

DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE

15.-17. travnja 2026.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA*
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD*
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA*

*Osim ako je u uputi u zadatku navedeno drugačije.

A-KATEGORIJA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		27
2.		24
3.		27
4.		24
5.		18
6.		36
UKUPNO		156

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

Zadatak 1.

Poljski zapis osmislio je logičar Jan Łukasiewicz početkom 20. stoljeća. Cilj je bio pojednostaviti zapis logičkih formula jer klasični zapis često zahtijeva mnogo zagrada. U poljskoj notaciji logički operator piše se ispred formula na koje djeluje, a redosljed simbola već sam pokazuje strukturu formule. Iako se u matematici češće upotrebljava klasični zapis sa zgradama, ideja poljskog zapisa vrlo je važna u informatici. Sličan princip primjenjuje se u analizi i prevođenju programskog koda i u nekim programskim jezicima, poput Lispa. Poljski zapis zato predstavlja dobar primjer kako ideje iz logike mogu imati važnu primjenu u računalnoj znanosti.

U poljskom zapisu upotrebljavaju se sljedeća slova:

Slovo	Operator	Značenje
N	\neg	negacija
K	\wedge	konjunkcija (i)
A	\vee	disjunkcija (ili)
C	\rightarrow	implikacija
E	\leftrightarrow	ekvivalencija

Primjeri

Infiksni zapis	Poljski zapis
$p \wedge q$	Kpq
$\neg p$	Np
$p \rightarrow q$	Cpq
$(p \vee q) \wedge r$	$KApqr$
$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	$CCpqr$

Zadatak

U nastavku je zadano devet logičkih formula u infiksnom zapisu. Prevedi ih u poljski zapis koristeći se ranije navedenim poljskim slovnim oznakama za logičke operatore.

Infiksni zapis

Poljski zapis

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

2. $((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow s$

3. $\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r))$

4. $((p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)) \leftrightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee s))$

5. $((p \rightarrow (q \wedge r)) \vee (\neg s \rightarrow t))$

6. $\neg((p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \wedge \neg s))$

7. $((p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (\neg s \vee t)) \wedge (u \rightarrow v)$

8. $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)))$

9. $((p \leftrightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)) \rightarrow (p \wedge r)$

(9×3 boda = 27 bodova)

Zadatak 2.

Međunarodni olimpijski odbor odlučio je promijeniti uvjete igranja odbojke. Od sada se odbojka igra u olimpijskom plivačkom bazenu, pa je uvedena nova verzija igre pod nazivom **Akvabojka**. Nisu ti poznata sva pravila i potezi, ali su ti poznati odnosi između dopuštenih (Px), zabranjenih (Fx) i obveznih (Ox) poteza u sportu.

Napomena: Modalni operatori P, F i O nisu predikati, već operatori nad iskazima. Ne opisuju svojstva objekata, nego normativni status iskaza, pa ih ne treba miješati s predikatima u predikatnoj logici. Modalni su operatori proširenje klasične iskazne logike te se mogu slobodno kombinirati s klasičnim logičkim veznicima.

Primjeri:

- $\neg[P(a \vee b)]$ znači “nije dopušteno da se izvrši a ili b ”.
- $\neg(Pa \wedge Pb)$ znači “nije dopušteno da se izvrši a i nije dopušteno da se izvrši b ” (nije dopušteno da se obje radnje izvrše istodobno).

Logički ekvivalent drugog primjera:

$$\neg(Pa \wedge Pb) \equiv \neg Pa \vee \neg Pb$$

Vrijede sljedeće veze (za svaki potez x):

- Ako je potez obavezan, tada je dopušten:

$$Ox \rightarrow Px$$

- Ako je potez zabranjen, tada nije dopušten:

$$Fx \rightarrow \neg Px$$

- Potez je obavezan ako i samo ako nije dopušteno da se ne izvrši:

$$Ox \leftrightarrow \neg P\neg x$$

- Potez je zabranjen ako i samo ako nije dopušten:

$$Fx \leftrightarrow \neg Px$$

Primjer zadatka

Zadana je tvrdnja: Ako je potez p obavezan, tada nije zabranjen. $Op \rightarrow \neg Fp$

Objašnjenje: Ako je neki potez obavezan, onda mora biti dopušten. Zabranjeno je upravo ono što nije dopušteno. Zato obavezan potez ne može biti nedopušten, tj. zabranjen.

