

## ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – osnovna škola

24. veljače 2026.

**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

### Zadatak OŠ-4.1.

Zgrada ima četiri kata, a na svakom je katu šest stanova. U polovini ukupnog broja stanova žive po dvije osobe. U jednom je stanu samo jedna osoba, a jedan stan još nije useljen. U ostalim stanovima u zgradi žive tročlane ili četveročlane obitelji, pri čemu je jednak broj stanova za tročlane i četveročlane obitelji. Koliko stanara ukupno živi u zgradi?

#### Rješenje.

- Zgrada ima 4 kata, a na svakom katu je 6 stanova, pa je ukupan broj stanova 24. 1 bod
- U polovini od ukupnog broja stanova žive po dvije osobe. Kako je  $24 : 2 = 12$ , u 12 stanova žive 24 stanara. 2 boda
- U jednom je stanu samo jedna osoba, a jedan stan još nije useljen što znači da je u 14 stanova 25 stanara. 2 boda
- Preostalo je  $24 - 14 = 10$  stanova. 1 bod
- Jednak je broj stanova između tročlanih i četveročlanih obitelji, te vrijedi  $10 : 2 = 5$ . 1 bod
- U pet stanova žive tročlane obitelji, što je ukupno  $5 \cdot 3 = 15$  stanara. 1 bod
- U pet stanova žive četveročlane obitelji, što je ukupno  $5 \cdot 4 = 20$  stanara. 1 bod
- U zgradi ukupno živi  $25 + 15 + 20 = 60$  stanara. 1 bod

### Zadatak OŠ-4.2.

Odredi zbroj svih troznamenkastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka 16.

#### Rješenje.

Broj 16 se bez ostatka može podijeliti brojevima 1, 2, 4, 8 i 16, te nijednim drugim brojem.

- Iz  $16 = 2 \cdot 8$  vidimo da znamenke traženih troznamenkastih brojeva mogu biti 1, 2 i 8. 1 bod
- To su brojevi 128, 182, 218, 281, 812 i 821. 1 bod
- Njihov zbroj iznosi  $128 + 182 + 218 + 281 + 812 + 821 = 2442$ . 1 bod
- Iz  $16 = 4 \cdot 4$  vidimo da znamenke traženih troznamenkastih brojeva mogu biti 1, 4 i 4. 1 bod
- To su brojevi 144, 414 i 441. 1 bod

Njihov zbroj iznosi  $144 + 414 + 441 = 999$ .

1 bod

Iz  $16 = 2 \cdot 2 \cdot 4$  vidimo da znamenke traženih brojeva mogu biti 2, 2 i 4.

1 bod

To su brojevi 224, 242 i 422.

1 bod

Njihov zbroj iznosi  $224 + 242 + 422 = 888$ .

1 bod

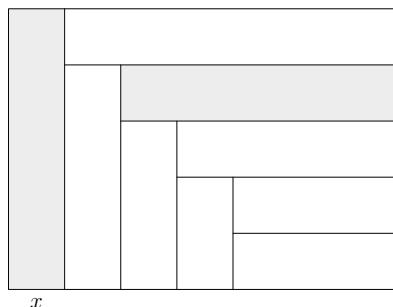
Zbroj svih traženih brojeva iznosi  $2442 + 999 + 888 = 4329$ .

1 bod

**Napomena:** Učenik ne mora izračunati zasebno zbrojeve traženih brojeva po slučajevima (2442, 999 i 888), već može zbrojiti sve tražene troznamenkaste brojeve i dobiti 4329. U tom slučaju zbrajanje svih traženih brojeva nosi **4 boda**, a svaka računska pogreška umanjuje taj broj za **1 bod**.

### Zadatak OŠ-4.3.

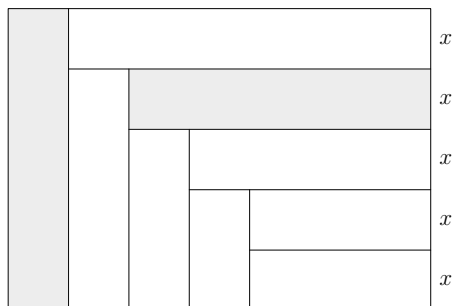
Lara je izrezala pravokutni list papira opsega 48 cm na pravokutnike jednake širine  $x$  kao što je prikazano na slici. Potom je sve izrezane pravokutnike postavila jednog do drugog kako bi dobila jednu dugačku pravokutnu traku širine  $x$ . Ako je poznato da su osjenčani pravokutnici na slici jednake duljine, kolika je duljina te dobivene trake?



### Rješenje.

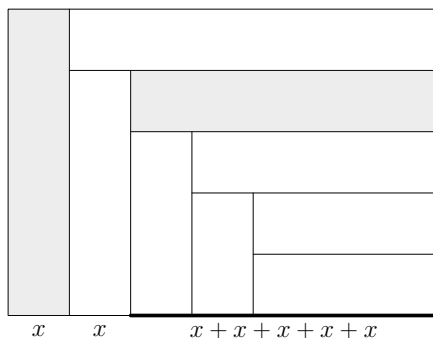
Kako su svi pravokutnici širine  $x$ , duljina jedne stranice papira pet je puta veća od  $x$ .

1 bod



Budući da su osjenčani pravokutnici jednake duljine, duljina druge stranice papira sedam je puta veća od  $x$ .

2 boda



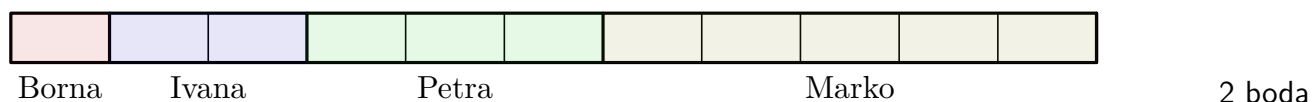
- Opseg pravokutnika  $2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 24$  puta je veći od  $x$ , pa je  $x = 48 : 24 = 2$  cm. 3 boda
- Rezanjem pravokutnika na trake dobivamo jednu traku 6 puta dulju od  $x$ , dvije 5 puta dulje od  $x$ , dvije 4 puta dulje od  $x$ , tri 3 puta dulje od  $x$  i jednu 2 puta dulju od  $x$ . 2 boda
- Vrijedi  $6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 = 35$ . 1 bod
- Duljina trake je 35 puta veća od  $x$ , pa je duljina trake  $35 \cdot 2 = 70$  cm. 1 bod

#### Zadatak OŠ-4.4.

Četvero prijatelja razmjenjuje sličice na sljedeći način: prvo je Marko dao Ivani 5 sličica, zatim je Ivana dala Petri 8 sličica, Petra je dala Borni 7 sličica, a Borna je dao Marku 11 sličica. Nakon razmjene Marko ima pet puta više sličica od Borne, Ivana ima dva puta više od Borne, a Petra ima onoliko sličica koliko imaju Ivana i Borna zajedno. Ako ukupno imaju 187 sličica, odredi koliko je tko imao sličica na početku razmjene.

#### Rješenje.

Broj sličica nakon razmjene možemo prikazati na sljedeći način.



Ukupan broj sličica prikazali smo s ukupno 11 pravokutnika. 1 bod

Budući da je ukupan broj sličica 187 jedan pravokutnik označava  $187 : 11 = 17$  sličica. 1 bod

Dakle, nakon razmjene, Borna ima 17 sličica, Ivana  $17 \cdot 2 = 34$ , Petra  $17 \cdot 3 = 51$ , a Marko  $17 \cdot 5 = 85$  sličica. 1 bod

Dalje zadatak rješavamo unatrag.

U zadnjem koraku Borna je dao Marku 11 sličica što znači da je prije toga Marko imao  $85 - 11 = 74$ , a Borna  $17 + 11 = 28$  sličica. 1 bod

Prije toga Petra je dala Borni 7 sličica što znači da je Petra imala  $51 + 7 = 58$ , a Borna  $28 - 7 = 21$  sličicu. 1 bod

Ivana je dala Petri 8 sličica što znači da je prije toga Ivana imala  $34 + 8 = 42$ , a Petra  $58 - 8 = 50$  sličica. 1 bod

Marko je dao Ivani 5 sličica što znači da je Marko na početku imao  $74 + 5 = 79$ , a Ivana  $42 - 5 = 37$  sličica. 1 bod

Prije razmjene Marko je imao 79, Ivana 37, Petra 50, a Borna 21 sličicu. 1 bod

### Zadatak OŠ-4.5.

U računu

$$\begin{array}{rcccc} & & G & R & A & H \\ + & & G & R & A & H \\ \hline R & U & \check{C} & A & K & \end{array}$$

ista slova predstavljaju iste znamenke, a različita slova različite znamenke. Broj ne može započinjati znamenkom 0. Odredi najmanju i najveću moguću vrijednost broja RUČAK.

#### Rješenje.

Zbroj dvije iste znamenke je najviše 18 te se u postupku pisanog zbrajanja prenosi najviše 1 na veću mjesnu vrijednost. Stoga je  $R = 1$ .

1 bod

Zbrajanjem dvije znamenke A dobivamo broj kojem je zadnja znamenka A ili kojem je zadnja znamenka  $A - 1$ .

Jedna opcija je  $A = 0$  i tada  $H + H$  mora biti manje od 10, tj. H je manje od 5.

1 bod

Druga opcija je  $A = 9$  i tada  $H + H$  mora biti barem 10, tj. H je barem 5.

1 bod

Znamenka G mora biti barem 5.

1 bod

Znamenku G možemo birati tako da znamenka U bude što veća ili što manja.

Odredimo opciju za koju je vrijednost RUČAK što manja.

Ako bi bilo  $G = 5$  i  $U = 0$ , onda A ne može biti 0.

Stoga mora biti  $A = 9$  i H je veći ili jednak od 5.

1 bod

Nije moguće  $H = 5$  jer bi tada bilo  $K = 0 = U$ .

Stoga je  $H = 6$ , tj.  $GRAH = 5196$  i  $RUČAK = 10392$ .

2 boda

Odredimo opciju za koju je vrijednost RUČAK što veća.

Ako bi bilo  $G = 9$  i  $U = 8$ , onda A ne može biti 9.

Stoga mora biti  $A = 0$  i H je manji od 5.

1 bod

Nije moguće  $H = 4$  jer bi tada bilo  $K = 8 = U$ . Stoga je  $H = 3$ , tj.  $GRAH = 9103$  i  $RUČAK = 18206$ .

2 boda

**Napomena:** Ako učenik napiše brojeve 10392 i 18206 bez objašnjenja i postupka, svaki od brojeva bodovati s 2 boda.

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

24. veljače 2026.

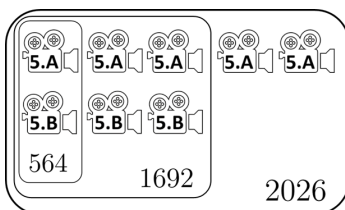
**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

## Zadatak OŠ-5.1.

Učenici 5.a i 5.b snimili su dva filma o sportskim uspjesima svojih razreda. Na početku su filmovi imali ukupno 564 pregleda. Nakon što su podijeljeni na društvenim mrežama, broj pregleda filma 5.a povećao se 5 puta, a broj pregleda filma 5.b povećao se 3 puta, pa su zajedno imali 2026 pregleda. Koliko je pregleda imao svaki od filmova prije dijeljenja na društvenim mrežama?

