

## **RJEŠENJA**

Pitanja i zadaci za Državno natjecanje iz astronomije 2025./2026.

4. razred srednje škole

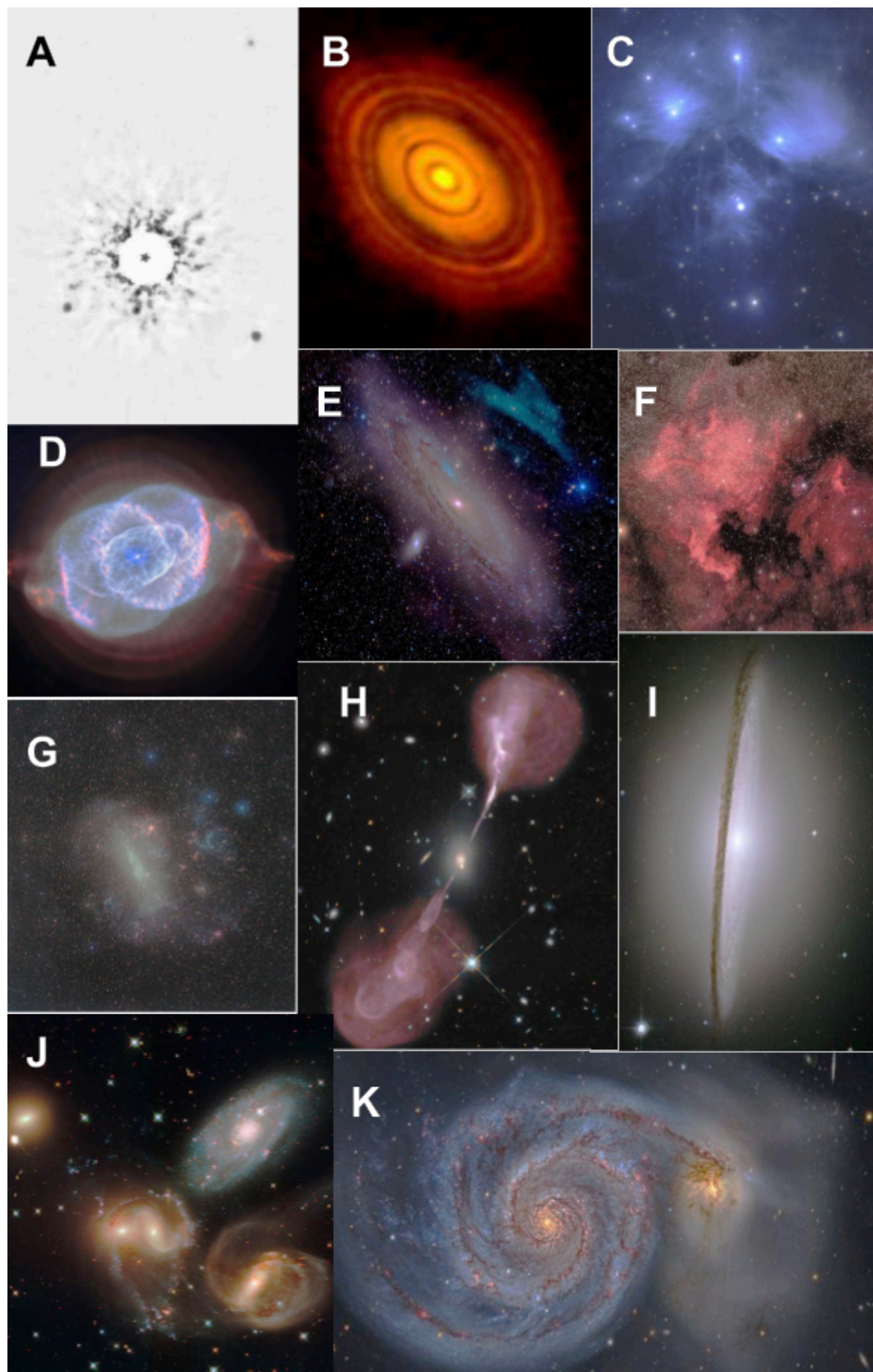
### **ZADATCI**

1. Poveži sljedeće astronomske objekte sa slikama:

Galaksija Sombrero	<b>I</b>
Veliki Magellanov oblak	<b>G</b>
Stephanov kvintet	<b>J</b>
Galaksija Vrtlog	<b>K</b>
Refleksijska maglica Merope	<b>C</b>
Andromedina galaksija	<b>E</b>
Protoplanetarni disk	<b>B</b>
Maglica Sjeverna Amerika	<b>F</b>
Egzoplaneti	<b>A</b>
Galaksija s aktivnom galaktičkom jezgrom	<b>H</b>
Maglica Mačje oko	<b>D</b>

**Svaki točan odgovor iznosi 1 bod. Ovaj zadatak ima ukupno 11 bodova.**

<b>11</b>	
-----------	--



2. Uočeno je za zvijezdu sličnoj Suncu, s masom  $M_s = 0,8 \times M_\odot = 1,6 \times 10^{30}$  kg i radijusom  $R_s = 1 R_\odot = 6,96 \times 10^8$  m, da ima jedan egzoplanet koji kruži oko zvijezde te periodično prolazi ispred zvijezde svakih 5 dana (tj. 120 sati). Također je uočeno da se zvjezdana apsorpcijska K-linija na  $3934 \text{ \AA}$  (Fraunhoferova linija) pomiče između  $3933,2 \text{ \AA}$  i  $3934,8 \text{ \AA}$  unutar tog perioda. Tranzit planeta ispred zvijezde traje 3,34 sata i rezultira padom sjaja zvijezde od 0,8 %. Iz danih informacija izračunajte sljedeće karakteristike egzoplaneta.

- A. [5 boda] Kolika je približna udaljenost planeta od matične zvijezde u astronomskim jedinicama ( $1 \text{ AJ} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$ )? Odgovor zaokružite na dvije decimale.
- B. [3 boda] Kolika je radijalna brzina planeta u [km/s]? Odgovor zaokružite na cijeli broj.
- C. [4 boda] Koliki je period orbite zvijezde oko centra mase sustava zvijezda – planet te kolika je radijalna brzina zvijezde u [km/s]? Odgovor zaokružite na cijeli broj.
