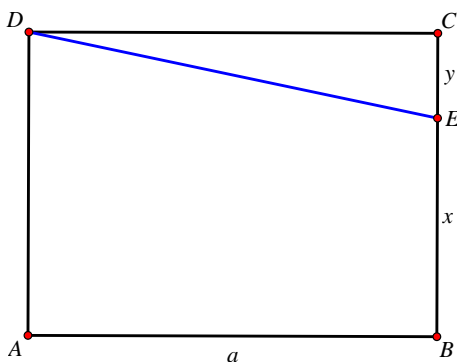
1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Skica:

1 BOD



Neka je  $|AB| = |DC| = a$ ,  $|BE| = x$ ,  $|EC| = y$ . Tada je  $|AD| = |BC| = x + y$ .

Time je zadani pravokutnik  $ABCD$  razdijeljen na pravokutni trokut  $ECD$  i pravokutni trapez  $ABED$  kojemu su  $\overline{AD}$  i  $\overline{BE}$  osnovice, a  $\overline{AB}$  visina.

1 BOD

$$P_{ABED} = \frac{(x+y)+x}{2} \cdot a$$

1 BOD

$$P_{ECD} = \frac{y}{2} \cdot a$$

1 BOD

Površina pravokutnog trokuta je manja od polovice površine pravokutnika pa je  $P_{ABED} : P_{ECD} = 6 : 1$ .  
Primjenom formula za površine tih likova dobijemo:

$$\frac{(2x+y) \cdot a}{2} : \frac{y \cdot a}{2} = 6:1$$

$$(2x+y) : y = 6 : 1$$

1 BOD

$$2x + y = 6y$$

$$2x = 5y$$

$$x : y = 5 : 2,$$

$$\text{odnosno } |BE| : |CE| = 5:2 \text{ ili } |CE| : |BE| = 2 : 5.$$

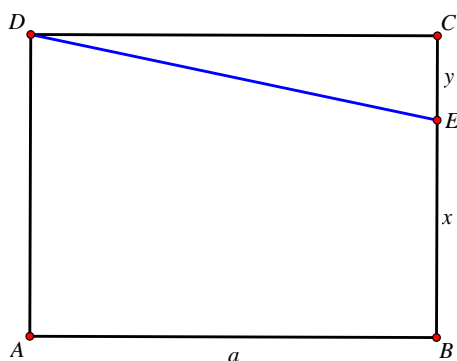
1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

**Drugi način:**

Skica:

1 BOD



Neka je  $|AB| = |DC| = a$ ,  $|BE| = x$ ,  $|EC| = y$ . Tada je  $|AD| = |BC| = x + y$ .

Time je zadani pravokutnik  $ABCD$  podijeljen na pravokutni trokut  $ECD$  i pravokutni trapez  $ABED$ .  
Površina trapeza  $ABED$  može se izračunati tako da se od površine pravokutnika  $ABCD$  oduzme površina pravokutnog trokuta  $ECD$ .

1 BOD

$$P_{ABED} = a \cdot (x + y) - \frac{a \cdot y}{2}$$

1 BOD

$$= ax + ay - \frac{ay}{2} = ax + \frac{ay}{2}$$

$$= \frac{a \cdot (2x + y)}{2}$$

$$P_{ECD} = \frac{a \cdot y}{2}$$

1 BOD

Površina pravokutnog trokuta je manja od polovice površine pravokutnika pa je  $P_{ABED} : P_{ECD} = 6 : 1$ .  
Primjenom formula za površine tih likova dobijemo:

$$\frac{(2x+y) \cdot a}{2} : \frac{y \cdot a}{2} = 6:1$$

$$(2x+y) : y = 6 : 1$$

1 BOD

$$2x + y = 6y$$

$$2x = 5y$$

$$x : y = 5 : 2,$$

$$\text{odnosno } |BE| : |CE| = 5:2 \text{ ili } |CE| : |BE| = 2 : 5.$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Neka su  $\frac{x}{a}$ ,  $\frac{y}{b}$  i  $\frac{z}{c}$  traženi razlomci.

