

DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

15.-17. travnja 2026.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD*
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA*

*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drugačije.

B-KATEGORIJA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		18
2.		24
3.		21
4.		42
5.		21
6.		36
UKUPNO		162

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

Zadatak 1.

Poljski zapis osmislio je logičar Jan Łukasiewicz početkom 20. stoljeća. Cilj je bio pojednostaviti zapis logičkih formula jer klasični zapis često zahtijeva mnogo zagrada. U poljskoj notaciji logički operator piše se ispred formula na koje djeluje, a redoslijed simbola već sam pokazuje strukturu formule. Iako se u matematici češće upotrebljava klasični zapis sa zgradama, ideja poljskog zapisa vrlo je važna u informatici. Sličan princip primjenjuje se u analizi i prevođenju programskog koda i u nekim programskim jezicima, poput Lispa. Poljski zapis zato predstavlja dobar primjer kako ideje iz logike mogu imati važnu primjenu u računalnoj znanosti.

U poljskom zapisu upotrebljavaju se sljedeća slova:

Slovo	Operator	Značenje
N	\neg	negacija
K	\wedge	konjunkcija (i)
A	\vee	disjunkcija (ili)
C	\rightarrow	implikacija
E	\leftrightarrow	ekvivalencija

Primjeri

Infiksni zapis	Poljski zapis
$p \wedge q$	Kpq
$\neg p$	Np
$p \rightarrow q$	Cpq
$(p \vee q) \wedge r$	$KApqr$
$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	$CCpqr$

Zadatak

U nastavku je zadano devet logičkih formula u infiksnom zapisu. Prevedi ih u poljski zapis koristeći se ranije navedenim poljskim slovnim oznakama za logičke operatore.

Infiksni zapis

Poljski zapis

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

2. $((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow s$

3. $\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r))$

4. $((p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)) \leftrightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee s))$

5. $((p \rightarrow (q \wedge r)) \vee (\neg s \rightarrow t))$

6. $\neg((p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \wedge \neg s))$

(6×3 boda = 18 bodova)

Zadatak 2.

Međunarodni olimpijski odbor odlučio je promijeniti uvjete igranja odbojke. Od sada se odbojka igra u olimpijskom plivačkom bazenu, pa je uvedena nova verzija igre pod nazivom **Akvabojka**. Nisu ti poznata sva pravila i potezi, ali su ti poznati odnosi između dopuštenih (Px), zabranjenih (Fx) i obveznih (Ox) poteza u sportu.

Napomena: Modalni operatori P, F i O nisu predikati, već operatori nad iskazima. Ne opisuju svojstva objekata, nego normativni status iskaza, pa ih ne treba miješati s predikatima u predikatnoj logici. Modalni su operatori proširenje klasične iskazne logike te se mogu slobodno kombinirati s klasičnim logičkim veznicima.

Primjeri:

- $\neg[P(a \vee b)]$ znači “nije dopušteno da se izvrši a ili b ”.
- $\neg(Pa \wedge Pb)$ znači “nije dopušteno da se izvrši a i nije dopušteno da se izvrši b ” (nije dopušteno da se obje radnje izvrše istodobno).

Logički ekvivalent drugog primjera:

$$\neg(Pa \wedge Pb) \equiv \neg Pa \vee \neg Pb$$

Vrijede sljedeće veze (za svaki potez x):

- Ako je potez obavezan, tada je dopušten:

$$Ox \rightarrow Px$$

- Ako je potez zabranjen, tada nije dopušten:

$$Fx \rightarrow \neg Px$$

- Potez je obavezan ako i samo ako nije dopušteno da se ne izvrši:

$$Ox \leftrightarrow \neg P\neg x$$

- Potez je zabranjen ako i samo ako nije dopušten:

$$Fx \leftrightarrow \neg Px$$

Primjer zadatka

Zadana je tvrdnja: Ako je potez p obavezan, tada nije zabranjen. $Op \rightarrow \neg Fp$

Objašnjenje: Ako je neki potez obavezan, onda mora biti dopušten. Zabranjeno je upravo ono što nije dopušteno. Zato obavezan potez ne može biti nedopušten, tj. zabranjen.

Zadatak

Zadane su različite tvrdnje o potezima u Akvabojci. Za svaku tvrdnju odredi slijedi li iz navedenih pravila, odnosno je li istinita u svim slučajevima u kojima su pravila istinita.

1.	Ako je obvezno ili zabranjeno blokirati loptu objema rukama iznad mreže, tada je dopušteno blokirati loptu objema rukama iznad mreže.	DA/NE
2.	$[(Op \vee Fp) \wedge (Pp \vee \neg Pp)] \rightarrow [(Pp \vee \neg Pp) \vee (Op \wedge \neg Op)]$	DA/NE
3.	Ako je dopušteno udariti loptu glavom iznad površine vode, a zabranjeno je dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode, tada slijedi kako je dopušteno udariti loptu glavom iznad površine vode ili zabranjeno dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode.	DA/NE
4.	$\neg(Op \wedge Fp) \vee \neg(Op \rightarrow Pp) \vee (Pp \wedge \neg Pp)$	DA/NE
5.	Ako iz toga što je obvezno servirati loptu izvan bazena slijedi kako je dopušteno servirati loptu izvan bazena, tada iz toga što je dopušteno udariti je glavom slijedi kako je obvezno udariti je glavom ili je obvezno ne držati člana protivničke momčadi ispod vode dulje od tri sekunde.	DA/NE
6.	$[\neg(Op \wedge P\neg p) \vee \neg Fp] \wedge (Pp \vee \neg Pp)$	DA/NE
7.	Ako je dopušteno dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode i dopušteno je ne dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode, tada je zabranjeno dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode.	DA/NE
8.	$[P(a \vee b) \wedge (Fa \rightarrow \neg Pa)] \rightarrow (Pa \vee Pb)$	DA/NE

(8×3 boda = 24 boda)

Zadatak 3.

Teoretičar Teo proučava teorije zavjere u okviru svog istraživanja alternativnih modela objašnjenja stvarnosti i događaja. Cilj mu je pronaći bitne pretpostavke svake teorije te otkriti postoje li pretpostavke koje su svima zajedničke. Do sada je proučio tri teorije:

Teorija ravne Zemlje (FE)

- (a) Zemlja je ravna ploča
- (b) gravitacija ne postoji
- (c) Antarktika je ledeni zid

- $a \rightarrow c$

Ljudi gušteri (LP)

- (d) Zemlja je šuplja
- (e) u šupljini žive reptilijanci
- (f) gravitacija je u šupljini drugačija

- $d \rightarrow e$

- $e \rightarrow f$

Chemtrails (CT)

- (g) avioni nas zaprašuju otrovima
- (h) otrovi uništavaju poljoprivredu
- (i) GMO hrana se propagira
- (j) GMO smanjuje populaciju

- $g \rightarrow h$

- $h \rightarrow i$

- $i \rightarrow j$

Zajedničke postavke (ZP)

- (k) vlade i znanstvenici lažu
- (l) postoji globalna zavjera
- (m) tajno društvo upravlja svijetom

- $l \rightarrow k$

- $m \rightarrow l$

1) Ako se sve pretpostavke uzmu kao istinite, odredi jesu li sljedeći iskazi tautologije (T), zadovoljivi/ispunjivi (Z), nevaljani/oborivi (O) te kontradikcije (K). Za svaki iskaz zaokruži **sva** svojstva koja o njemu vrijede.

T = tautologija Z = zadovoljiv/ispunjiv O = oboriv/nevaljan K = kontradikcija

Br.	Iskaz	T	Z	O	K
1.	Nije slučaj da gravitacija ne postoji ako je Zemlja ravna ploča, niti da iz šuplje Zemlje slijede reptilijanci iz kojih slijedi drugačija gravitacija u šupljini, osim ako Antarktika nije ledeni zid, a avioni nas ne zaprašuju otrovima koji uništavaju poljoprivredu i propagiraju GMO hranu koja smanjuje populaciju.				
2.	Ako nije istina da iz činjenice da je Zemlja ravna ploča slijedi nepostojanje gravitacije, niti da iz Antarktike koja nije ledeni zid slijedi da gravitacija postoji, niti da iz šuplje Zemlje slijede reptilijanci iz kojih slijedi drugačija gravitacija u šupljini, niti da tajno društvo upravlja svijetom, slijedi da postoji globalna zavjera te da vlade i znanstvenici lažu, onda je Zemlja ravna ploča.				
3.	Ako nas avioni zaprašuju otrovima, tada vrijedi da se poljoprivreda uništava i propagira GMO, ali ne vrijedi da ako se GMO propagira, tada se populacija ne smanjuje.				
4.	Ako tajno društvo upravlja svijetom, onda postoji globalna zavjera i vlade lažu, ali nije istina da iz činjenice da tajno društvo upravlja svijetom slijedi da vlade lažu ili da se populacija smanjuje, niti da tajno društvo upravlja svijetom dovodi do zaprašivanja avionima otrovima koji uništavaju poljoprivredu.				
5.	Iz šuplje Zemlje slijede reptilijanci i iz reptilijanaca slijedi drugačija gravitacija, ali nije istina da iz šuplje Zemlje slijedi drugačija gravitacija ako i samo ako iz reptilijanaca slijedi drugačija gravitacija.				
6.	Ako zaprašivanje implicira da uništavanje poljoprivrede implicira GMO, to je isto kao da zaprašivanje i uništavanje poljoprivrede zajedno impliciraju GMO.				

2) Odgovori s **DA** ili **NE**.

Može li Teo na temelju zadanih pretpostavki tvrditi da među svim navedenim teorijama postoje zajedničke pretpostavke? _____

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 4.

U kući živi pet mačaka: Annie, Frozen, Niki, Mickey i Sunny. Kad mačka napravi nešto što nije dobro, mora za kaznu nositi kapuljaču.

Promatramo jezik predikatne logike s ograničenom domenom:

$$D = \{\text{Annie, Frozen, Niki, Mickey, Sunny}\}.$$

Koristit ćemo se sljedećim konstantama:

$$a = \text{Annie}, \quad f = \text{Frozen}, \quad n = \text{Niki}, \quad m = \text{Mickey}, \quad s = \text{Sunny}.$$

Koristit ćemo se sljedećim predikatima:

- $L(x)$: x je napravio/la nešto loše
- $K(x)$: x mora nositi kapuljaču
- $V(x)$: x je srušio/la vazuu
- $B(x)$: x je pojelo/la biljku
- $T(x)$: x je razvukao/la toaletni papir
- $S(x, y)$: x je vidio/la da je y napravio/la nešto loše

Poznato je sljedeće:

1. Sve mačke koje naprave nešto loše moraju nositi kapuljaču.
2. Tko sruši vazuu, napravio je nešto loše.
3. Tko pojede biljku, napravio je nešto loše.
4. Tko razvuče toaletni papir, napravio je nešto loše.
5. Točno jedna mačka srušila je vazuu.
6. Točno jedna mačka pojela je biljku.
7. Točno jedna mačka razvukla je toaletni papir.
8. Annie nije srušila vazuu.
9. Frozen nije pojela biljku.
10. Niki nije razvukao toaletni papir.
11. Ako je Mickey srušio vazuu, onda je Sunny pojela biljku.
12. Ako je Sunny pojela biljku, onda Annie nije razvukla toaletni papir.
13. Ili je Mickey srušio vazuu ili je Frozen pojela biljku.
14. Ako neka mačka nosi kapuljaču, onda je barem jedna mačka napravila nešto loše.
15. Sunny je vidjela svakoga tko je napravio nešto loše.
16. Nitko nije vidio samoga sebe kako radi nešto loše.

1. Na temelju zadanih tvrdnji odredi slijedi li nužno svaka od sljedećih tvrdnji.

Br.	Tvrdnja	DA / NE
1.	Ako je neka mačka srušila vazuu, onda ta mačka mora nositi kapuljaču.	
2.	Barem jedna mačka mora nositi kapuljaču.	
3.	Annie ne mora nositi kapuljaču.	
4.	Sunny nije srušila vazuu.	
5.	Frozen ne mora nositi kapuljaču.	
6.	Postoji mačka koju je Sunny vidjela da radi nešto loše.	

2. Za svaku od sljedećih formula odredi je li s obzirom na zadane tvrdnje nužna posljedica zadanih tvrdnji (P), u proturječju sa zadanim tvrdnjama (R) ili ostaje otvorena na temelju zadanih tvrdnji (O).

Br.	Formula	P / R / O
1.	$V(m)$	
2.	$B(f)$	
3.	$K(m)$	
4.	$T(a)$	
5.	$\forall x \neg S(x, x)$	
6.	$\exists x (K(x) \wedge \neg L(x))$	
7.	$\exists x (B(x) \wedge T(x))$	
8.	$\forall x (B(x) \rightarrow \neg T(x))$	

(14×3 boda = 42 boda)

Zadatak 5.

Josip i Petar upravo su se sprijateljili s Ivanom i žele saznati kada joj je rođendan. Ivana im daje popis od deset mogućih datuma:

- 15. svibnja, 16. svibnja, 19. svibnja
- 17. lipnja, 18. lipnja
- 14. srpnja, 16. srpnja
- 14. kolovoza, 15. kolovoza, 17. kolovoza

Ivana zatim Josipu kaže samo mjesec, a Petru samo dan, nakon čega se odvija ovaj razgovor:

1. Josip: “Ne znam kada je Ivanin rođendan, ali znam da ni Petar ne zna.”
2. Petar: “Isprva nisam znao kada je Ivanin rođendan, ali sada znam.”
3. Josip: “Onda i ja znam kada je Ivanin rođendan.”

Uputa: Epistemička logika klasičnoj logici dodaje operator znanja K . Na primjer:

$K_a P$: subjekt a zna da je P istinito

$\neg K_a P \wedge \neg K_a \neg P$: subjekt a ne zna je li P istinito

Upotrijebi sljedeće oznake za moguće datume:

r_1 : 15. svibnja r_2 : 16. svibnja r_3 : 19. svibnja r_4 : 17. lipnja r_5 : 18. lipnja

r_6 : 14. srpnja r_7 : 16. srpnja r_8 : 14. kolovoza r_9 : 15. kolovoza r_{10} : 17. kolovoza

Neka iskaz R_i znači: “Ivanin rođendan je datum r_i ”.

1. Zapiši preostali skup mogućih datuma nakon svake od triju izjava.

Skup mogućih datuma nakon 1. Josipove izjave:

Skup mogućih datuma nakon Petrove izjave:

Skup mogućih datuma nakon 2. Josipove izjave:

2. Napiši odgovarajuću formulu za svaku od sljedećih tvrdnji. U formulama upotrijebi samo operatore K_J i K_P , iskaze R_1, \dots, R_{10} te standardne logičke veznike.

a) Josip ne zna točan datum rođendana.

b) Josip zna da Petar ne zna točan datum rođendana.

c) Petar nakon Josipove prve izjave zna točan datum rođendana.

d) Josip nakon Petrove izjave zna točan datum rođendana.

3. Odredi kada je Ivanin rođendan.

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 6.

U nogometu se ponekad unaprijed dogovori *markiranje*: pojedini igrači jedne momčadi dobivaju zadatak da čuvaju određene protivničke igrače. U ovom zadatku promatramo jedan takav plan markiranja. Domena su svi igrači obiju momčadi.

Koristimo se sljedećim konstantama (u ovom trenutku nije važno koja oznaka označava koju poziciju na terenu - za igrače za koje će vam to biti važno, bit će navedeno kasnije u zadatku):

Momčad A:

$Agk, Alb, Alcb, Arcb, Arb, Adm1, Adm2, Alw, Aam, Arw, Ast$

Momčad B:

$Bgk, Blb, Blcb, Brcb, Brb, Blm, Bcm1, Bcm2, Brm, Bst1, Bst2$

Koristimo se sljedećim predikatima:

- $Marker(x)$: x je igrač momčadi B koji sudjeluje u markiranju
- $Key(x)$: x je ključni igrač momčadi A
- $Mark(x, y)$: igrač x čuva igrača y

Vrijede sljedeća pravila markiranja:

(R1) Markeri su sljedeći igrači:

$Blb, Blm, Blcb, Bcm1, Bcm2, Brb, Brm,$

(R2) Ključni su igrači momčadi A:

$Alw, Arw, Aam, Ast, Adm1, Adm2,$

(R3) Svaki marker čuva točno jednog ključnog igrača.

(R4) Svaki ključni igrač čuvan je od barem jednog markera.

(R5) Desno krilo Arw čuvaju točno dva igrača: Blb i Blm .

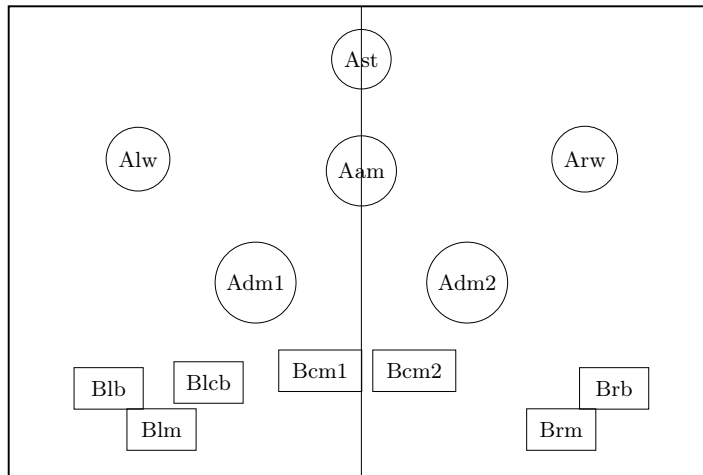
(R6) Ako Blb čuva Arw , tada $Blcb$ čuva napadača Ast :

(R7) Playmakera Aam može čuvati samo jedan od dvojice centralnih veznih, tj. samo $Bcm1$ ili $Bcm2$.

(R8) Desni bek Brb može čuvati samo jedno od dvaju krila momčadi A, tj. samo Alw ili Arw .

(R9) $Bcm2$ može čuvati samo jednog od dvojice zadnjih veznih, tj. samo $Adm1$ ili $Adm2$, ali ne može čuvati $Adm2$.

(a) Na sljedećoj skici terena povuci strelice od markera prema igračima koje čuvaju.



Napomena: svaka točno unesena strelica donosi tri boda.

(b) Za svaku od sljedećih tvrdnji odredi slijedi li iz zadanih pravila. Zaokruži **DA** ili **NE**.

- | | | |
|---|----|----|
| 1. $Mark(Brb, Alw)$ | DA | NE |
| 2. $Mark(Bcm1, Aam)$ | DA | NE |
| 3. $Mark(Brm, Adm2)$ | DA | NE |
| 4. $\exists x(Mark(x, Adm1) \wedge x = Bcm2)$ | DA | NE |
| 5. $Mark(Bcm2, Aam)$ | DA | NE |

(12×3 boda = 36 bodova)