- D. [5 boda] Koliki je radijus planeta u Jupiterovim radijusima  $R_J$  ( $R_J = 6,99 \times 10^7 \text{ m}$ )? Odgovor zaokružite na dvije decimale.

Savjet: zadatak se može lako riješiti ako se zvjezdana sfera i egzoplanet u doglednici projiciraju na 2D ravninu doglednice.

- E. [2 boda] Ako je masa egzoplaneta jednaka  $0,5 \times M_J$ , odredite koliki je omjer prosječne gustoće egzoplaneta i prosječne gustoće Jupitera (zaokružite na dvije decimale).

Pretpostavite da je orbita planeta kružna i da je orbitalna ravnina točno u liniji promatranja. Za gravitacijsku konstantu uzmite  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  i za brzinu svjetla  $c = 2,99 \times 10^8 \text{ m/s}$ , te za  $\pi = 3,14159$ .

**Ovaj zadatak ima ukupno 19 bodova.**

**ODGOVOR:**

**a)**

**Koristeći Keplerov zakon revolucije planeta, računamo udaljenost planeta od zvijezde (" $a$ "):**

$$a^3 = T^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot G \cdot M_s \quad [1 \text{ bod}]$$

**Pretvaramo period revolucije planeta " $T$ " u sekunde:**

$$T = 5 [\text{dan}] = 5 \cdot 3600 \cdot 24 = 432\,000 [\text{s}] \quad [1 \text{ bod}]$$

$$a^3 = (432\,000)^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,6 \cdot 10^{30} \text{ [s}^2\text{] [m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}\text{] [kg]}$$

[1 bod]

$$a^3 = 0,50449 \cdot 10^{30} \text{ [m}^3\text{]}$$

$$a \approx 7,96 \cdot 10^9 \text{ [m]} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$a \approx \frac{7,96 \cdot 10^9}{1,496 \cdot 10^{11}} \text{ [aj]} \approx 0,05 \text{ [aj]} \quad [1 \text{ bod}]$$