### Prvo rješenje.

Da su oba filma imala tri puta veći broj pregleda, ukupan broj bi bio  $3 \cdot 564 = 1692$ . 2 boda



Razlika  $2026 - 1692 = 334$  predstavlja dvostruki broj pregleda filma 5.a razreda prije početka dijeljenja na društvenim mrežama. 4 boda

Slijedi da broj pregleda filma 5.a razreda na početku iznosio  $334 : 2 = 167$ . 2 boda

To znači da je početni broj pregleda filma 5.b bio  $564 - 167 = 397$ . 2 boda

### Drugo rješenje.

Neka je  $a$  broj pregleda filma 5.a razreda. Tada broj pregleda filma 5.b razreda na početku iznosi  $564 - a$ . 2 boda

Nakon povećanja pregleda filma 5.a razreda pet puta i pregleda filma 5.b tri puta ukupno je 2026 pregleda, odnosno vrijedi  $5a + 3 \cdot (564 - a) = 2026$ . 2 boda

Sređivanjem dobivamo

$$5a + 1692 - 3a = 2026 \quad 1 \text{ bod}$$

$$2a = 2026 - 1692 \quad 1 \text{ bod}$$

$$2a = 334 \quad 1 \text{ bod}$$

$$a = 167 \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, broj pregleda filma 5.a na početku je 167.

Tada je  $b = 564 - 167 = 397$  broj pregleda filma 5.b na početku. 2 boda

### Zadatak OŠ-5.2.

Odredi sve parove znamenki  $a$  i  $b$  za koje je umnožak brojeva  $\overline{65a}$  i  $\overline{4b8}$  djeljiv brojem 60.

#### Rješenje.

Rastavimo broj 60 na proste faktore:  $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ . Umnožak dva broja je djeljiv sa 60 ako su u njegovom rastavu na proste faktore dvije dvojke, jedna trojka i jedna petica. Ti prosti brojevi moraju biti djelitelji barem jednog od faktora u umnošku.

1 bod

Broju  $\overline{4b8}$  posljednja je znamenka 8, pa broj  $\overline{65a}$  mora biti djeljiv s 5.

Broj je djeljiv s 5, ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5. Slijedi da je  $a \in \{0, 5\}$ .

1 bod

**Prvi slučaj.** Ako je  $a = 0$ , onda je prvi broj 650 i on je djeljiv i brojem 2 i brojem 5.

1 bod

Broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 3.

Broj 650 nije djeljiv s 3 (jer  $6+5+0=11$  nije višekratnik od 3).

Broj je djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4, tj. ako mu je dvoznamenkasti završetak 00, 04, 08, 12, 16, ..., 92, 96. Broj 650 nije djeljiv s 4 jer 50 nije višekratnik broja 4.

1 bod

Stoga broj  $\overline{4b8}$  mora biti djeljiv s 2 i 3.

1 bod

Broj je djeljiv s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8, pa je  $\overline{4b8}$  djeljiv s 2 za bilo koji odabir znamenke  $b$ .

No, zbog uvjeta djeljivosti s 3 i zato što vrijedi  $4+b+8 = 12+b$ , vrijedi  $b \in \{0, 3, 6, 9\}$ .

1 bod

**Drugi slučaj.** Ako je  $a = 5$ , onda je prvi broj 655 i on je djeljiv s 5, ali nije ni s 2 (posljednja znamenka je 5) ni s 3 ( $6+5+5 = 16$  nije višekratnik broja 3).

1 bod

Stoga broj  $\overline{4b8}$  mora biti djeljiv sa 4 i 3 (dvije dvojke i trojka u rastavu broja 60)

1 bod

Broj  $\overline{4b8}$  je djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak 08, 28, 48, 68 ili 88 pa je  $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ .

1 bod

No, zbog uvjeta djeljivosti s 3 zbroja  $4+b+8 = 12+b$  znamenke 2, 4 i 8 u zbroju ne daju višekratnik od 3 pa je  $b \in \{0, 6\}$ .

1 bod

Traženi parovi znamenaka  $a$  i  $b$  su  $(a, b) \in \{(0, 0), (0, 3), (0, 6), (0, 9), (5, 0), (5, 6)\}$ .

### Zadatak OŠ-5.3.

Cvita svakoga dana bere rajčice u svom vrtu. Drugog je dana ubrala onoliko rajčica koliko ih je ubrala prvog dana i još dvije trećine tog broja. Trećeg je dana ubrala koliko i drugog dana i još četvrtinu tog broja. Četvrtog je dana ubrala koliko i trećeg dana i još petinu tog broja. Petog je dana ubrala koliko i četvrtog dana i još šestinu tog broja. Ako je petog dana ubrala 210 rajčica, koliko je ukupno rajčica ubrala u tih pet dana?

### Prvo rješenje.

Razmotrimo situaciju od petog dana unatrag.

Petog je dana Cvita ubrala 210 rajčica.

Rajčice koje je Cvita ubrala petog dana možemo prikazati kao osjenčani dio na slici, pri čemu lijevi pravokutnik prikazuje broj rajčica ubranih četvrtog dana.



Budući da je osjenčano 7 jednakih dijelova, dobivamo da je vrijednost svakog dijela  $210 : 7 = 30$ , pa je četvrtog dana ubrano  $6 \cdot 30 = 180$  rajčica.

3 boda

Na sličan način prikazujemo rajčice koje ubrala četvrtog dana, pri čemu lijevi pravokutnik prikazuje broj rajčica ubran trećeg dana.



Budući da je osjenčano 6 jednakih dijelova, dobivamo da je vrijednost svakog dijela  $180 : 6 = 30$ , pa je trećeg dana ubrala  $5 \cdot 30 = 150$  rajčica.

2 boda

Rajčice koje je ubrala trećeg dana prikazujemo sljedećom slikom, pri čemu lijevi pravokutnik prikazuje broj rajčica ubranih drugog dana.



Budući da je osjenčano 5 jednakih dijelova, dobivamo da je vrijednost svakog dijela  $150 : 5 = 30$ , pa je drugog dana ubrala  $4 \cdot 30 = 120$  rajčica.

2 boda

Konačno, 120 rajčica koje je ubrala drugog dana možemo prikazati sljedećom slikom, pri čemu lijevi pravokutnik prikazuje broj rajčica ubranih prvog dana.



Budući da je osjenčano 4 jednakih dijelova, dobivamo da je vrijednost svakog dijela  $120 : 4 = 30$ , pa je prvog dana ubrala  $3 \cdot 30 = 90$  rajčica.

2 boda

Cvita je ukupno ubrala  $72 + 120 + 150 + 180 + 210 = 732$  rajčice.

1 bod

**Napomena:** Učenik koji, umjesto grafički, na bilo koji način izračuna i obrazloži broj rajčica ubranih pojedinog dana treba dobiti pripadne bodove. Za svaki od dana, učenik treba dobiti **1 bod** za zapisan broj rajčica, te ostale bodove za postupak/obrazloženje.

## Drugo rješenje.

Prikažimo količinu rajčica koju je Cvita ubrala prvog dana pravokutnikom.



Drugog dana ubrala je količinu kao i prvog dana i još dvije trećine te količine. Stoga pravokutnik dijelimo na tri jednaka dijela, te mu dodajemo još dva takva dijela.

2 boda



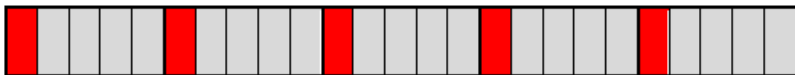
Trećeg dana je ubrala koliko i drugog dana i još četvrtinu tog broja. Svaki od pet dijelova dijelimo na četiri jednaka dijela kako bismo mogli odrediti broj dijelova koji prikazuju rajčice ubrane trećeg dana.



Imamo 20 jednakih dijelova, te je četvrtina od toga pet takvih dijelova. Zaključujemo da rajčice ubrane trećeg dana možemo prikazati s  $20 + 5 = 25$  takvih dijelova.

2 boda

Četvrtog dana je ubrala koliko trećeg dana i još petinu od tog broja. Budući da ukupno ima 25 dijelova, prebrojavanjem zaključujemo da petinu čini pet takvih dijelova.



Stoga rajčice ubrane četvrtog dana prikazujemo s  $25 + 5 = 30$  takvih dijelova.

1 bod

Petog dana je ubrala koliko i četvrtog dana i još šestinu tog broja. Budući da ukupno ima 30 dijelova, prebrojavanjem zaključujemo da šestinu čini pet takvih dijelova.



Stoga rajčice ubrane četvrtog dana prikazujemo s  $30 + 5 = 35$  takvih dijelova.

1 bod

Budući da znamo da je petog dana ubrano ukupno 210 rajčica, svaki dio predstavlja  $210 : 35 = 6$  rajčica.

1 bod

Četvrtog dana je bilo ukupno 30 dijelova, tj.  $30 \cdot 6 = 180$  rajčica.

Trećeg dana je bilo ukupno 25 dijelova, tj.  $25 \cdot 6 = 150$  rajčica.

Drugog dana je bilo ukupno 20 dijelova, tj.  $20 \cdot 6 = 120$  rajčica.

1 bod

Prvog dana je bilo ukupno 12 takvih dijelova, tj.  $12 \cdot 6 = 72$  rajčice.

1 bod

Cvita je ukupno ubrala  $72 + 120 + 150 + 180 + 210 = 732$  rajčice.

1 bod



**Napomena:** Od učenika se ne očekuje da računaju s razlomcima, ali se algebarski pristup može bodovati na sljedeći način. Ako broj rajčica ubranih prvog dana označimo s  $x$ , onda je drugog dana ubrano  $\frac{5}{3}x$  (2 boda), trećeg dana  $\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{3}x = \frac{25}{12}x$  (2 boda), četvrtog dana  $\frac{6}{5} \cdot \frac{25}{12}x = \frac{5}{2}x$  (1 bod), te petog dana  $\frac{7}{6} \cdot \frac{5}{2}x = \frac{35}{12}x$  (1 bod).

Iz  $\frac{35}{12}x = 210$  dobivamo  $x = 72$  (2 boda), pa je drugog dana ubrano 120, trećeg 150 i četvrtog 180 rajčica (1 bod), a ukupno su ubrane 732 rajčice (1 bod).

#### Zadatak OŠ-5.4.

Pravokutni zid širine 532 cm i visine 266 cm oblaže se pravokutnim pločicama opsega 96 cm čija je dulja stranica tri puta veća od kraće. Pločice se postavljaju tako da su im dulje stranice međusobno usporedne. Između susjednih pločica ostavlja se razmak širine 2 cm, a između svih rubnih pločica i rubova zida po 1 cm. Koliko će redova pločica biti postavljeno i koliko će ukupno pločica biti upotrijebljeno za prekrivanje cijelog zida?