Zadatak

Zadane su različite tvrdnje o potezima u Akvabojci. Za svaku tvrdnju odredi slijedi li iz navedenih pravila, odnosno je li istinita u svim slučajevima u kojima su pravila istinita.

1.	Ako je obvezno ili zabranjeno blokirati loptu objema rukama iznad mreže, tada je dopušteno blokirati loptu objema rukama iznad mreže.	DA/NE
2.	$[(Op \vee Fp) \wedge (Pp \vee \neg Pp)] \rightarrow [(Pp \vee \neg Pp) \vee (Op \wedge \neg Op)]$	DA/NE
3.	Ako je dopušteno udariti loptu glavom iznad površine vode, a zabranjeno je dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode, tada slijedi kako je dopušteno udariti loptu glavom iznad površine vode ili zabranjeno dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode.	DA/NE
4.	$\neg(Op \wedge Fp) \vee \neg(Op \rightarrow Pp) \vee (Pp \wedge \neg Pp)$	DA/NE
5.	Ako iz toga što je obvezno servirati loptu izvan bazena slijedi kako je dopušteno servirati loptu izvan bazena, tada iz toga što je dopušteno udariti je glavom slijedi kako je obvezno udariti je glavom ili je obvezno ne držati člana protivničke momčadi ispod vode dulje od tri sekunde.	DA/NE
6.	$[\neg(Op \wedge P\neg p) \vee \neg Fp] \wedge (Pp \vee \neg Pp)$	DA/NE
7.	Ako je dopušteno dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode i dopušteno je ne dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode, tada je zabranjeno dodirnuti loptu dva puta zaredom kada je jedna ruka ispod površine vode.	DA/NE
8.	$[P(a \vee b) \wedge (Fa \rightarrow \neg Pa)] \rightarrow (Pa \vee Pb)$	DA/NE

(8×3 boda = 24 boda)

Zadatak 3.

Teoretičar Teo proučava teorije zavjere u okviru svog istraživanja alternativnih modela objašnjenja stvarnosti i događaja. Cilj mu je pronaći bitne pretpostavke svake teorije te otkriti postoje li pretpostavke koje su svima zajedničke. Do sada je proučio tri teorije:

Teorija ravne Zemlje (FE)

- (a) Zemlja je ravna ploča
- (b) gravitacija ne postoji
- (c) Antarktika je ledeni zid

- $a \rightarrow c$

Ljudi gušteri (LP)

- (d) Zemlja je šuplja
- (e) u šupljini žive reptilijanci
- (f) gravitacija je u šupljini drugačija

- $d \rightarrow e$

- $e \rightarrow f$

Chemtrails (CT)

- (g) avioni nas zaprašuju otrovima
- (h) otrovi uništavaju poljoprivredu
- (i) GMO hrana se propagira
- (j) GMO smanjuje populaciju

- $g \rightarrow h$

- $h \rightarrow i$

- $i \rightarrow j$

Zajedničke postavke (ZP)

- (k) vlade i znanstvenici lažu
- (l) postoji globalna zavjera
- (m) tajno društvo upravlja svijetom

- $l \rightarrow k$

- $m \rightarrow l$

1) Ako se sve pretpostavke uzmu kao istinite, odredi jesu li sljedeći iskazi tautologije (T), zadovoljivi/ispunjivi (Z), nevaljani/oborivi (O) te kontradikcije (K). Za svaki iskaz zaokruži **sva** svojstva koja o njemu vrijede.

T = tautologija Z = zadovoljiv/ispunjiv O = oboriv/nevaljan K = kontradikcija

Br.	Iskaz	T	Z	O	K
1.	Nije slučaj da gravitacija ne postoji ako je Zemlja ravna ploča, niti da iz šuplje Zemlje slijede reptilijanci iz kojih slijedi drugačija gravitacija u šupljini, osim ako Antarktika nije ledeni zid, a avioni nas ne zaprašuju otrovima koji uništavaju poljoprivredu i propagiraju GMO hranu koja smanjuje populaciju.				
2.	Ako nije istina da iz činjenice da je Zemlja ravna ploča slijedi nepostojanje gravitacije, niti da iz Antarktike koja nije ledeni zid slijedi da gravitacija postoji, niti da iz šuplje Zemlje slijede reptilijanci iz kojih slijedi drugačija gravitacija u šupljini, niti da tajno društvo upravlja svijetom, slijedi da postoji globalna zavjera te da vlade i znanstvenici lažu, onda je Zemlja ravna ploča.				
3.	Ako nas avioni zaprašuju otrovima, tada vrijedi da se poljoprivreda uništava i propagira GMO, ali ne vrijedi da ako se GMO propagira, tada se populacija ne smanjuje.				
4.	Ako tajno društvo upravlja svijetom, onda postoji globalna zavjera i vlade lažu, ali nije istina da iz činjenice da tajno društvo upravlja svijetom slijedi da vlade lažu ili da se populacija smanjuje, niti da tajno društvo upravlja svijetom dovodi do zaprašivanja avionima otrovima koji uništavaju poljoprivredu.				
5.	Iz šuplje Zemlje slijede reptilijanci i iz reptilijanaca slijedi drugačija gravitacija, ali nije istina da iz šuplje Zemlje slijedi drugačija gravitacija ako i samo ako iz reptilijanaca slijedi drugačija gravitacija.				
6.	Ako zaprašivanje implicira da uništavanje poljoprivrede implicira GMO, to je isto kao da zaprašivanje i uništavanje poljoprivrede zajedno impliciraju GMO.				
7.	Ako tajno društvo upravlja svijetom, onda postoji globalna zavjera i vlade lažu, ali reptilijanci ne postoje, gravitacija postoji te nas avioni ne zaprašuju otrovima koji uništavaju poljoprivredu i propagiraju GMO hranu koja smanjuje populaciju.				
8.	Ako je Zemlja ravna ploča, tada vrijedi da Antarktika nije ledeni zid ako i samo ako gravitacija postoji, ali ne vrijedi da iz toga što je Antarktika ledeni zid slijedi da gravitacija ne postoji.				

2) Odgovori s **DA** ili **NE**.

Može li Teo na temelju zadanih pretpostavki tvrditi da među svim navedenim teorijama postoje zajedničke pretpostavke? _____

(9×3 boda = 27 bodova)

Zadatak 4.

Produktna neizrazita logika pripada obitelji neizrazitih (*fuzzy*) logika. U takvim logikama tvrdnje ne moraju biti samo potpuno istinite ili potpuno neistinite, nego mogu imati bilo koju istinitosnu vrijednost između 0 i 1. Ideju neizrazite logike predložio je Lotfi A. Zadeh 1965. godine. Kasnije su logičari razvili različite formalne sustave koji određuju kako se računaju istinitosne vrijednosti složenih formula. Među njima je i produktna logika, koju je sustavno proučavao Petr Hájek, a dobila je ime po tome što se konjunkcija računa kao umnožak istinitosnih vrijednosti dviju formula. Ako formula p ima vrijednost a , a formula q vrijednost b , tada formula $p \wedge q$ ima vrijednost $a \cdot b$.

Osnovna postavka:

Neka je v funkcija vrednovanja takva da za svaku atomsku formulu p vrijedi

$$v(p) \in [0, 1].$$

Neka su

$$v(p) = a, \quad v(q) = b,$$

gdje vrijedi

$$a, b \in [0, 1].$$

Konjunkcija

$$v(p \wedge q) = v(p) \cdot v(q) = ab.$$

Implikacija

$$v(p \rightarrow q) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } a \leq b, \\ \frac{b}{a}, & \text{ako je } a > b. \end{cases}$$

Negacija

Negacija se definira preko implikacije prema 0:

$$v(\neg p) = v(p \rightarrow 0) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } a = 0, \\ 0, & \text{ako je } a > 0. \end{cases}$$

Disjunkcija

$$v(p \vee q) = \max(a, b).$$

Primjer

Prikažimo kako izračunati vrijednost formule:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

za sljedeće vrijednosti:

$$v(p) = 0.8, \quad v(q) = 0.6, \quad v(r) = 0.3$$

Korak 1: Konjunkcija

$$v(p \wedge q) = v(p) \cdot v(q)$$

$$v(p \wedge q) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48$$

Korak 2: Implikacija

Budući da je

$$v(p \wedge q) = 0.48 > 0.3 = v(r),$$

koristimo se formulom

$$v(a \rightarrow b) = \frac{v(b)}{v(a)} \quad \text{ako je } a > b.$$

Dakle,

$$v((p \wedge q) \rightarrow r) = \frac{v(r)}{v(p \wedge q)}$$

$$v((p \wedge q) \rightarrow r) = \frac{0.3}{0.48} = 0.625$$

$$\boxed{v((p \wedge q) \rightarrow r) = 0.625}$$

Vrijednost formule iznosi:

$$\boxed{0.625}$$

Zadatak

Pretpostavljamo produktnu *fuzzy* logiku s istinitosnim vrijednostima u intervalu $[0, 1]$.

Za svaku od sljedećih formula odredi je li:

- **T** — tautologija (vrijednost uvijek 1)
- **A** — antitautologija (vrijednost uvijek 0)
- **N** — ni jedno ni drugo

Zaokruži odgovarajući odgovor.

Br.	Formula	T	A	N
1	$(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q \wedge (q \rightarrow p)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow r)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	$((p \wedge \neg p) \wedge (r \vee \neg r)) \wedge (q \wedge \neg q)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	$((p \wedge q) \rightarrow p) \wedge (r \vee \neg r)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6	$(p \vee q) \wedge \neg q$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7	$((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q) \wedge \neg(r \wedge \neg r)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8	$(p \vee \neg p) \wedge \neg(s \wedge \neg s)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(8×3 boda = 24 boda)

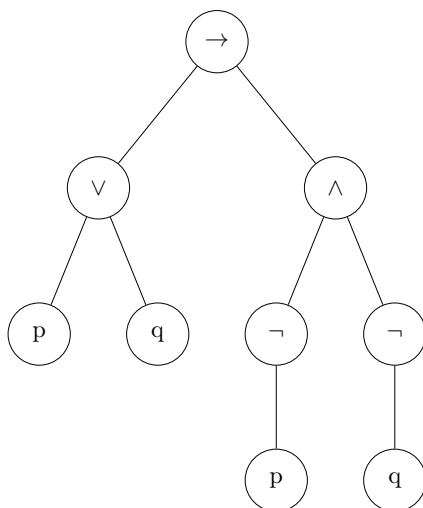
Zadatak 5.

Stablo izraza grafički je prikaz strukture nekog izraza, na primjer logičke formule. U takvu stablu kružići predstavljaju dijelove izraza. Kružići unutar stabla označavaju logičke operatore, dok kružići na njegovim krajevima predstavljaju varijable ili konstante. Na samom vrhu stabla nalazi se glavni operator cijele formule. Prednost je stabla izraza u tome što jasno prikazuje kojim se redosljedom operacije primjenjuju. Zbog toga za razumijevanje formule nisu potrebne zagrade jer se struktura izraza vidi iz samog stabla.

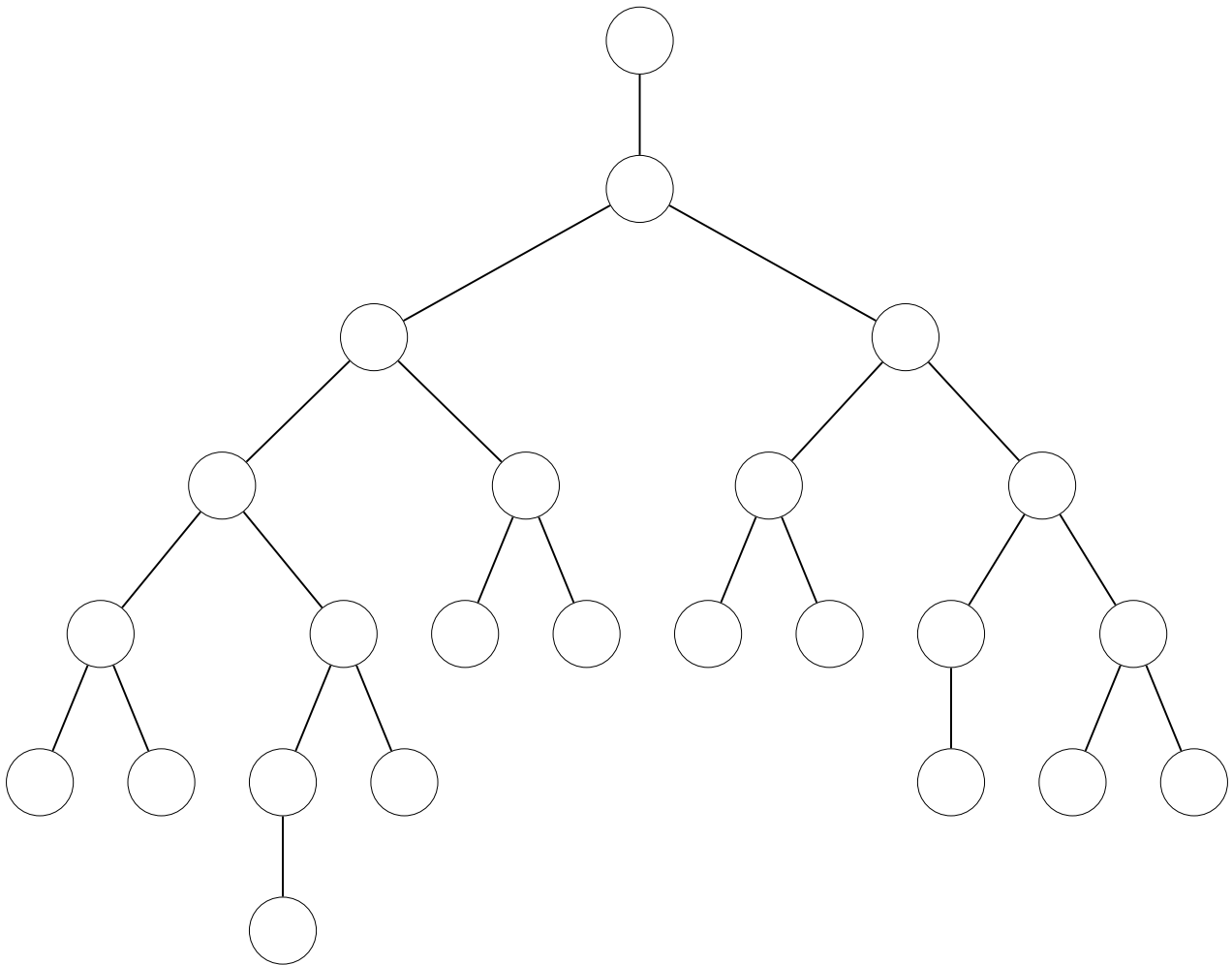
Stabla izraza upotrebljavaju se i u informatici. Kada računalo obrađuje programski kod, izrazi se često najprije pretvaraju u ovakva stabla. Na temelju njih računalo može lakše analizirati izraz, izvršiti operacije i optimizirati program. Sličan princip primjenjuje se i u sustavima baza podataka te u nekim programskim jezicima.

Primjer stabla izraza

$$(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$



(b) *NKCKCpqANrsEtuCCvwANxKyz*



Napomena o bodovanju: Svako potpuno točno ispunjeno stablo donosi šest bodova. Izostanak rješenja donosi dva boda (po stablu), a nepotpuno ili netočno rješenje donosi nula bodova. Točan infiksni zapis donosi tri boda.

(2×6 bodova + 2×3 boda = 18 bodova)

Zadatak 6.

U nogometu se ponekad unaprijed dogovori *markiranje*: pojedini igrači jedne momčadi dobivaju zadatak da čuvaju određene protivničke igrače. U ovom zadatku promatramo jedan takav plan markiranja. Domena su svi igrači obiju momčadi.

Koristimo se sljedećim konstantama (u ovom trenutku nije važno koja oznaka označava koju poziciju na terenu - za igrače za koje će vam to biti važno, bit će navedeno kasnije u zadatku):

Momčad A:

$Agk, Alb, Alcb, Arcb, Arb, Adm1, Adm2, Alw, Aam, Arw, Ast$

Momčad B:

$Bgk, Blb, Blcb, Brcb, Brb, Blm, Bcm1, Bcm2, Brm, Bst1, Bst2$

Koristimo se sljedećim predikatima:

- $Marker(x)$: x je igrač momčadi B koji sudjeluje u markiranju
- $Key(x)$: x je ključni igrač momčadi A
- $Mark(x, y)$: igrač x čuva igrača y

Vrijede sljedeća pravila markiranja:

(R1) Markeri su sljedeći igrači:

$Blb, Blm, Blcb, Bcm1, Bcm2, Brb, Brm,$

(R2) Ključni su igrači momčadi A:

$Alw, Arw, Aam, Ast, Adm1, Adm2,$

(R3) Svaki marker čuva točno jednog ključnog igrača.

(R4) Svaki ključni igrač čuvan je od barem jednog markera.

(R5) Desno krilo Arw čuvaju točno dva igrača: Blb i Blm .

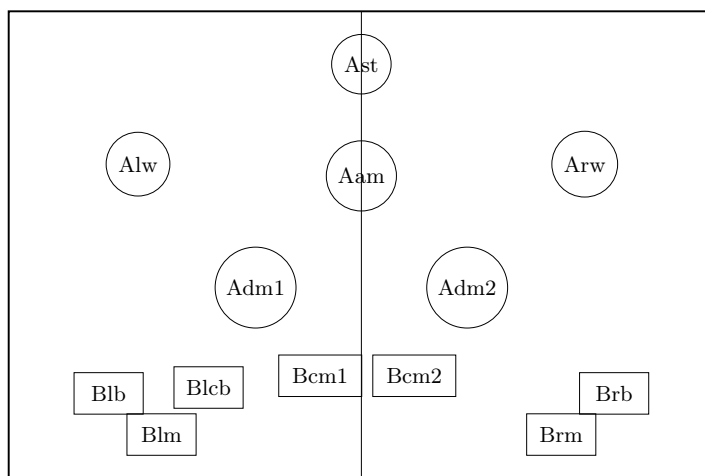
(R6) Ako Blb čuva Arw , tada $Blcb$ čuva napadača Ast :

(R7) Playmakera Aam može čuvati samo jedan od dvojice centralnih veznih, tj. samo $Bcm1$ ili $Bcm2$.

(R8) Desni bek Brb može čuvati samo jedno od dvaju krila momčadi A, tj. samo Alw ili Arw .

(R9) $Bcm2$ može čuvati samo jednog od dvojice zadnjih veznih, tj. samo $Adm1$ ili $Adm2$, ali ne može čuvati $Adm2$.

(a) Na sljedećoj skici terena povuci strelice od markera prema igračima koje čuvaju.



Napomena: svaka točno unesena strelica donosi tri boda.

(b) Za svaku od sljedećih tvrdnji odredi slijedi li iz zadanih pravila. Zaokruži **DA** ili **NE**.

- | | | |
|---|----|----|
| 1. $Mark(Brb, Alw)$ | DA | NE |
| 2. $Mark(Bcm1, Aam)$ | DA | NE |
| 3. $Mark(Brm, Adm2)$ | DA | NE |
| 4. $\exists x(Mark(x, Adm1) \wedge x = Bcm2)$ | DA | NE |
| 5. $Mark(Bcm2, Aam)$ | DA | NE |

(12×3 boda = 36 bodova)