**b) OPCIJA 1:**

**Radijalna brzina planeta se mjeri kao brzina kojom planet prođe po opsegu kružnice putanje u vremenu T (period revolucije oko zvijezde).**

$$v = \frac{2\pi a}{T} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$v = 2\pi \cdot 7,96 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{432000} \text{ [km/s]} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$v \approx 116 \text{ [km/s]} \quad [1 \text{ bod}]$$

**OPCIJA 2:**

**Radijalna brzina planeta može se izračunati iz omjera promjera (2x radijus) zvijezde i perioda tranzita planeta (3,34 sata).**

$$t_T = 3,34 \text{ h} = 12\,024 \text{ s}$$

$$v = \frac{2 \cdot R_S}{t_T} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$v = \frac{2 \cdot 6,96 \times 10^8 \text{ [m]}}{12024 \text{ [s]}} = 115\,768,46 \text{ [m/s]} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$v \approx 116 \text{ [km/s]} \quad [1 \text{ bod}]$$

**c)**

**Period orbite zvijezde oko centra mase je 5 dana, isto koliko i planeta. [1 bod]**

**Radijalna brzina zvijezde se izračuna iz Dopplerova pomaka valne duljine apsorpcijske linije ( $\Delta\lambda$ ) naspram njene valne duljine u vakuumu  $\lambda_0$  :**

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$z = \frac{3934,8 \text{ \AA} - 3934 \text{ \AA}}{3934 \text{ \AA}} \approx 0,000203355$$

**Radikalna brzina zvijezde se računa :**

$$z = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c \cdot z \quad [1 \text{ bod}]$$

$$v = c \cdot 0,000203355 = 60,8032 \text{ [km/s]} \approx 61 \text{ [km/s]} \quad [1 \text{ bod}]$$

**d )**

**Za izračun radijusa planeta ( $R_p$ ), iskoristit će se činjenica da sjaj zvijezde opadne za udio jednak udjelu 2D površine projicirane sfere planeta naspram projicirane površine sfere zvijezde.**

**Projicirane površine sfera zvijezde i planeta su dane kroz izraz za njihove radijuse ( $R_p$  i  $R_s$ ):**

$$A_s = \pi R_s^2 \quad i \quad A_p = \pi R_p^2 \quad [1 \text{ bod}]$$

**Promjena sjaja zvijezde je porporcionalna promjeni projicirane površine zvijezde koju planet ne zasjenjuje.**

$$\frac{\Delta F_s}{F_s} = \frac{R_p^2}{R_s^2} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$\frac{\Delta F_s}{F_s} = \frac{0,008 \cdot F_s}{F_s} = 0,008 \quad [1 \text{ bod}]$$

$$R_p = R_s \cdot \sqrt{0,008} = 0,08944 \cdot 6,96 \cdot 10^8 \text{ [m]} = 6,225 \cdot 10^7 \text{ [m]} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$R_p = \frac{6,225 \cdot 10^7}{6,99 \cdot 10^7} \cdot R_J \approx 0,89 R_J \quad [1 \text{ bod}]$$

**e)**

Gustoća planeta se mjeri kao omjer mase i volumena, tj. iz omjera mase i radijusa. Gustoća Jupitera je:

$$\rho_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$\frac{\rho_P}{\rho_J} = \frac{M_P}{\frac{4}{3}\pi R_P^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R_J^3}{M_J} = \frac{0,5 M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3 \cdot (0,89)^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R_J^3}{M_J} = \frac{0,5}{0,704969} = 0,709251$$

$$\rho_P \approx 0,71 \rho_J \quad [1 \text{ bod}]$$

19	
----	--

3. Učenik je promatrao spiralnu galaksiju UGC 11707 optičkim teleskopom te je izmjerio da velika poluos galaksije na nebu iznosi  $130''$  (radijus), a mala poluos  $65''$ . Iz promatranog pomaka emisijske linije atomskog vodika izračunao je crveni pomak galaksije  $z = 0,003$ . Također je iz širenja emisijske linije izmjerio da se plin i zvijezde u disku galaksije gibaju brzinom od  $u$  u doglednici. Iz danih izmjerenih podataka izračunajte sljedeće karakteristike galaksije.

- a) [2 boda] Izračunajte kut inklinacije " $\alpha$ " diska galaksije, ili u stupnjevima ili u radijanima (zaokružite na 3 decimale). Galaksije okrenute rubom imaju inklinaciju od  $90^\circ$ , dok galaksije okrenute licem u promatrača imaju inklinaciju od  $0^\circ$ .
- b) [3 boda] Koliki je radijus galaksije u jedinicama kiloparseka (kpc)? Rezultat zaokružite na jednu decimalu.
- c) [5 boda] Izračunajte masu unutar tog radijusa u jedinicama solarnih masa  $M_\odot$ , poznavajući dinamiku, tj. rotacijske brzine plina i zvijezda na rubu diska galaksije. Rezultat zaokružite na jednu decimalu.

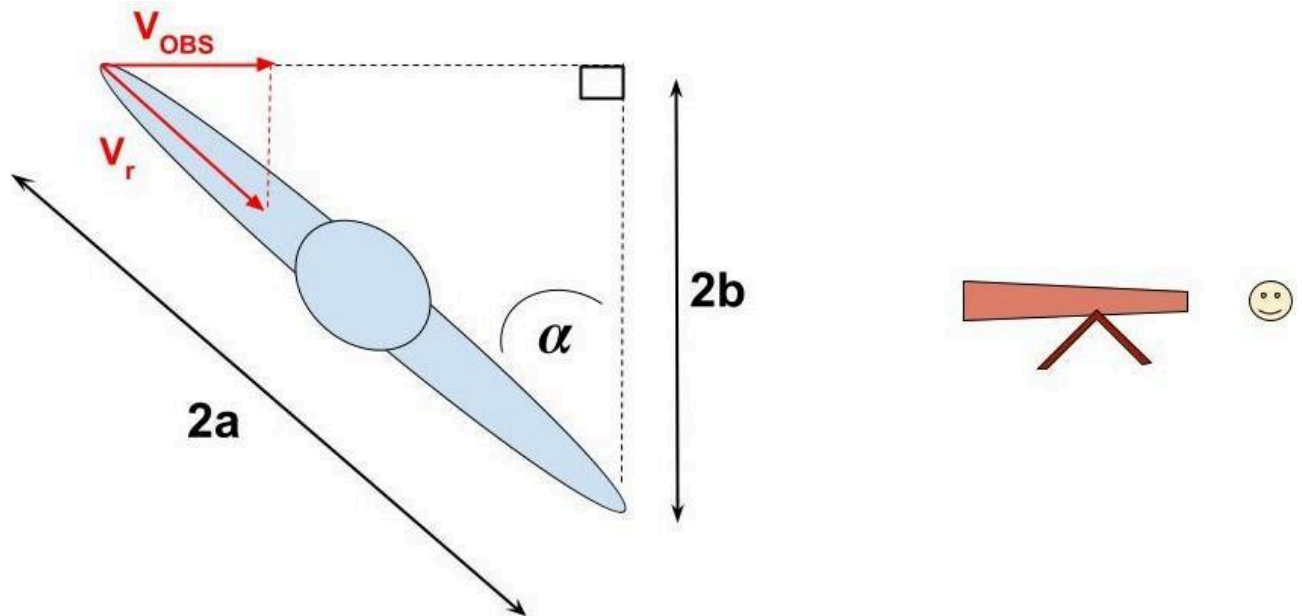
Savjet: za ovaj zadatak pomaže skica orijentacije diska galaksije naspram doglednice i promatrača te vektori brzina. Za Hubbleovu konstantu koristite  $H_0 = 67,8 \text{ [(km/s)/Mpc]}$ , za gravitacijsku konstantu  $i$  za brzinu svjetla  $c = 2,99 \times 10^5 \text{ [km/s]}$ , a za lučne sekunde  $1'' = 4,8481 \times 10^{-6} \text{ [rad]}$ .

Ovaj zadatak ima ukupno 10 bodova.

#### **ODGOVOR:**

**a)**

**Neobavezna skica:**



Inklinacija ( $\alpha$ ) se računa iz omjera male (b) i velike (a) poluosi diska galaksije:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{a} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$\cos(\alpha) = \frac{2 \times 65''}{2 \times 130''} = 0,5$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \text{ili} \quad \alpha = 1,047 \text{ rad} \quad [1 \text{ bod}]$$

b)

Koristeći Hubbleov zakon i crveni pomak, izmjerena udaljenost  $D_{gal}$  jest:

$$z = \frac{V_{gal}}{c} = \frac{H_0 \cdot D_{gal}}{c} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$D_{gal} = \frac{z \cdot c}{H_0} = \frac{0,003 \cdot 2,99 \cdot 10^5}{67,8} [km/s] \left[ \frac{Mpc}{km/s} \right] = 13,230088 [Mpc]$$

Iz kutne duljine velike poluosi se izmjeri fizička veličina radijusa galaksije:

$$\text{tg}(a[\text{rad}]) \approx a[\text{rad}] = \frac{R_{gal}}{D_{gal}} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$130'' = 130 \cdot 4,8481 = 6,30253 \cdot 10^{-4} [\text{rad}]$$

$$R_{gal} = D_{gal} \cdot a = 13,230088 \cdot 6,30253 \cdot 10^{-4} [Mpc] = 83,383 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 [kpc]$$

$$R_{gal} \approx 8,3 [kpc] \quad [1 \text{ bod}]$$



c)

Prvo se treba imati na umu da je promatrana brzina rotacije  $v_{obs}$  u doglednici projekcija stvarne rotacijske brzine zbog inklinacije diska galaksije (vidi skicu). Trigonometrijski se stvarna brzina izračuna:

$$v_{rot} = \frac{v_{obs}}{\sin(\alpha)} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$v_{rot} = \frac{90}{0,8660254} = 103,923 \text{ [km/s]} \approx 104 \text{ [km/s]} \quad [1 \text{ bod}]$$

Masa unutar tog radijusa se može izmjeriti uspoređivajući centripetalnu silu s gravitacijskom:

$$F_{cp} = F_g$$

$$m \frac{v_{rot}^2}{R_{gal}} = m \frac{G \cdot M_{gal}}{R_{gal}^2} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$M_{gal} = \frac{R_{gal} v_{rot}^2}{G} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$M_{gal} = \frac{8,3 \cdot (104)^2}{4,3 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{[\text{kpc}] \text{ [(km/s)}^2]}{[\text{kpc}] \cdot [M_{\odot}^{-1}] \text{ [(km/s)}^2]} = 2,0877 \cdot 10^{10} \approx 2,1 \cdot 10^{10} [M_{\odot}] \quad [1 \text{ bod}]$$

Ako natjecatelj dođe do istih rezultata za masu galaksije na alternativni način, svi bodovi za podzadatak se priznaju.

10	
----	--

4. Na prikazanoj karti ljetnog noćnog neba označite:

F. imena koordinatnih osi na debele linije (svaka os iznosi po 1 bod) [2 boda]

**[Uz os Azimuta, za drugu os prihvaćaju se oba naziva:**

**“zenitna daljina” ili “kutna visina”]**

G. Andromedinu galaksiju s oznakom “M31” [1 bod]

H. zvijezde “Lovački psi” s oznakom “CVn” [1 bod]

I. galaksiju “Vrtlog” s oznakom “M51” [1 bod]

J. zvijezde “Berenikina kosa” s oznakom “Com” [1 bod]

K. zvijezde “Sjeverna kruna” s oznakom “CrB” [1 bod]

L. zvijezdu “Arktur” s križićem i oznakom “ $\alpha$  Boo” [1 bod]

M. zvijezde “Zmaj” s oznakom “Dra” [1 bod]

N. kružićem poziciju na nebu s deklinacijom od DEC=90° [1 bod]