##### Prvo rješenje.

Označimo duljinu kraće stranice pločice sa  $x$ . Tada je dulja stranica, koja je tri puta veća,  $3x$ , pa je opseg pločice  $x + 3x + x + 3x = 96$  cm, odnosno vrijedi  $8x = 96$ . Stoga, duljina kraće stranice iznosi  $x = 96 : 8 = 12$  cm, a dulje stranice  $3x = 3 \cdot 12 = 36$  cm. 2 boda

Razmak od 2 cm između pločica, odnosno od 1 cm između pločice i ruba možemo ostvariti tako da zamislimo da smo pločicu sa svake strane proširili s 1 cm razmaka, te zapravo slažemo tako proširene pločice dimenzija  $14 \text{ cm} \times 38 \text{ cm}$  bez razmaka. 2 boda

Površina zida iznosi  $532 \cdot 266 \text{ cm}^2$ , a površina proširene pločice iznosi  $38 \cdot 14 = 532 \text{ cm}^2$ , pa je ukupno potrebno 266 pločica. 2 boda

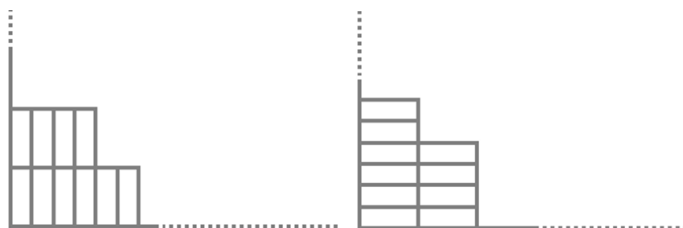
Visina zida je 266 cm. Ako pločice postavljamo tako da je visina proširene pločice 14 cm, tada je ukupan broj redova postavljenih pločica jednak količniku visine zida i visine pločice, tj. imamo  $266 : 14 = 19$  redova. 2 boda

Analogno, ako pločice postavljamo tako da je visina proširene pločice 38 cm, tada je ukupan broj redova postavljenih pločica jednak  $266 : 38 = 7$ . 2 boda

##### Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju odredimo da su dimenzije pločica 12 cm i 36 cm. 2 boda

Pločice se na zid mogu slagati na dva načina: usporedno visini zida duljom stranicom ili usporedno visini zida kraćom stranicom.



**Prvi slučaj.** Ako se pločice slažu usporedno visini zida duljom stranicom, onda visinu od 266 cm ostvarujemo kao zbroj

$$266 = 1 + 36 + 2 + 36 + 2 + \dots + 36 + 1,$$

pri čemu se pribrojnik 36 pojavljuje onoliko puta koliko ima redova pločica, a pribrojnik 2 jednom manje. Neka je broj redova  $r$ . Tada je  $266 = 1 + 36r + 2(r - 1) + 1$ , odnosno  $266 = 38r$ . Stoga je u ovom slučaju  $r = 266 : 38 = 7$  redova pločica.

2 boda

Provjerimo da na takav način zaista možemo prekriti cijeli zid. Širinu zida od 532 cm ostvarujemo kao zbroj

$$532 = 1 + 12 + 2 + 12 + 2 + \dots + 12 + 1$$

pri čemu se pribrojnik 12 pojavljuje onoliko puta koliko ima stupaca pločica, a pribrojnik 2 jednom manje. Neka je broj stupaca  $s$ . Tada je  $532 = 1 + 12s + 2(s - 1) + 1$ , odnosno  $532 = 14s$ . Stoga je u ovom slučaju  $s = 532 : 14 = 38$  stupaca pločica.

1 bod

**Drugi slučaj.** Ako se pločice slažu usporedno visini zida kraćom stranicom, onda visinu od 266 cm ostvarujemo kao zbroj

$$266 = 1 + 12 + 2 + 12 + 2 + \dots + 12 + 1.$$

Neka je broj redova  $r$ . Tada je  $266 = 1 + 12r + 2(r - 1) + 1$ , odnosno  $266 = 14r$ . Stoga je u ovom slučaju  $r = 266 : 14 = 19$  redova pločica.

2 boda

Širinu zida od 532 cm ostvarujemo kao zbroj

$$532 = 1 + 36 + 2 + 36 + 2 + \dots + 36 + 1$$

Neka je broj stupaca  $s$ . Tada je  $532 = 1 + 36s + 2(s - 1) + 1$ , odnosno  $532 = 38s$ . Stoga je u ovom slučaju  $s = 532 : 38 = 14$  stupaca pločica.

1 bod

Budući da vrijedi  $7 \cdot 38 = 19 \cdot 14 = 266$ , u oba slučaja je potrebno 266 pločica.

2 boda

**Napomena:** Uočimo li da razmaci do ruba zida od po 1 cm mogu biti brojeni kao jedan razmak od 2 cm te dodani posljednjoj pločici, onda je broj pločica jednak broju razmaka od 2 cm tj. broju redova po visini i broju stupaca po širini. Jednadžbe iz drugog rješenja tada odgovaraju izračunima  $266 : (36 + 2) = 7$  redova i  $532 : (12 + 2) = 38$  stupaca (prvi slučaj) te  $266 : (12 + 2) = 19$  redova i  $532 : (36 + 2) = 14$  stupaca (drugi slučaj), pa se bodovanje provodi analogno drugom rješenju.

### Zadatak OŠ-5.5.

Koliko ima peteroznamenastih brojeva kojima zbroj triju znamenaka najvećih mjesnih vrijednosti iznosi 20, umnožak triju znamenaka najmanjih mjesnih vrijednosti iznosi 24, a sve su im znamenke različite?

## Rješenje.

Broj 20 možemo zapisati kao zbroj **tri različite znamenke** (do na poredak pribrojnika) na sljedeće načine:

$$9 + 8 + 3, \quad 9 + 7 + 4, \quad 9 + 6 + 5, \\ 8 + 7 + 5. \quad 1 \text{ bod}$$

U prvom retku su mogućnosti u kojima je najveći pribrojnik 9, u drugom retku mogućnost u kojoj je najveći pribrojnik 8, **te** drugih mogućnosti nema jer je  $7+6+5 = 18 < 20$ . 1 bod

Iz rastava na proste faktore broja  $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$  dobivamo mogućnosti za zapis tog broja kao umnožak **tri različite znamenke** (do na poredak faktora) na sljedeće načine:

$$2 \cdot 3 \cdot 4, \quad 1 \cdot 4 \cdot 6, \quad 1 \cdot 3 \cdot 8. \quad 2 \text{ boda}$$

Srednja znamenka u nekom od traženih peteroznamenkastih brojeva može biti samo ona znamenka koja se pojavljuje i u rastavu broja 20 na pribrojnike i u rastavu broja 24 na faktore, a to su znamenke 3, 4, 6 i 8. 1 bod

Pri ispisivanju mogućih brojeva s određenom srednjom znamenkom promatramo koje trojke brojeva (jedan zbroj i jedan umnožak) sadrže tu znamenku i nemaju drugih zajedničkih znamenki. 1 bod

Ako je srednja znamenka 3, imamo sljedeća četiri broja: 98324, 98342, 89324 i 89342. 1 bod

Ako je srednja znamenka 4, imamo osam brojeva: 97423, 97432, 97416, 97461, 79423, 79432, 79416, 79461. 1 bod

Ako je srednja znamenka 6, imamo četiri broja: 95641, 95614, 59641, 59614. 1 bod

Ako je srednja znamenka 8, imamo četiri broja: 75831, 75813, 57831, 57813. 1 bod

Ukupno ima  $4 + 8 + 4 + 4 = 20$  traženih brojeva.

**Napomena:** Ako učenik navodi ili broji kao rješenja peteroznamenkaste brojeve u kojima se ponavljaju znamenke, može dobiti najviše **8 bodova**.

Za ostvarivanje bodova učenik ne mora ispisati sve brojeve u pojedinim slučajevima, već može objasniti koje **znamenke se** mogu birati na kojim mjestima i zapisati koliko se peteroznamenkastih brojeva dobiva.

Određivanje svih brojeva **je moguće** na više načina.

Učenik može prvo uočiti da srednja znamenka mora iznositi barem 3 jer u svakom zapisu broja 20 kao zbroj **tri različite znamenke** najmanja mora iznositi barem 3 (jer je  $2 + 8 + 9 < 20$ ), što nosi **1 bod**. Također, srednja znamenka mora biti djeljitelj broja 24, pa srednja znamenka može biti samo 3, 4, 6 ili 8, što nosi još **1 bod**. Za svaku od **te četiri** mogućnosti određivanje preostalih mogućih znamenki nosi po **2 boda**.

Učenik može samo odrediti mogućnosti za zapis broja 20 kao zbroja **tri različite znamenke**, što nosi **2 boda**, pa nakon toga za svaku mogućnost ispitati koji pribrojnik može biti srednja znamenka, te odrediti preostale znamenke. U takvom pristupu svaka od **četiri** mogućnosti nosi po **2 boda**.

Učenik može samo odrediti mogućnosti za zapis broja 24 kao umnoška **tri različite znamenke**, što nosi **2 boda**, pa nakon toga za svaku mogućnost ispitati koji faktor može biti srednja znamenka, te odrediti preostale znamenke. U takvom pristupu **2 boda** nosi slučaj  $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ , a po **3 boda** nose slučajevi  $24 = 1 \cdot 4 \cdot 6$  i  $24 = 1 \cdot 3 \cdot 8$ .

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

## Zadatak OŠ-6.1.

Riješi jednadžbu

$$\frac{\frac{\frac{1}{2}x - 6}{3} - x + 7}{\frac{4}{5}} + x - 8 = -8.$$

### Prvo rješenje.

Danu jednadžbu možemo zapisati i ovako:

$$\frac{1}{5} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}x - 6 \right) - x + 7 \right) + x - 8 \right) = -8.$$

Jednadžbu najprije množimo s 5, a zatim dodamo 8

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}x - 6 \right) - x + 7 \right) + x - 8 = -40, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}x - 6 \right) - x + 7 \right) + x = -32. \quad 1 \text{ bod}$$

Sada množimo s 4

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}x - 6 \right) - x + 7 + 4x = -128, \quad 1 \text{ bod}$$

i sredimo

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}x - 6 \right) + 3x + 7 = -128. \quad 1 \text{ bod}$$

Zatim oduzmemo 7, pomnožimo s 3 i dodamo 6

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}x - 6 \right) + 3x = -135, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{1}{2}x - 6 + 9x = -405, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{1}{2}x + 9x = -399, \quad 1 \text{ bod}$$

pomnožimo s 2

$$x + 18x = -798, \quad 1 \text{ bod}$$

te konačno dobivamo  $19x = -798$

1 bod

odnosno  $x = -42$ .

