

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

1. Odredi sve parove (x, y) realnih brojeva za koje vrijedi

$$|2x + 1| + 3x - 2y = -14$$

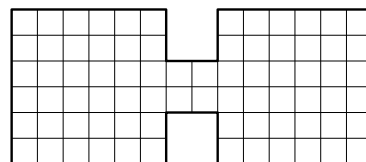
$$|3x + 1| + x + 4y = 25.$$

2. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve a, b i c za koje je $a \geq c$ i $b \geq c$ vrijedi nejednakost

$$\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}.$$

3. Vrhovima B, C i D kvadrata $ABCD$ prolaze, redom, međusobno paralelni pravci b, c i d . Ako je udaljenost pravaca b i c jednaka 5, a udaljenost pravaca b i d jednaka 7, kolika može biti površina kvadrata $ABCD$?

4. Ploču na slici treba prekriti pločicama dimenzija 1×2 . Svaka pločica prekriva točno dva polja. Pločice se smiju rotirati i ne smiju se preklapati. Dokaži da je broj načina na koje se to može napraviti jednak zbroju kvadrata dvaju prirodnih brojeva.



5. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) takve da vrijedi

$$2^a + 2b^2 = 3^c + 67.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

1. Odredi najveću moguću površinu pravokutnika upisanog u pravokutni trokut s katetama duljina 5 i 12 tako da se dva vrha pravokutnika nalaze na hipotenuzi, a po jedan vrh na svakoj kateti tog trokuta.

2. Odredi broj različitih vrijednosti koje poprima izraz

$$\frac{n^2 - 2}{n^2 - n + 2},$$

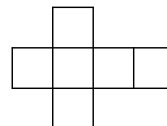
za $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2026\}$.

3. Neka je m prirodni broj i neka su a i b prirodni brojevi takvi da je

$$m^2 < a < m^2 + m \quad \text{i} \quad m^2 < b < m^2 + m.$$

Odredi sve prirodne djelitelje d umnoška ab za koje vrijedi $m^2 < d < m^2 + m$.

4. *Blok* je figura koja se sastoji od šest jediničnih kvadrata kao što je prikazano na slici. Odredi najveći mogući broj blokova koje je moguće postaviti na ploču dimenzija 6×11 tako da svaki prekriva točno šest polja. Blokovi se mogu rotirati i ne smiju se preklapati.



5. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC i M polovište stranice $\overline{AB}$. Pravac HM siječe pravce AC i BC redom u točkama A_1 i B_1 . Neku su A_2 i B_2 redom nožišta okomica iz A_1 i B_1 na pravac CH . Dokaži da se pravci AB_2 i BA_2 sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC .

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

1. Neka je

$$A = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{\sin 5^\circ}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ} + \cdots + \frac{\sin 177^\circ}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}$$

i

$$B = \operatorname{tg} 91^\circ + \operatorname{tg} 92^\circ + \cdots + \operatorname{tg} 179^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ.$$

Izračunaj $A + B$.

2. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$(2 + \sqrt{5})^{x^2 - 4x + 2} + (\sqrt{5} - 2)^{x^2 - 4x + 2} = 18.$$

3. Postoje li prirodni brojevi a , b i c takvi da su

$$\log_a(bc + 1), \quad \log_b(ca + 1) \quad \text{i} \quad \log_c(ab + 1)$$

također prirodni brojevi?

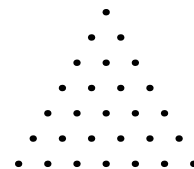
4. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojemu je $|BC| < |CA|$. Središte njegove upisane kružnice jest točka I , a k mu je opisana kružnica. Neka su M i N redom polovišta kraćih lukova nad tetivama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ kružnice k . Pravac kroz C paralelan s MN ponovno siječe kružnicu k u točki P . Pravac PI ponovno siječe kružnicu k u točki T . Dokaži da vrijedi

$$|MP| \cdot |MT| = |NP| \cdot |NT|.$$

5. Na pravcu p označeno je 2026 točaka na jednakim razmacima. U jednoj poluravnini (s iste strane pravca p) označene su sve točke koje zajedno s dvjema označenim točkama pravca p čine vrhove jednakostraničnog trokuta. Neka je $\mathcal{T}$ skup svih označenih točaka, uključujući one na pravcu p .

Josip može brisati točke skupa $\mathcal{T}$ tako da u svakom koraku obriše po tri točke koje su vrhovi nekog jednakostraničnog trokuta. Korak se ponavlja sve dok mu ne ostane točno jedna točka. Točka skupa $\mathcal{T}$ koja može ostati posljednja neobrisana naziva se *Josipova*.

Odredi broj Josipovih točaka.



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 28. travnja 2026.

1. Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nekonstantan aritmetički niz realnih brojeva takav da postoji prirodni broj r za koji je

$$a_{r+1} + a_{r+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_{3r+2}.$$

Dokaži da niti jedan član tog niza nije jednak 0.

2. Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C . Neka je D nožište visine iz vrha C . Kružnica sa središtem u C polumjera $|CD|$ siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama E i F . Pravac EF siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki P . Dokaži da je P polovište dužine $\overline{CD}$.

3. Za uređenu trojku prirodnih brojeva (a, b, c) kažemo da je *morska* ako su a, b i c međusobno različiti, te je broj ac djeljiv brojevima $a + b$ i $b + c$. Dokaži da

a) za svaki prirodni broj $d > 1$ postoji morska trojka (a, b, c) za koju je $M(a, b, c) = d$.

b) ne postoji morska trojka (a, b, c) za koju je $M(a, b, c) = 1$.

Napomena. $M(a, b, c)$ označava najveći zajednički djelitelj brojeva a, b i c .

4. Odredi koliko ima polinoma s realnim koeficijentima $f(x) = x^{2026} + a_{2025}x^{2025} + \dots + a_1x + a_0$ takvih da je $f(2026) = 0$ i da postoji polinom $g(x)$ s realnim koeficijentima takav da jednakost

$$(f(x+1) - f(x)) \cdot g(x) = f(x)$$

vrijedi za svaki realni broj x .

5. Za arhipelag od 2026 otoka kažemo da je *dobro povezan* ako među svakih pet različitih otoka, postoje tri takva da između svaka dva od njih postoji dvosmjerna brodska linija. Odredi najveći prirodni broj N takav da u svakom dobro povezanom arhipelagu postoji niz od barem N različitih otoka takav da su svaka dva uzastopna, te prvi i posljednji otok u nizu povezani brodskom linijom.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.