$$\text{Tada vrijedi } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{83}{72} \text{ i } x : y : z = 5 : 7 : 1,$$

pa slijedi  $x = 5k$ ,  $y = 7k$ ,  $z = k$ . 1 BOD

Nadalje, iz  $c : a = 1 : 4$  slijedi  $a = 4c$ . 1 BOD

Iz  $b : c = 3 : 2$  slijedi  $b = \frac{3}{2}c$ . 1 BOD

Uvrštavanjem dobivenih izraza u početnu jednakost dobijemo:

$$\frac{5k}{4c} + \frac{7k}{\frac{3}{2}c} + \frac{k}{c} = \frac{83}{72}$$

$$\frac{5k}{4c} + \frac{14k}{3c} + \frac{k}{c} = \frac{83}{72}$$

1 BOD

$$\frac{15k + 56k + 12k}{12c} = \frac{83}{72}$$

1 BOD

$$\frac{83k}{12c} = \frac{83}{72}$$

Razlomci su skraćeni do kraja pa slijedi 1 BOD

$$83k = 83 \text{ i } 12c = 72,$$

tj.  $k = 1$  i  $c = 6$ . 1 BOD

Slijedi da je  $x = 5$ ,  $y = 7$ ,  $z = 1$  1 BOD

i  $c = 6$ ,  $a = 24$ ,  $b = 9$ . 1 BOD

Traženi razlomci su  $\frac{5}{24}$ ,  $\frac{7}{9}$  i  $\frac{1}{6}$ . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

### 7. Prvi način:

$$\frac{95}{100} \cdot 420 = 399, \text{ odnosno } 399 \text{ obitelji posjeduje TV.}$$

1 BOD

$$\frac{80}{100} \cdot 420 = 336, \text{ odnosno } 336 \text{ obitelji posjeduje kompjuter.}$$

1 BOD

$$399 + 336 = 735$$

1 BOD

$$735 - 420 = 315$$

1 BOD

315 obitelji posjeduje TV i kompjuter.

$$336 - 315 = 21, \text{ odnosno } 21 \text{ obitelj posjeduje samo kompjuter.}$$

1 BOD

Broj svih mogućih ishoda je 420. 1 BOD

Broj povoljnih ishoda je 21, 1 BOD

$$\text{pa je vjerojatnost povoljnog ishoda jednaka } p = \frac{21}{420} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%.$$

2 BODA

Vjerojatnost da obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

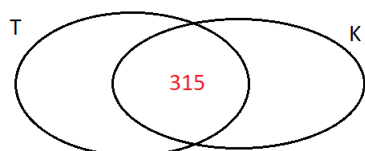
### Drugi način:

$$\frac{95}{100} \cdot 420 = 399, \text{ odnosno } 399 \text{ obitelji posjeduje TV.}$$

1 BOD

$$\frac{80}{100} \cdot 420 = 336, \text{ odnosno } 336 \text{ obitelji posjeduje kompjuter.}$$

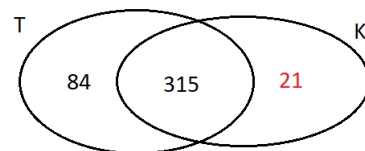
1 BOD



1 BOD

Tada je  $399 + 336 - 420 = 315$ , odnosno 315 obitelji posjeduje TV i kompjuter.

1 BOD



$336 - 315 = 21$ , odnosno 21 obitelj posjeduje samo kompjuter.

1 BOD

(**Napomena:** Broj elemenata skupa  $T \setminus K$  nije nužan za rješenje zadatka, pa se ne boduje.)

Broj svih mogućih ishoda je 420.

1 BOD

Broj povoljnih ishoda je 21,

1 BOD

pa je vjerojatnost povoljnog ishoda jednaka  $p = \frac{21}{420} = \frac{1}{20} = 0.05 = 5\%$ .

2 BODA

Vjerojatnost da obitelj posjeduje kompjuter, a ne posjeduje TV je 5%.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA