

**ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE**

**1. razred – srednja škola – A varijanta**

**24. veljače 2026.**

1. Ante i Matea treniraju plivanje. Na jednom od zajedničkih treninga istovremeno su krenuli sa suprotnih strana bazena. Do trenutka kad su se prvi puta istovremeno našli na istom rubu bazena, zajedno su preplivali devet duljina bazena. Od tada do sljedećeg trenutka kad su se ponovno našli istovremeno na istom rubu bazena zajedno su preplivali dodatnih 855 metara. Ako oboje plivaju stalnim brzinama, kolika je duljina bazena u kojem treniraju?
2. Odredi sve uređene trojke cijelih brojeva  $(a, b, c)$  za koje vrijedi  $a^2 = bc + 1$  i  $b^2 = ac + 1$ .
3. Neka je  $ABC$  trokut takav da je  $|AC| > |BC|$ . Neka je  $M$  nožište okomice iz vrha  $B$  na simetralu kuta  $\sphericalangle BCA$ . Dokaži da je površina trokuta  $AMC$  dvostruko manja od površine trokuta  $ABC$ .
4. Odredi sve uređene trojke  $(x, y, z)$  realnih brojeva za koje vrijedi

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = y, \quad \frac{2y^2}{1+y^2} = z, \quad \frac{2z^2}{1+z^2} = x.$$

5. Može li se ploča dimenzija  $2027 \times 2027$  prekriti koristeći dvije vrste pločica:
  - pločice dimenzija  $1 \times 2$  koje prekrivaju po dva susjedna polja u istom retku i
  - pločice dimenzija  $3 \times 1$  koje prekrivaju po tri uzastopna polja u istom stupcu ?

Pločice se ne smiju preklapati niti prelaziti preko ruba dane ploče.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – **A varijanta**

24. veljače 2026.

1. Odredi sve vrijednosti realnog parametra  $m$  za koje jednačba  $x^2 + (1 - m)x + m + 1 = 0$  ima dva različita realna rješenja pri čemu je veće rješenje manje od dvostrukog manjeg rješenja.
2. Odredi najmanji prirodni broj koji ima tri različita pozitivna djelitelja čiji je umnožak  $14^{600}$ .
3. U kvadrat  $ABCD$  upisan je jednakokranični trokut  $CEF$  tako da se točka  $E$  nalazi na stranici  $\overline{AD}$ , a točka  $F$  na stranici  $\overline{AB}$ . Neka je  $G$  polovište dužine  $\overline{CE}$ . Dokaži da je trokut  $ABG$  jednakokraničan.
4. Odredi sve uređene trojke  $(a, b, c)$  pozitivnih realnih brojeva za koje vrijedi

$$ab \left( \frac{a+b}{2} - c \right) + bc \left( \frac{b+c}{2} - a \right) + ca \left( \frac{c+a}{2} - b \right) = 0.$$

5. Ana i Borna igraju igru na  $3 \times 3$  ploči. Na početku Ana u polja ploče upiše sve prirodne brojeve od 1 do 9. Zatim Borna odabire jedan put od gornjeg lijevog do donjeg desnog polja koji sadrži točno pet polja. Na kraju određuju zbroj brojeva upisanih u polja odabranog puta. Ana želi da taj zbroj bude što veći, a Borna da bude što manji. Ako oboje igraju optimalno, koliki će biti taj zbroj?

(Put je niz polja od kojih svaka dva uzastopna imaju zajedničku stranicu.)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

24. veljače 2026.

1. Riješi sustav jednačbi

$$\frac{\log_2 x}{\log_x 2} - \log_2 y^2 = 3, \quad \frac{\log_2 y}{\log_y 2} - \log_2 x^2 = 3.$$

2. Odredi sva rješenja sustava nejednačbi

$$\begin{aligned}(\sin x + \cos y + 1)^2 &\geq 2(\sin x + 1)(\cos y + 1) \\(\sin y + \cos z + 1)^2 &\geq 2(\sin y + 1)(\cos z + 1) \\(\sin z + \cos x + 1)^2 &\geq 2(\sin z + 1)(\cos x + 1)\end{aligned}$$

za koja vrijedi  $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ .

3. Odredi sve prirodne brojeve  $n$  za koje je broj  $1 + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  djelitelj broja  $n$ .

Za realni broj  $t$ ,  $\lfloor t \rfloor$  označava najveći cijeli broj koji je manji ili jednak  $t$ . Na primjer,  $\lfloor 2 \rfloor = 2$  i  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ .

4. U četverokutu  $ABCD$  vrijedi  $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$ ,  $|\sphericalangle BCD| = 120^\circ$  i  $|\sphericalangle CDA| = 90^\circ$ . Neka je  $M$  sjecište dijagonala  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$ . Ako je  $|BM| = 1$  i  $|MD| = 2$ , odredi površinu četverokuta  $ABCD$ .

5. Neka je  $n$  prirodni broj. U nekoj državi koriste se kovanice svih apoen od 1 do  $n$ . Kolekcionar želi dio svojih kovanica rasporediti u pet kutija tako da budu ispunjena sljedeća četiri uvjeta:

- U svakoj je kutiji najviše jedna kovanica svakog apoen.
- U svim je kutijama isti broj kovanica i jednak iznos novca.
- Bilo koje dvije kutije zajedno sadrže barem jednu kovanicu svakog apoen.
- Kovanice niti jednog apoen ne nalaze se u svim kutijama.

Pod pretpostavkom da kolekcionar ima dovoljno kovanica svakog apoen, može li postići svoj cilj ako je

- (a)  $n = 109$ ?  
(b)  $n = 110$ ?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

24. veljače 2026.

1. Odredi sve nenegativne realne brojeve  $x$  takve da su  $\lfloor x \rfloor$ ,  $\{x\}$  i  $x$  uzastopni članovi aritmetičkog niza (ne nužno u tom poretku).

*Za realni broj  $t$ ,  $\lfloor t \rfloor$  označava najveći cijeli broj koji je manji ili jednak  $t$ , a  $\{t\}$  njegov decimalni dio, tj.  $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ . Na primjer,  $\lfloor 15.1 \rfloor = 15$  i  $\{15.1\} = 0.1$ .*

2. Neka je  $z$  kompleksan broj takav da je broj

$$\frac{6z^2 + 5z + 6}{3z^2 + 10z + 3}$$

realan. Dokaži da je  $z$  realan broj ili da vrijedi  $|z| = 1$ .

3. Na kružnici je označeno 3000 točaka. Muha koja se u početku nalazi na jednoj od točaka kreće se isključivo skokovima u smjeru kazaljke na satu za 2 ili 3 mjesta. Koliko joj je najmanje skokova potrebno za obilazak svih točaka i povratak na početnu točku?

4. Odredi sve prirodne brojeve  $n \geq 2$  za koje postoje prirodni brojevi  $a_1, a_2, \dots, a_n$  takvi da vrijedi:

- $\sqrt{a_k + 1}$  je prirodan broj za sve  $k = 1, 2, \dots, n$
- $\sqrt{a_k + 1}$  je djelitelj broja  $a_{k+1}$  za sve  $k = 1, 2, \dots, n - 1$
- $a_n - a_1 = 20$ .

5. Neka je  $ABC$  pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu  $C$  i  $|AC| > |BC|$ . Neka je  $k$  polukružnica s promjerom  $\overline{AC}$  koja se nalazi s iste strane pravca  $AC$  kao i točka  $B$ . Neka je  $P$  točka na  $k$  takva da je  $|CP| = |CB|$  i neka je  $Q$  točka na  $\overline{AC}$  takva da je  $|AP| = |AQ|$ . Dokaži da polovište dužine  $\overline{BQ}$  pripada polukružnici  $k$ .

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.