1 bod

**Drugo rješenje.**

Danu jednadžbu možemo zapisati i ovako:

$$\frac{1}{5} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}x - 6 \right) - x + 7 \right) + x - 8 \right) = -8.$$

Množenjem redom dobivamo

$$\frac{1}{5} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{1}{6}x - 2 - x + 7 \right) + x - 8 \right) = -8 \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{1}{24}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{7}{4} + x - 8 \right) = -8 \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{1}{120}x - \frac{1}{10} - \frac{1}{20}x + \frac{7}{20} + \frac{1}{5}x - \frac{8}{5} = -8 \quad 1 \text{ bod}$$

Nakon toga jednadžbu sređujemo:

$$\left( \frac{1}{120} - \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \right) x = -8 + \frac{1}{10} - \frac{7}{20} + \frac{8}{5}. \quad 1 \text{ bod}$$

Zbog

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1 - 6 + 24}{120} = \frac{19}{120} \quad 2 \text{ boda}$$

i

$$-8 + \frac{1}{10} - \frac{7}{20} + \frac{8}{5} = \frac{-160 + 2 - 7 + 32}{20} = \frac{133}{20} \quad 2 \text{ boda}$$

jednadžba je ekvivalentna s

$$\frac{19}{120}x = -\frac{133}{20} \quad 1 \text{ bod}$$

te konačno slijedi  $x = -42$ .

1 bod

**Treće rješenje.**

Danu jednadžbu možemo zapisati i ovako:

$$\frac{1}{5} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2}x - 6 \right) - x + 7 \right) + x - 8 \right) = -8.$$

Množenjem i sređivanjem izraza na lijevoj strani redom dobivamo

$$\frac{1}{5} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{1}{6}x - 2 - x + 7 \right) + x - 8 \right) = -8 \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{1}{4} \left( -\frac{5}{6}x + 5 \right) + x - 8 \right) = -8 \quad 2 \text{ boda}$$

$$\frac{1}{5} \left( -\frac{5}{24}x + \frac{5}{4} + x - 8 \right) = -8 \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{19}{24}x - \frac{27}{4} \right) = -8 \quad 2 \text{ boda}$$

$$\frac{19}{120}x - \frac{27}{20} = -8. \quad 1 \text{ bod}$$

Dalje dobivamo

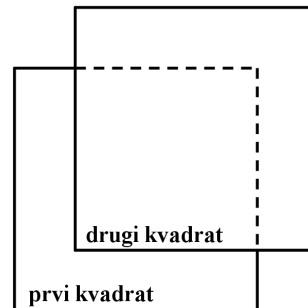
$$\frac{19}{120}x = -8 + \frac{27}{20}$$

$$\frac{19}{120}x = -\frac{133}{20}$$

i konačno  $x = -42$ .

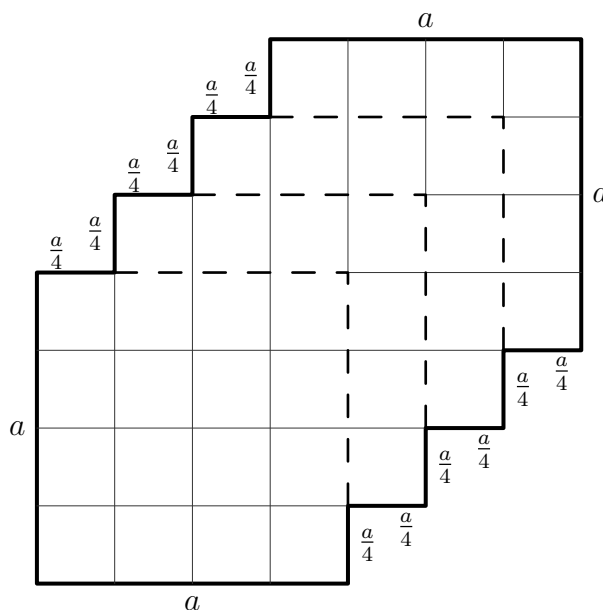
### Zadatak OŠ-6.2.

Četiri jednaka papira oblika kvadrata raspoređena su u niz tako da se djelomično preklapaju, a sve su im stranice međusobno usporedne ili okomite. Svaki je sljedeći kvadrat pomaknut u odnosu na prethodni za četvrtinu duljine stranice kvadrata udesno i za isto toliko prema gore (vidi sliku). Sva četiri papira zajedno tvore lik čiji je opseg za 132 cm veći od opsega jednog kvadrata. Kolika je površina tako dobivenog lika?



**Prvo rješenje.**

Neka je duljina stranice kvadrata  $a$ . Nakon svih lijepljenja nastaje lik kao na slici.



Opseg (duljina ruba) tog lika iznosi  $4 \cdot a + 12 \cdot \frac{a}{4} = 7a$ .

Kako je opseg lika za 132 cm veći od opsega jednog kvadrata, vrijedi  $7a = 4a + 132$ , te je  $3a = 132$ ,  $a = 44$  cm.

Lik je podijeljen na kvadrate sa stranicom duljine  $\frac{1}{4}a = 11$  cm.

Takvih je kvadrata 37.

Površina jednog takvog kvadrata je  $11 \cdot 11$ , tj.  $121 \text{ cm}^2$ ,

pa je površina lika  $37 \cdot 121$ , tj.  $4477 \text{ cm}^2$ .

**Napomena:** Učenik može dobiveni lik nadopuniti do kvadrata sa stranicom duljine 77 cm te od površine tog kvadrata,  $5929 \text{ cm}^2$  (1 bod), oduzeti 12 površina kvadrata sa stranicom duljine 11 cm,  $12 \cdot 121 = 1452 \text{ cm}^2$  (2 boda).

Konačno,  $5929 - 1452 = 4477 \text{ cm}^2$  (1 bod).

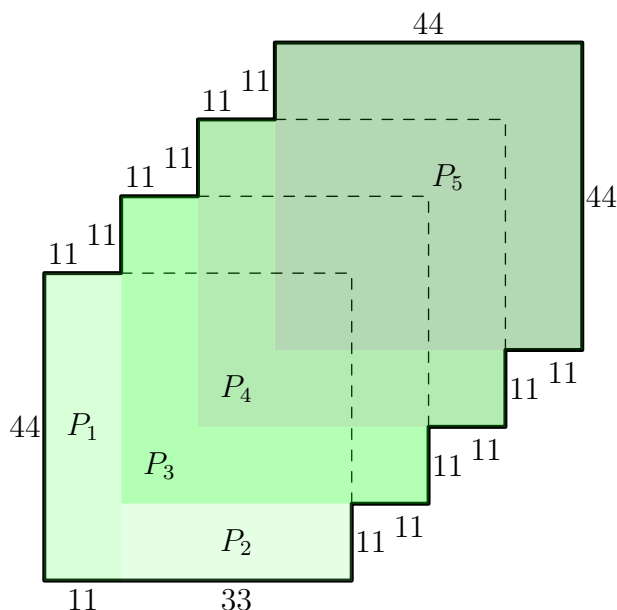
### Drugo rješenje.

Duljinu stranice (44 cm) jednog kvadrata odredimo kao u prvom rješenju.

5 bodova

Podijelimo lik na pet dijelova kojima znamo izračunati površine, kao na slici (sve mjere su u centimetrima).

1 bod



Vrijedi  $P_1 = 11 \cdot 44 = 484 \text{ cm}^2$  i  $P_2 = 11 \cdot 33 = 363 \text{ cm}^2$ ,

1 bod

pa je  $P_1 + P_2 = P_3 = P_4 = 484 + 363 = 847 \text{ cm}^2$ ,

1 bod

te vrijedi  $P_5 = 44 \cdot 44 = 1936 \text{ cm}^2$ .

1 bod

Površina lika jednaka je  $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 3 \cdot 847 + 1936 = 4477 \text{ cm}^2$ .

1 bod

### Zadatak OŠ-6.3.

Odredi dva prirodna broja čiji je zbroj 108, najveći zajednički djelitelj 12, a najmanji zajednički višekratnik 240.

### Prvo rješenje.

Neka su  $a$  i  $b$  traženi prirodni brojevi. Budući da je najveći zajednički djelitelj  $D(a, b)$  različit od najmanjeg zajedničkog višekratnika  $V(a, b)$  zaključujemo da su  $a$  i  $b$  različiti brojevi. Pretpostavimo da vrijedi  $a < b$ . Nadalje, vrijedi

$$D(a, b) = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$V(a, b) = 240 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

2 boda

Kako je  $D(a, b) = 12$ , brojevi  $a$  i  $b$  su oblika

$$a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x,$$

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y,$$

pri čemu su  $x$  i  $y$  različiti djelitelji broja  $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$  i vrijedi  $x \cdot y = 1$ . 3 boda

Kako je  $a < b$ , onda je i  $x < y$ . Brojevi  $x$  i  $y$  moraju biti relativno prosti, umnožak im je 12, pa su jedine mogućnosti  $(x, y) = (1, 12)$  i  $(x, y) = (2, 6)$ . 2 boda

Za  $(x, y) = (1, 12)$  dobivamo da je  $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 12$  i  $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 12 = 144$ . Za  $(x, y) = (2, 6)$  dobivamo da je  $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  i  $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ . 2 boda

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti da je  $a + b = 156$ .

Traženi prirodni brojevi su 12 i 144. 1 bod

### Drugo rješenje.

Za prirodne brojeve  $a$  i  $b$  vrijedi da je njihov umnožak jednak umnošku njihovog najvećeg zajedničkog djelitelja  $D(a, b)$  i njihovog najmanjeg zajedničkog višekratnika  $V(a, b)$ , tj.  $a \cdot b = D(a, b) \cdot V(a, b)$ . 1 bod

Neka su traženi brojevi  $a$  i  $b$ . Prema uvjetima zadatka je  $a \cdot b = 12 \cdot 144$ . 1 bod

Rastavimo li umnožak  $a \cdot b$  na proste faktore dobit ćemo  $a \cdot b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ . 1 bod

Uočimo da je jedan od traženih brojeva djeljiv s 5 jer se u rastavu umnoška  $a \cdot b$  pojavljuje jedan faktor 5. Neka je to broj  $a$ . 2 boda

Kako je  $D(a, b) = 12$ , oba su broja djeljiva i s 12. Brojevi 5 i 12 su relativno prosti pa je broj  $a$  djeljiv sa 60. 2 boda

Ako je  $a = 60$ , tada je  $b = 48$  jer je, prema uvjetu zadatka,  $a + b = 108$ . Za brojeve  $a$  koji su veći od 60, zbroj  $a + b$  je veći od 108. 2 boda

Slijedi da su traženi prirodni brojevi 48 i 60. 1 bod

**Napomena:** Ako učenik iz rastava umnoška  $a \cdot b$  na proste faktore odredi točno rješenje, a ne obrazloži postupak i ne pokaže da je to jedino rješenje (tj. da od ukupno 21 para djelitelja broja 2880 samo par brojeva 48 i 60 zadovoljava uvjete zadatka), može mu se dodijeliti najviše 5 bodova.

**Napomena:** Učenik može zaključiti da su brojevi  $a$  i  $b$  djeljivi s 12 jer je njihov najveći zajednički djelitelj jednak 12 (2 boda) te promatrati parove brojeva  $(x, y)$  za koje vrijedi  $12x + 12y = 108$  (3 boda) i računati najmanji zajednički višekratnik tako dobivenih parova brojeva  $(a, b)$ . Mogući parovi su (12, 96), (24, 84), (36, 72), (48, 60) (4 boda). Posljednji bod (1 bod) učeniku se dodjeljuje ako zaključi da samo par (48, 60) zadovoljava uvjete zadatka.



### Zadatak OŠ-6.4.

Strijelac gađa metu. Za svaki pogodak u središte mete dobiva 9 bodova, za ostale pogotke u metu dobiva 5 bodova, a za svaki mu se promašaj oduzimaju 3 boda. Kako je imao loš dan, nakon 16 hitaca postigao je ukupno 0 bodova. Koliko je puta strijelac pogodio u središte mete, a koliko je puta promašio metu?

#### Prvo rješenje.

Neka je  $s$  broj pogodaka u središte mete,  $m$  broj pogodaka u ostale dijelove mete i  $p$  broj promašaja, pri čemu je  $s, m, p \in \mathbb{N}_0$  i  $s + m + p = 16$ .

Vrijedi  $9s + 5m - 3p = 0$ .

1 bod

Kako je izraz  $3p - 9s$  djeljiv je s 3, iz  $5m = 3p - 9s$  zaključujemo da  $5m$  mora biti djeljivo s 3, odnosno  $m$  mora biti djeljiv s 3.

2 boda

Odredimo moguće trojke  $(m, s, p)$  brojeva tako da u izraz  $3p = 9s + 5m$  uvrštavamo brojeve  $m$  djeljive s 3 i promatramo moguće vrijednosti za  $s$  i  $p$ . U zadnjem stupcu provjeravamo vrijedi li  $s + m + p = 16$ .

| $m$ | $3p = 9s + 5m$ | $s$ | $p$ | broj hitaca u seriji $s + m + p$ |
|-----|----------------|-----|-----|----------------------------------|
| 0   | $p = 3s$       | 0   | 0   | 0                                |
|     |                | 1   | 3   | 4                                |
|     |                | 2   | 6   | 8                                |
|     |                | 3   | 9   | 12                               |
|     |                | 4   | 12  | 16                               |
|     |                | 5   | 15  | 20                               |
|     |                |     |     |                                  |
| 3   | $p = 3s + 5$   | 0   | 5   | 8                                |
|     |                | 1   | 8   | 12                               |
|     |                | 2   | 11  | 16                               |
|     |                | 3   | 14  | 20                               |
|     |                |     |     |                                  |
| 6   | $p = 3s + 10$  | 0   | 10  | 16                               |
|     |                | 1   | 13  | 20                               |
|     |                |     |     |                                  |
| 9   | $p = 3s + 15$  | 0   | 15  | 24                               |

6 bodova

Za  $m \geq 9$ , zbroj  $s + m + p$  će biti veći od 16, a to nije moguće

1 bod

Dobili smo tri mogućnosti koje zadovoljavaju uvjete zadatka. U prvoj je broj pogodaka u središte mete 4, a broj promašaja 12, u drugoj 2 i 11, a u trećoj 0 i 10.

**Napomena:** Učenik predviđenih 6 bodova za tablicu dobiva ako je sustavnim promatranjem trojki  $(m, s, p)$  odredio one za koje vrijede uvjeti zadatka. U pristupu koji je prikazan po 2 boda se dodjeljuje za razmatranje svih mogućnosti u svakom od slučajeva  $m = 0$ ,  $m = 3$  i  $m = 6$ .

### Drugo rješenje.

Neka je  $s$  broj pogodaka u središte mete,  $m$  broj pogodaka u ostale dijelove mete i  $p$  broj promašaja, pri čemu je  $s, m, p \in \mathbb{N}_0$  i  $s + m + p = 16$ . Vrijedi  $9s + 5m - 3p = 0$ . 1 bod

Iz  $s + m + p = 16$  slijedi da je  $3s + 3m + 3p = 48$ , odnosno  $3p = 48 - 3s - 3m$ . Kako je  $9s + 5m = 3p$ , vrijedi  $9s + 5m = 48 - 3s - 3m$ , odnosno  $12s + 8m = 48$ , tj.  $3s + 2m = 12$ . 1 bod

Broj 12 djeljiv je s 3 i zapisan je kao zbroj pribrojnika  $3s$  i  $2m$ . Budući da je pribrojnik  $3s$  sigurno djeljiv s 3, tada i  $2m$  mora biti djeljiv s 3, odnosno  $m$  mora biti djeljiv s 3. 1 bod

Uvrštavamo brojeve  $m$  djeljive s 3, te iz  $3s + 2m = 12$  i  $p = 16 - s - m$  određujemo brojeve  $s$  i  $p$ . 3 boda

1) Za  $m = 0$  je  $3s = 12$ , pa je  $s = 4$  i  $p = 12$ . 1 bod

2) Za  $m = 3$  je  $3s = 6$ , pa je  $s = 2$  i  $p = 11$ . 1 bod

3) Za  $m = 6$  je  $3s = 0$ , pa je  $s = 0$  i  $p = 10$ . 1 bod

Uočimo da će za  $m > 6$  broj  $s$  biti negativan, a to nije moguće. 1 bod

Dobili smo tri mogućnosti koje zadovoljavaju uvjete zadatka. U prvoj je broj pogodaka u središte mete 4, a broj promašaja 12, u drugoj 2 i 11, a u trećoj 0 i 10.

### Treće rješenje.

Neka je  $s$  broj pogodaka u središte mete,  $m$  broj pogodaka u ostale dijelove mete i  $p$  broj promašaja, pri čemu je  $s, m, p \in \mathbb{N}_0$  i  $s + m + p = 16$ . Vrijedi  $9s + 5m - 3p = 0$ . 1 bod

Iz  $s + m + p = 16$  slijedi da je  $5s + 5m + 5p = 80$ , odnosno  $5m = 80 - 5s - 5p$ . Kako je  $5m = 3p - 9s$ , tada vrijedi  $3p - 9s = 80 - 5s - 5p$ , odnosno  $8p - 4s = 80$  tj.  $2p - 20 = s$ . 2 boda

Zaključujemo da broj  $s$  mora biti paran broj. 1 bod

Uvrštavamo parne brojeve  $s$  u izraz  $2p - s = 20$ , te određujemo  $p$ . 2 boda

1) Za  $s = 0$  je  $2p = 20$ , pa je  $p = 10$ . 1 bod

2) Za  $s = 2$  je  $2p = 22$ , pa je  $p = 11$ . 1 bod

3) Za  $s = 4$  je  $2p = 24$ , pa je  $p = 12$ . 1 bod

U svakoj od dobivenih mogućnosti  $m$  možemo izračunati iz  $m = 16 - s - p$ .

Uočimo da će za  $s > 4$  biti  $s + p > 16$ , a to nije moguće. 1 bod

Dobili smo tri mogućnosti koje zadovoljavaju uvjete zadatka. U prvoj je broj pogodaka u središte mete 4, a broj promašaja 12, u drugoj 2 i 11, a u trećoj 0 i 10.

### Zadatak OŠ-6.5.

U svako polje tablice s dva retka i tri stupca treba upisati po jedan broj. Brojeve 10, 13, 17 i 20 treba upisati u tablicu po jednom, a broj 18 dvaput. Na koliko se različitih načina to može napraviti tako da zbroj brojeva u oba retka bude paran?

#### Prvo rješenje.

Kako bi zbroj bio paran ili neparan nije bitno koji su pribrojnici, već jesu li oni parni ili neparni.

1 bod

Među brojevima koje upisujemo u tablicu dva su broja neparna, a četiri parna. Zbroj u oba retka bit će paran ako se u retku ne pojavljuje neparan broj (sva tri su parna) ili su u retku oba neparna broja.

1 bod

Parne (P) i neparne (N) brojeve u tablicu je, prema uvjetima zadatka, moguće rasporediti na sljedećih 6 načina.

|   |   |   |
|---|---|---|
| N | N | P |
| P | P | P |

|   |   |   |
|---|---|---|
| N | P | N |
| P | P | P |

|   |   |   |
|---|---|---|
| P | N | N |
| P | P | P |

|   |   |   |
|---|---|---|
| P | P | P |
| N | N | P |

|   |   |   |
|---|---|---|
| P | P | P |
| N | P | N |

|   |   |   |
|---|---|---|
| P | P | P |
| P | N | N |

2 boda

U svakom od tih šest rasporeda različite parne brojeve moguće je upisati na  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  načina, ali zbog toga što se broj 18 pojavljuje dvaput, ima  $24 : 2 = 12$  načina.

3 boda

Neparne brojeve možemo upisati na 2 načina.

1 bod

Konačno, zadane je brojeve moguće u tablicu upisati na  $6 \cdot 12 \cdot 2 = 144$  različitih načina.

2 boda

#### Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da neparni brojevi moraju biti u istom retku.

2 boda

Upišimo neparne brojeve 13 i 17 u isti redak. Redak je moguće odabrati na 2 načina. U odabranom retku te brojeve možemo razmjestiti na  $3 \cdot 2 = 6$  načina.

2 boda

Treći broj u tom odabranom retku je neki od preostalih. Promotrimo dva slučaja.

**Prvi slučaj.** Ako u redak s brojevima 13 i 17 upišemo broj 18, onda u preostalom retku brojeve 10, 18 i 20 možemo rasporediti na  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  načina.

2 boda

**Drugi slučaj.** Ako u redak s brojevima 13 i 17 ne upišemo broj 18, tada moramo upisati jedan od brojeva 10 ili 20, tj. broj koji upisujemo možemo odabrati na 2 načina. Tada u preostali redak moramo upisati jedan od brojeva 10 i 20 koji već nismo upisali. To možemo učiniti na 3 načina. U svako od preostala dva polja upisujemo broj 18.

2 boda

Tada je ukupan broj mogućnosti jednak:  $2 \cdot 6 \cdot (6 + 2 \cdot 3) = 144$ .

2 boda

### Treće rješenje.

|  |        |
|--|--------|
| Kao u prvom rješenju zaključujemo da neparni brojevi moraju biti u istom retku.  | 2 boda |
| Najprije u tablicu upisujemo prvi neparan broj na 6 načina. Za drugi neparan broj polje u istom retku možemo odabrati na 2 načina. | 2 boda |
| Zatim upisujemo parne brojeve različite od 18 za što imamo $4 \cdot 3 = 12$ načina.  | 2 boda |
| Na kraju u preostala dva polja još upisujemo dva broja 18 na jedan način.  | 2 boda |
| Ukupan broj načina je $6 \cdot 2 \cdot 12 = 144$ .   | 2 boda |

### Četvrto rješenje.

|   |        |
|---|--------|
| Kao u prvom rješenju zaključujemo da neparni brojevi moraju biti u istom retku.   | 2 boda |
| Najprije u tablicu upisujemo dva broja 18 i promatramo dva slučaja.   |        |
| Ako oba broja upisujemo u isti redak, polja u koja ih upisujemo možemo odabrati na 6 načina.  | 1 bod  |
| Ako brojeve upisujemo u različite retke, polja u koja ih upisujemo možemo odabrati na 9 načina.   | 1 bod  |
| Nakon toga upisujemo preostale brojeve. U prvom slučaju u retku s brojevima 18 mora biti još jedan paran broj, možemo ga odabrati na 2 načina, pa dobivamo 12 načina. | 2 boda |
| U drugom slučaju moramo rasporediti brojeve 13 i 17 te 10 i 20 u različite retke što daje 8 različitih načina.  | 2 boda |
| Ukupan broj načina je $6 \cdot 12 + 9 \cdot 8 = 144$ .  | 2 boda |

**Napomena:** Ako učenik, zanemarujući uvjet da se broj 18 pojavljuje dvaput, kao konačan broj različitih načina rasporeda dobije 288 umjesto 144 dodjeljuje mu se najviše 6 bodova.

## ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

24. veljače 2026.

**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

### Zadatak OŠ-7.1.

U jednoj se tiskari rabe dvije vrste tiskarskih pisača, a trenutno svi tiskaju istu knjigu. Šest pisača prve vrste ispiše 18 knjiga za 4 sata, a pet pisača druge vrste ispiše 5 knjiga za 12 sati. Koliko bi ukupno knjiga ispisalo 15 pisača prve vrste i 6 pisača druge vrste za 280 sati?

### Rješenje.

Šest pisača prve vrste za 4 sata ispiše 18 knjiga.

Tri pisača prve vrste za 4 sata ispišu  $18 : 2 = 9$  knjiga.

1 bod

Stoga, 15 pisača prve vrste za 4 sata ispiše  $9 \cdot 5 = 45$  knjiga.

1 bod

Konačno, 15 pisača prve vrste za 280 sati ispiše  $45 \cdot 70 = 3150$  knjiga.

2 boda

Pet pisača druge vrste za 12 sati ispiše 5 knjiga.

Jedan pisač druge vrste za 12 sati ispiše jednu knjigu.

1 bod

Stoga, 6 pisača druge vrste za 12 sati ispiše 6 knjiga,

1 bod

te 6 pisača druge vrste za 4 sata ispiše 2 knjige.

1 bod

Konačno, 6 pisača druge vrste za 280 sati ispiše  $2 \cdot 70 = 140$  knjiga.

2 boda

Dakle, 15 pisača prve vrste i 6 pisača druge vrste za 280 sati ispiše ukupno  $3150 + 140 = 3290$  knjiga.

1 bod

### Zadatak OŠ-7.2.

Za prirodne brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$  vrijedi  $D(a, b) = 6$ ,  $D(a, c) = 21$  i  $V(b, c) = 840$ . Odredi sve moguće vrijednosti broja  $b$ .

*Napomena.*  $D(m, n)$  je najveći zajednički djelitelj, a  $V(m, n)$  najmanji zajednički višekratnik brojeva  $m$  i  $n$ .

#### Rješenje.

Iz  $D(a, b) = 6$  i  $D(a, c) = 21$  zaključujemo da je  $a$  djeljiv brojevima 2, 3 i 7. 1 bod

Broj  $b$  je djeljiv brojem 6, ali nije djeljiv brojem 7 jer bi inače  $D(a, b)$  bio barem 42. 2 boda

Broj  $c$  je djeljiv brojem 21, ali nije djeljiv brojem 2 jer bi inače  $D(a, c)$  bio barem 42. 2 boda

Rastav broja 840 na proste faktore je  $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ . 1 bod

Budući da vrijedi  $V(b, c) = 840$  i  $c$  nije djeljiv s 2, slijedi da je  $b$  djeljiv s  $2^3 = 8$ . 2 boda

Također,  $b$  je djeljiv s 3, ali ne i sa 7, pa  $b$  može biti

$$b = 8 \cdot 3 = 24$$

1 bod

ili

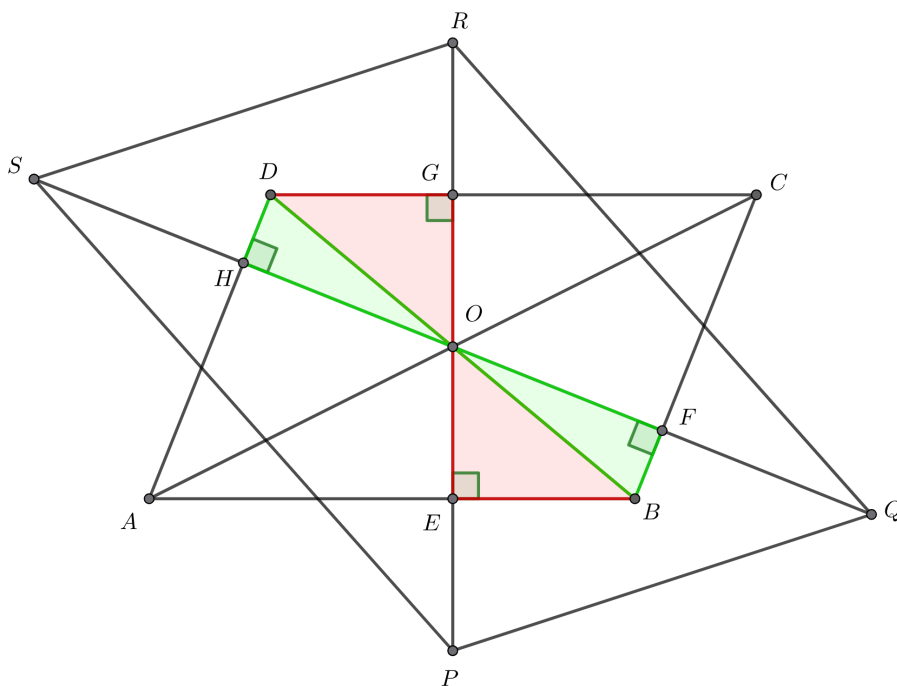
$$b = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

1 bod

### Zadatak OŠ-7.3.

Dijagonale paralelograma  $ABCD$  sijeku se u točki  $O$ . Neka su  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  i  $S$  redom osnosimetrične slike točke  $O$  u odnosu na pravce  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  i  $DA$ . Dokaži da je četverokut  $PQRS$  paralelogram.

#### Rješenje.



|   |       |
|---|-------|
| U paralelogramu se dijagonale raspolavljaju, pa je $ AO  =  OC $ i $ BO  =  OD $ .  | 1 bod |
| Točke $P$ i $R$ su osnosimetrične slike točke $O$ obzirom na pravce $AB$ i $CD$ , pa je $PO \perp AB$ i $OR \perp CD$ .   | 1 bod |
| Kako su $AB$ i $CD$ usporedni pravci, slijedi da točke $P$ , $O$ i $R$ pripadaju istom pravcu.  | 1 bod |
| Slično zaključujemo da je $O \in QS$ , a pravac $QS$ je okomit na pravce $BC$ i $DA$ .  | 1 bod |
| Neka je $E$ presjek pravca $PR$ s pravcem $AB$ i $G$ presjek pravca $PR$ s pravcem $CD$ .   |       |
| Promotrimo trokute $BOE$ i $DOG$ . Vrijedi:   |       |
| <ul style="list-style-type: none"> <li><math> \sphericalangle BEO  =  \sphericalangle DGO  = 90^\circ</math>,</li> <li><math> BO  =  OD </math>,</li> <li><math> \sphericalangle EOB  =  \sphericalangle GOD </math> jer su to vršni kutovi.</li> </ul> |       |
| Stoga su trokuti $BOE$ i $DOG$ sukladni prema poučku K-S-K.   | 1 bod |
| Iz sukladnosti trokuta slijedi $ EO  =  OG $ .  | 1 bod |
| Zbog osne simetrije slijedi $ PO  = 2 EO  = 2 OG  =  OR $ , tj. točka $O$ je polovište dužine $\overline{PR}$ .   | 1 bod |
| Neka je $F$ presjek pravca $QS$ s pravcem $BC$ i $H$ presjek pravca $QS$ s pravcem $DA$ .   |       |
| Slično kao gore zaključujemo da su trokuti $BFO$ i $DHO$ također međusobno sukladni i vrijedi $ FO  =  OH $ .   | 1 bod |
| Slijedi $ QO  =  OS $ , tj. točka $O$ je polovište dužine $\overline{QS}$ .   | 1 bod |
| Dakle, dijagonale $\overline{PR}$ i $\overline{QS}$ četverokuta $PQRS$ se raspolavljaju, pa je taj četverokut paralelogram.   | 1 bod |
| <b>Zadatak OŠ-7.4.</b>  |       |
| Na koliko se načina po jedna bijela, plava, zelena, smeđa i tri crvene stolice mogu rasporediti u niz (jedna do druge) tako da svake dvije susjedne stolice budu različitih boja? Stolice se razlikuju samo po boji.                                    |       |
| <b>Prvo rješenje.</b>   |       |
| Na raspolaganju su 3 crvene stolice i 4 stolice ostalih boja, ukupno 7 stolica.   |       |
| Označimo crvene stolice slovom C, a ostale stolice slovom X.  |       |
| Ispišimo kako se crvene stolice mogu rasporediti u odnosu na ostale stolice.  |       |
| Prvo ispisujemo sve mogućnosti u kojima su prva i treća stolica u nizu crvene.  | 1 bod |
| To su: CXCXCXX, CXCXXCX, CXCXXXC  | 1 bod |
| Nakon toga ispisujemo ostale mogućnosti u kojima je prva stolica crvena.  | 1 bod |
| To su: CXXCXCX, CXXCXXC, CXXXCXC  | 1 bod |
| Konačno ispisujemo mogućnosti u kojima prva stolica nije crvena.  | 1 bod |
| To su: XCXCXCX, XCXXCXC, XCXCXXC, XXCXCXC   | 1 bod |
| Ukupno ima 10 rasporeda.  |       |

Međusobnom zamjenom crvenih stolica (C) unutar bilo kojeg od ovih rasporeda nećemo dobiti novi raspored jer su crvene stolice iste. Međutim, zamjenom bilo koje dvije od ostalih stolica (X) dobit ćemo novi raspored jer su te stolice sve međusobno različite.

Stolice bijele, plave, zelene i smeđe boje mogu se rasporediti na  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  načina. 2 boda

Ukupno, broj traženih rasporeda stolica iznosi  $10 \cdot 24 = 240$ . 2 boda

**Napomena:** Moguće je razmišljati i u obrnutom smjeru. Prvo rasporedimo necrvene stolice na 24 načina, što nosi 2 boda, pa nakon toga pokažemo da se crvene stolice mogu rasporediti na 10 načina, što nosi 6 bodova bodova. Zaista, četiri necrvene stolice određuju pet praznina (prije prve stolice, nakon prve stolice, nakon druge stolice, nakon treće stolice i nakon četiri stolice) od kojih trebamo odabrati tri u koje stavljamo crvene stolice. Dovoljno je odabrati dvije od tih pet praznina u koje nećemo staviti crvene stolice, a to možemo na  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  načina.

### Drugo rješenje.

Na raspolaganju imamo 3 crvene i po jednu bijelu, plavu, zelenu i smeđu stolicu.

Označimo ih C, C, C, B, P, Z, S.

Sedam različitih stolica možemo rasporediti na  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  načina.

No, kako su tri crvene stolice iste, taj broj treba umanjiti onoliko puta na koliko se načina mogu ispremještati tri crvene stolice, a to je  $3 \cdot 2 \cdot 1$ . 2 boda

Dakle, broj svih rasporeda stolica je

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 840. \quad 2 \text{ boda}$$

Od tog broja treba oduzeti broj rasporeda u kojima se crvene stolice nalaze jedna do druge. Prebrojimo te rasporede.

Prvo prebrojimo koliko ima rasporeda u kojima su sve tri crvene stolice zajedno, odnosno broj rasporeda niza (CCC), B, P, Z, S. Ima ih  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ . 1 bod

Prebrojimo sada koliko ima rasporeda u kojima su dvije crvene stolice zajedno, a treća nije kraj njih. Neka je (CC) par crvenih stolica koje u rasporedu stoje zajedno. Treba rasporediti niz (CC), C, B, P, Z, S tako da (CC) i C ne budu zajedno.

Broj rasporeda tog niza je  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ . 1 bod

Međutim, ovdje smo dvaput prebrojali one rasporede u kojima su sve tri crvene stolice zajedno (kao (CC)C i C(CC)), pa taj broj moramo oduzeti. 1 bod

Dakle, broj rasporeda u kojima se točno dvije crvene stolice nalaze jedna do druge je

$$720 - 2 \cdot 120 = 480. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno, broj različitih rasporeda stolica koji su u skladu s uvjetom zadatka je

$$840 - 120 - 480 = 240. \quad 2 \text{ boda}$$



**Zadatak OŠ-7.5.**

Odredi sve uređene trojke  $(x, y, z)$  racionalnih brojeva za koje vrijede jednakosti

$$xy = z - x - y$$

$$yz = x - y - z$$

$$zx = y - z - x.$$

**Prvo rješenje.**

Zbrajanjem prve i treće jednadžbe dobivamo  $x(y + z) = -2x$ , odnosno

$$x(y + z + 2) = 0. \quad 2 \text{ boda}$$

Analogno dobivamo

$$y(z + x + 2) = 0, \quad \text{i} \quad z(x + y + 2) = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Ako je  $x = 0$ , tada iz prve polazne jednadžbe vidimo da je  $y = z$ . 1 bod

Uvrštavanjem u drugu polaznu jednadžbu dobivamo  $y^2 = -2y$ ,

pa je  $y = z = 0$  ili  $y = z = -2$ . 2 boda

Analogno zaključujemo ako je  $y = 0$  ili  $z = 0$ .

Stoga, ako je barem jedan od  $x, y, z$  jednak 0, rješenja su

$$(x, y, z) \in \{(0, 0, 0), (-2, -2, 0), (-2, 0, -2), (0, -2, -2)\}. \quad 1 \text{ bod}$$

Inače, ako niti jedan od  $x, y$  i  $z$  nije 0, onda dobivamo sustav

$$y + z + 2 = 0,$$

$$z + x + 2 = 0,$$

$$x + y + 2 = 0, \quad 1 \text{ bod}$$

čije je jedino rješenje  $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$ . 2 boda

**Drugo rješenje.**

Iz  $xy = z - x - y$  slijedi

$$xy + x + y = z$$

$$xy + x + y + 1 = z + 1$$

$$(x + 1)(y + 1) = z + 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Analogno, dobivamo

$$(y + 1)(z + 1) = x + 1 \quad \text{i} \quad (z + 1)(x + 1) = y + 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Množenjem dobivenih jednadžbi dobivamo

$$(x + 1)^2(y + 1)^2(z + 1)^2 = (x + 1)(y + 1)(z + 1). \quad 1 \text{ bod}$$

Zaključujemo da vrijedi

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 0 \quad \text{ili} \quad (x+1)(y+1)(z+1) = 1. \quad 1 \text{ bod}$$

**Prvi slučaj.**

Iz  $(x+1)(y+1)(z+1) = 0$  slijedi  $x = -1$  ili  $y = -1$  ili  $z = -1$ .

Ako je  $x = -1$ , iz  $(x+1)(y+1) = z+1$  slijedi  $z = -1$ .

Tada iz  $(z+1)(x+1) = y+1$  slijedi  $y = -1$ .

Slično dobivamo za pretpostavke  $y = -1$  ili  $z = -1$ , pa je u ovom slučaju jedino rješenje  $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$ . 1 bod

**Drugi slučaj.**

Iz  $(x+1)(y+1)(z+1) = 1$  i  $(x+1)(y+1) = z+1$  slijedi  $(z+1)(z+1) = 1$ , tj.  $(z+1)^2 = 1$ .

Stoga je  $z+1 = 1$  ili  $z+1 = -1$ , odnosno  $z = 0$  ili  $z = -2$ . 1 bod

Za  $z = 0$ , iz  $(z+1)(x+1) = y+1$  dobivamo  $x = y$ .

Tada iz  $(x+1)(y+1) = z+1$  slijedi  $x = y = -2$ . 1 bod

Za  $z = -2$ , iz  $(z+1)(x+1) = y+1$  dobivamo  $x + y + 2 = 0$ .

Tada iz  $(x+1)(y+1) = z+1$  slijedi  $xy = 0$ , tj.  $x = 0$  ili  $y = 0$ . 1 bod

Jedine trojke  $(x, y, z)$  koje zadovoljavaju uvjet  $(x+1)(y+1)(z+1) = 1$  su  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, -2, -2)$ ,  $(-2, 0, -2)$ ,  $(-2, -2, 0)$ . 2 boda

**Treće rješenje.**

Kao u prethodnom rješenju dobivamo  $(x+1)(y+1) = z+1$ ,  $(y+1)(z+1) = x+1$  i  $(z+1)(x+1) = y+1$ . 2 boda

Množenjem prve jednadžbe sa  $z+1$ , druge s  $x+1$ , a treće s  $y+1$ , dobivamo

$$(x+1)(y+1)(z+1) = (x+1)^2 = (y+1)^2 = (z+1)^2.$$

Slijedi da je  $|x+1| = |y+1| = |z+1|$ . 1 bod

Također, kao u prethodnom rješenju dobivamo da izraz  $(x+1)(y+1)(z+1)$  ima vrijednost 0 ili 1. 2 boda

Iz  $(x+1)(y+1)(z+1) = 0$  i  $|x+1| = |y+1| = |z+1|$  slijedi  $x = y = z = -1$ . 1 bod

Iz  $(x+1)(y+1)(z+1) = 1$  i  $|x+1| = |y+1| = |z+1|$  slijedi  $|x+1| = |y+1| = |z+1| = 1$ . 1 bod

Dakle, za svaki od brojeva  $x$ ,  $y$  i  $z$  vrijedi da su jednaki 0 ili  $-2$ . 1 bod

Zbog uvjeta  $(x+1)(y+1)(z+1) = 1$  ili je jedna zagrada pozitivna i dvije negativne ili su sve tri pozitivne, pa jedine trojke  $(x, y, z)$  koje zadovoljavaju uvjet su  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, -2, -2)$ ,  $(-2, 0, -2)$ ,  $(-2, -2, 0)$ . 2 boda

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

24. veljače 2026.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

## Zadatak OŠ-8.1.

Za koje realne brojeve  $a$  su  $a(3a + 4)$  i  $(a - 1)(a + 1)$  dva uzastopna cijela broja?

### Rješenje.

Neka je

$$m = a(3a + 4) = 3a^2 + 4a \quad 1 \text{ bod}$$

$$n = (a - 1)(a + 1) = a^2 - 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Brojevi  $m$  i  $n$  su dva uzastopna cijela broja ako je  $m = n + 1$  ili  $m = n - 1$ .

**Prvi slučaj.** Neka je  $m = n + 1$ , tj.  $3a^2 + 4a = a^2 - 1 + 1$ . 1 bod

Sređivanje dobivamo  $2a^2 + 4a = 0$ , odnosno  $2a(a + 2) = 0$ , 1 bod

iz čega slijedi  $a = 0$  ili  $a = -2$ . 2 boda

**Drugi slučaj.** Neka je  $m = n - 1$ , tj.  $3a^2 + 4a = a^2 - 1 - 1$ . 1 bod

Sređivanjem dobivamo

$$2a^2 + 4a + 2 = 0$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$a^2 + a + a + 1 = 0$$

$$a(a + 1) + (a + 1) = 0$$

$$(a + 1)(a + 1) = 0, \quad 2 \text{ boda}$$

iz čega slijedi  $a = -1$ . 1 bod

Realni brojevi  $a$  za koje su  $m$  i  $n$  dva uzastopna cijela broja su  $a \in \{-2, -1, 0\}$ .

## Zadatak OŠ-8.2.

Trgovina će cijenu nekog proizvoda sniziti dva puta, najprije 1. ožujka za  $k$  %, a potom 15. ožujka za  $m$  %. Nakon drugog sniženja cijena treba iznositi 49 % početne cijene. Na koje se sve načine to može postići tako da  $k$  i  $m$  budu prirodni brojevi manji od 100?

**Rješenje.**

Neka je  $c$  početna cijena proizvoda.

Nakon prvog sniženja cijena proizvoda iznosi  $c \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right)$ . 1 bod

Nakon drugog sniženja cijena proizvoda iznosi  $c \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{100}\right)$ . 2 boda

Prema uvjetu zadatka vrijedi  $c \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{100}\right) = 0.49c$ , odnosno

$$\frac{100 - k}{100} \cdot \frac{100 - m}{100} = 0.49. \quad 1 \text{ bod}$$

Neka je  $a = 100 - k$  i  $b = 100 - m$ .

Vrijedi  $\frac{a}{100} \cdot \frac{b}{100} = 0.49$ , odnosno  $a \cdot b = 4900$ , pri čemu su  $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ , 1 bod

Rastav broja 4900 na proste faktore glasi  $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ . 1 bod

Djelitelji broja 4900 manji od 100 su 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 49, 50, 70, 98.

Uređeni parovi  $(a, b)$  koji zadovoljavaju uvjet  $a \cdot b = 4900$  su  $(50, 98)$ ,  $(98, 50)$  i  $(70, 70)$ . 3 boda

Za  $(a, b) = (50, 98)$  je  $k = 50$  i  $m = 2$ .

Za  $(a, b) = (98, 50)$  je  $k = 2$  i  $m = 50$ .

Za  $(a, b) = (70, 70)$  je  $k = m = 30$ .

Trgovina može sniženje postići na tri načina:

- najprije snizi cijenu proizvoda za 50 %, a zatim za 2 %
  - najprije snizi cijenu proizvoda za 2 %, a zatim za 50 %
  - najprije snizi cijenu proizvoda za 30 %, a zatim za 30 %.
- 1 bod

**Zadatak OŠ-8.3.**

Odredi sve proste brojeve  $p$  za koje je  $p^2 + 2$  prost broj.

**Rješenje.**

Neka je  $p = 2$ . Tada je  $2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$ , pa je zadani izraz složen broj. 1 bod

Neka je  $p = 3$ . Tada je  $3^2 + 2 = 9 + 2 = 11$ , pa je zadani izraz prost broj. 1 bod

Neka je  $p > 3$  prost broj.

Tada  $p$  nije djeljiv s 3, pa mora biti oblika  $p = 3k + 1$  ili  $p = 3k + 2$ , gdje je  $k \in \mathbb{N}$ .

Za  $p = 3k + 1$  slijedi

$$\begin{aligned} p^2 + 2 &= (3k + 1)^2 + 2 & 1 \text{ bod} \\ &= 9k^2 + 6k + 1 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 & 1 \text{ bod} \\ &= 3(3k^2 + 2k + 1). \end{aligned}$$

Dobiveni je izraz djeljiv brojem 3, pa nije prost broj. 2 boda

Za  $p = 3k + 2$  slijedi

$$\begin{aligned} p^2 + 2 &= (3k + 2)^2 + 2 && 1 \text{ bod} \\ &= 9k^2 + 12k + 4 + 2 = 9k^2 + 12k + 6 && 1 \text{ bod} \\ &= 3(3k^2 + 4k + 2). \end{aligned}$$

Dobiveni je izraz djeljiv brojem 3, pa nije prost broj.

2 boda

Dakle,  $p = 3$  je jedino rješenje.

#### Zadatak OŠ-8.4.

Dokaži da svi četverokuti  $ABCD$  za koje vrijedi

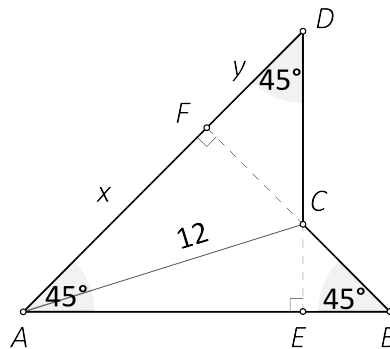
$$|\angle BAD| = |\angle CBA| = |\angle ADC| = 45^\circ$$

i  $|AC| = 12$  imaju jednaku površinu.

#### Prvo rješenje.

Pravac  $DC$  siječe  $\overline{AB}$  u točki  $E$ . Pravac  $BC$  siječe  $\overline{AD}$  u točki  $F$ .

Neka je  $|AF| = x$ ,  $|FD| = y$  i  $|AC| = 12$ .



Kako je  $|\angle BAD| = |\angle CBA| = 45^\circ$ , slijedi da je  $ABF$  jednakokračan trokut,

1 bod

iz čega slijedi  $|BF| = x$ .

1 bod

Kako je  $|\angle AFB| = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ ,

1 bod

slijedi da je  $|\angle DFC| = 90^\circ$  te iz  $|\angle FDC| = 45^\circ$  slijedi  $|\angle DCF| = 45^\circ$ ,

1 bod

pa i trokut  $CDF$  jednakokračan,

1 bod

iz čega slijedi  $|FC| = y$ .

1 bod

Trokut  $ACF$  je pravokutan trokut, pa je prema Pitagorinom poučku  $x^2 + y^2 = 12^2$ .

1 bod

Površina četverokuta  $ABCD$  jednaka je zbroju površina pravokutnih trokuta  $ABF$  i  $CDF$ . Stoga vrijedi

$$P(ABCD) = P(ABF) + P(CDF) \quad 1 \text{ bod}$$

$$= \frac{x \cdot x}{2} + \frac{y \cdot y}{2} = \frac{x^2 + y^2}{2} \quad 1 \text{ bod}$$

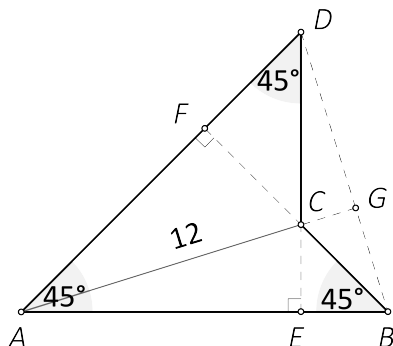
$$= \frac{12^2}{2} = \frac{144}{2} = 72. \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, svaki četverokut koji zadovoljava uvjete zadatka ima površinu 72.

Napomena: Analogno se može promatrati pravokutne trokute  $AED$  i  $BCE$ .

### Drugo rješenje.

Neka je točka  $E$  sjecište pravaca  $AB$  i  $CD$ , točka  $F$  sjecište pravaca  $AD$  i  $BC$ , a točka  $G$  sjecište pravaca  $AC$  i  $BD$ .



Za svaki četverokut koji zadovoljava uvjete zadatka vrijede sljedeće tvrdnje.

Trokut  $AED$  je jednakokračni pravokutni trokut, pa je  $|AE| = |ED|$ . 1 bod

Trokut  $ABF$  je jednakokračni pravokutni trokut, pa je  $|AF| = |BF|$ . 1 bod

Trokut  $CDF$  je jednakokračni pravokutni trokut, pa je  $|FD| = |FC|$ . 1 bod

Trokuti  $ACF$  i  $BDF$  su pravokutni i duljine kateta su im jednake, pa su oni sukladni. 1 bod

Zbog toga je  $|DB| = |AC| = 12$ . 1 bod

Dužine  $\overline{BF}$  i  $\overline{DE}$  su dvije visine trokuta  $ABD$ , a njihovo sjecište, točka  $C$ , ortocentar je tog trokuta. 1 bod

Budući da točka  $G$  pripada stranici  $\overline{BD}$ , a dužina  $\overline{AG}$  sadrži točku  $C$ , zaključujemo da je dužina  $\overline{AG}$  visina trokuta  $ABD$ , a dužina  $\overline{CG}$  visina trokuta  $BDC$ . 1 bod

Površina četverokuta  $ABCD$  jednaka je razlici površina trokuta  $ABD$  i  $BDC$ , pa je

$$\begin{aligned}
 P_{ABCD} &= P_{ABD} - P_{BDC} & 1 \text{ bod} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |AG| - \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |CG| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot (|AG| - |CG|) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |AC| & 1 \text{ bod} \\
 &= \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 & 1 \text{ bod}
 \end{aligned}$$

Dakle, svaki četverokut koji zadovoljava uvjete zadatka ima površinu 72.

### Zadatak OŠ-8.5.

Koliko ima peteroznamenastih brojeva u čijem se zapisu koriste tri različite znamenke, a nijedna se znamenka ne pojavljuje više od dva puta?

### Prvo rješenje.

- Broj je peteroznamenkast, pa se točno dvije znamenke pojavljuju dva puta, a treća samo jednom. 1 bod
- Mjesto na koje će doći znamenka koja se pojavljuje točno jednom biramo na 5 načina. 1 bod
- Preostaje četiri mjesta te biramo na koja dva mjesta će biti iste znamenke. To možemo na jedan od tri načina: *aabb*, *abab* i *abba*. 2 boda
- Dakle, imamo  $5 \cdot 3 = 15$  načina za odabrati na kojim mjestima će biti iste znamenke. 1 bod
- Znamenku na mjestu desettisućica (te eventualno onu koja joj je jednaka) možemo odabrati na 9 načina jer ta znamenka ne može biti 0. 1 bod
- Prvu sljedeću znamenku na najvećoj mjesnoj vrijednosti (te eventualno onu koja joj je jednaka) možemo također odabrati na 9 načina jer mora biti različita od prethodne. 1 bod
- Preostalu znamenku (te eventualno onu koja joj je jednaka) možemo odabrati na 8 načina jer mora biti različita od prethodne dvije. 1 bod
- Dakle, tri različite znamenke koje koristimo u peteroznamenkastom broju biramo na  $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$  načina. 1 bod
- Ukupno ima  $30 \cdot 648 = 9720$  traženih peteroznamenkastih brojeva. 1 bod

### Drugo rješenje.

- Broj je peteroznamenkast, pa se točno dvije znamenke pojavljuju dva puta, a treća samo jednom. 1 bod
- Prvi slučaj.** Prebrojimo sve tražene brojeve koji ne sadrže nulu.
- Znamenku koja se pojavljuje jednom možemo odabrati i smjestiti na odgovarajuće dekadsko mjesto na  $9 \cdot 5$  načina.
- Za najveću slobodnu mjesnu vrijednost biramo znamenku na 8 načina, a na 3 načina biramo drugo dekadsko mjesto te iste znamenke.
- Potom na 7 načina biramo znamenku za preostala dva mjesta.
- Ukupno, traženih brojeva koji ne sadrže nulu ima  $9 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 7 = 7560$ . 3 boda
- Drugi slučaj.** Prebrojimo sve tražene brojeve koji sadrže točno jednu nulu.
- Nulu možemo rasporediti na 4 mjesta (jer ne može biti na vodećem mjestu).
- Za najveću slobodnu mjesnu vrijednost biramo znamenku na 9 načina, a potom na 3 načina biramo drugo mjesto te iste znamenke.
- Na kraju, na 8 načina biramo koja znamenku za preostala dva mjesta.
- Ukupno, traženih brojeva koji sadrže jednu nulu ima  $4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 8 = 864$ . 2 boda
- Treći slučaj.** Prebrojimo sve tražene brojeve koji sadrže točno dvije nule.
- Osim nule pojavljuju se dvije znamenke. Vodeću znamenku biramo na 9 načina, a preostalu znamenku različitu od nule na 8 načina. 1 bod
- Razlikujemo dvije mogućnosti ovisno o tome pojavljuje li se vodeća znamenka jednom ili dvaput.

Ako se vodeća znamenka pojavljuje jednom, onda dvije nule možemo rasporediti na  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  mjesta, jer niti jedna od njih ne može biti na vodećem mjestu, a njihovom međusobnom zamjenom se ne dobiva novi broj. Znamenku za preostala dva mjesta biramo na 8 načina, pa u tom slučaju imamo  $9 \cdot 8 \cdot 6 = 432$  takva broja.

1 bod

Ako se vodeća znamenka pojavljuje dvaput, onda na 4 načina biramo drugo mjesto za tu znamenku. Mjesto za znamenku koja se **javlja** jednom biramo na 3 načina, a na preostala dva mjesta moraju biti nule, pa u ovom slučaju imamo  $9 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3 = 864$  takva broja.

1 bod

Konačno, broj traženih peteroznamenkastih brojeva je  $7560 + 864 + 432 + 864 = 9720$ .

1 bod

**Napomena:** U drugom rješenju promatramo tri slučaja, koji redom nose 3 boda, 2 boda i 3 boda. U svakom od tih slučajeva moguće je kao u prvom rješenju posebno prebrojiti koliko ima odabira znamenki i koliko ima odabira pozicija na kojima su iste znamenke, pa ta dva broja pomnožiti. Odabir znamenki redom po slučajevima nosi 2 boda, 1 bod i 1 bod, dok odabir pozicija na kojima su iste znamenke nosi redom 1 bod, 1 bod i 2 boda.