

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Izračunaj

$$2 \cdot \frac{2027^3 + 2025^3}{2^2 + 2027 \cdot 2025} - 4052 \cdot \frac{2027^3 - 2025^3}{4052^2 - 2027 \cdot 2025}.$$

Prvo rješenje.

Faktoriziranjem brojnika dobijemo

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{2027^3 + 2025^3}{2^2 + 2027 \cdot 2025} - 4052 \cdot \frac{2027^3 - 2025^3}{4052^2 - 2027 \cdot 2025} \\ = & 2 \cdot \frac{(2027 + 2025)(2027^2 - 2027 \cdot 2025 + 2025^2)}{2^2 + 2027 \cdot 2025} - \\ & - 4052 \cdot \frac{(2027 - 2025)(2027^2 + 2027 \cdot 2025 + 2025^2)}{4052^2 - 2027 \cdot 2025}. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Primijetimo prvo da je $2 = 2027 - 2025$ i $4052 = 2027 + 2025$. Stoga je

$$\begin{aligned} = & 2 \cdot \frac{(2027 + 2025)(2027^2 - 2027 \cdot 2025 + 2025^2)}{(2027 - 2025)^2 + 2027 \cdot 2025} - \\ & - 4052 \cdot \frac{(2027 - 2025)(2027^2 + 2027 \cdot 2025 + 2025^2)}{(2027 + 2025)^2 - 2027 \cdot 2025}. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Raspisivanjem nazivnika imamo

$$\begin{aligned} = & 2 \cdot \frac{(2027 + 2025)(2027^2 - 2027 \cdot 2025 + 2025^2)}{2027^2 - 2027 \cdot 2025 + 2025^2} - \\ & - 4052 \cdot \frac{(2027 - 2025)(2027^2 + 2027 \cdot 2025 + 2025^2)}{2027^2 + 2027 \cdot 2025 + 2025^2}, \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

te konačno

$$= 2 \cdot (2027 + 2025) - 4052 \cdot (2027 - 2025) = 2 \cdot 4052 - 4052 \cdot 2 = 0 \quad 1 \text{ bod}$$

Drugo rješenje.

Brojnike možemo faktorizirati

$$2027^3 + 2025^3 = (2027 + 2025) \cdot (2027^2 - 2027 \cdot 2025 + 2025^2) \quad 1 \text{ bod}$$

$$2027^3 - 2025^3 = (2027 - 2025) \cdot (2027^2 + 2027 \cdot 2025 + 2025^2). \quad 1 \text{ bod}$$

S druge strane, nazivnike možemo zapisati kao

$$2^2 + 2027 \cdot 2025 = (2027 - 2025)^2 + 2027 \cdot 2025 = 2027^2 - 2027 \cdot 2025 + 2025^2 \quad 2 \text{ boda}$$

$$4052^2 - 2027 \cdot 2025 = (2027 + 2025)^2 - 2027 \cdot 2025 = 2027^2 + 2027 \cdot 2025 + 2025^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno, vidimo da je

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \frac{2027^3 + 2025^3}{2^2 + 2027 \cdot 2025} - 4052 \cdot \frac{2027^3 - 2025^3}{4052^2 - 2027 \cdot 2025} \\ &= 2 \cdot (2027 + 2025) - 4052 \cdot (2027 - 2025) \\ &= 2 \cdot 4052 - 4052 \cdot 2 = 0. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Treće rješenje.

Računamo

$$2027^3 + 2025^3 = 16632159308, \quad 2^2 + 2027 \cdot 2025 = 4104679. \quad 1 \text{ bod}$$

Stoga je

$$\frac{2027^3 + 2025^3}{2^2 + 2027 \cdot 2025} = \frac{16632159308}{4104679} = 4052. \quad 2 \text{ boda}$$

Slično imamo

$$2027^3 - 2025^3 = 24628058, \quad 4052^2 - 2027 \cdot 2025 = 12314029, \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno

$$\frac{2027^3 - 2025^3}{4052^2 - 2027 \cdot 2025} = \frac{24628058}{12314029} = 2. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno

$$2 \cdot \frac{2027^3 + 2025^3}{2^2 + 2027 \cdot 2025} - 4052 \cdot \frac{2027^3 - 2025^3}{4052^2 - 2027 \cdot 2025} = 2 \cdot 4052 - 4052 \cdot 2 = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: U drugom rješenju, sređivanje jednog nazivnika nosi 2 boda, neovisno o kojem se nazivniku radi, a sređivanje drugog nosi još 1 bod.

Zadatak A-1.2.

Neka je ABC pravokutni trokut s katetama duljina $|AC| = 4$ i $|BC| = 3$. Neka je D točka na hipotenuzi $\overline{AB}$ takva da trokuti ADC i BCD imaju jednake opsege. Koliko iznosi površina trokuta BCD ?

Prvo rješenje.

Odredimo prvo duljinu hipotenuze $\overline{AB}$. Prema Pitagorinom poučku ona iznosi

$$|AB| = \sqrt{|BC|^2 + |AC|^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \quad 1 \text{ bod}$$

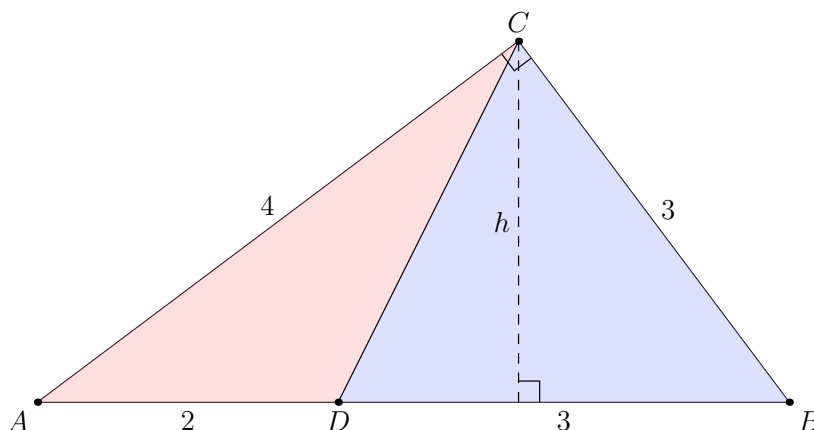
Iz uvjeta jednakosti opsega trokuta ADC i BCD dobivamo sljedeću jednakost:

$$|CA| + |AD| + |DC| = |CD| + |DB| + |BC|.$$

Nakon oduzimanja $|CD|$, uvrštavanja poznatih vrijednosti i sređivanja prethodne jednakosti dobivamo

$$1 + |AD| = |DB|. \quad 1 \text{ bod}$$

Uz jednakost $|AD| + |DB| = |AB| = 5$ dobijemo $|DB| = 3$. 1 bod



Trokuti ADC i DBC imaju zajedničku visinu h te je stoga

$$P(BCD) : P(ABC) = \frac{h \cdot |DB|}{2} : \frac{h \cdot |AB|}{2} = |DB| : |AB| = 3 : 5. \quad 2 \text{ boda}$$

Konačno je

$$P(BCD) = \frac{3}{5}P(ABC) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{18}{5}. \quad 1 \text{ bod}$$

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dobijemo da je $|AB| = 5$ i $|DB| = 3$. 3 boda

Iz dva načina za računanje površine trokuta ABC znamo da je

$$\frac{|BC| \cdot |CA|}{2} = \frac{|AB| \cdot h}{2}, \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno

$$h = \frac{12}{5}. \quad 1 \text{ bod}$$

Sada vidimo da je površina trokuta BCD jednaka

$$\frac{|BD| \cdot h}{2} = \frac{18}{5}. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak A-1.3.

Neka su a, b, c i d realni brojevi takvi da vrijedi $abcd \neq 0$ i da je

$$a = b - c, \quad b = c - d, \quad c = d - a.$$

Odredi vrijednost izraza

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Rješenje.

Budući da vrijedi

$$a = b - c = (c - d) - c = -d$$

2 boda

$$b = c - d = (d - a) - d = -a = d$$

1 bod

$$c = d - a = d - (-d) = 2d,$$

1 bod

možemo zaključiti

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = \frac{-d}{d} + \frac{d}{2d} + \frac{2d}{d} + \frac{d}{-d} = \frac{1}{2}.$$

2 boda

Napomena: Analogno ovom rješenju, bilo koja tri od dana četiri broja se mogu izraziti preko četvrtog. Za prvi takav izračun se dodjeljuje **2 boda** te se za svaki od preostala dva dodjeljuje po **1 bod**.

Zadatak A-1.4.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da je broj $n^2 + 1$ djeljiv brojem $n + 13$.

Rješenje.

Tražimo sve prirodne brojeve n takve da je $\frac{n^2 + 1}{n + 13}$ cijeli broj. Budući da je

$$\frac{n^2 + 1}{n + 13} = \frac{n^2 - 169 + 170}{n + 13} = \frac{(n + 13)(n - 13) + 170}{n + 13} = n - 13 + \frac{170}{n + 13},$$

2 boda

zaključujemo da $n + 13$ mora biti pozitivan djeljitelj broja 170.

1 bod

Pozitivni djelitelji broja 170 su i 1, 2, 5, 10, 17, 34, 85 i 170.

1 bod

Budući da je $n + 13 \geq 14$, zaključujemo da je $n + 13 \in \{17, 34, 85, 170\}$.

1 bod

Dakle, prirodni brojevi koji zadovoljavaju uvjet zadatka su 4, 21, 72 i 157.

1 bod

Zadatak A-1.5.

Spremajući se za natjecanje iz matematike, Marta je u pet dana riješila ukupno 31 zadatak. Svakog je dana riješila više zadataka nego prethodnog, a petog je dana riješila točno tri puta više zadataka nego prvog. Koliko je zadataka mogla riješiti četvrtog dana?

Rješenje.

Neka je a broj zadataka koje je Marta riješila prvi dan.

Ukupno je riješila barem $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + 3a = 7a + 6$ zadataka pa je $7a + 6 \leq 31$, odnosno $a \leq 3$. 1 bod

Budući da Marta riješila nije riješila više od $a + (3a - 3) + (3a - 2) + (3a - 1) + 3a = 13a - 6$ zadataka, zaključujemo da je $a \geq 3$. 1 bod

Dakle, Marta je riješila redom 3, x , y , z i 9 zadataka. 1 bod

Ako bi z bilo manje od 8, onda bi za ukupan broj riješenih zadataka vrijedilo

$$3 + x + y + z + 9 \leq 3 + (z - 2) + (z - 1) + z + 9 = 3z + 9 \leq 3 \cdot 7 + 9 = 30,$$

što nas dovodi do kontradikcije. 2 boda

Vidimo da je Marta redom mogla riješiti po 3, 5, 6, 8 i 9 zadataka pa zaključujemo da je Marta četvrti dan riješila 8 zadataka. 1 bod

Zadatak A-1.6.

Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje vrijedi $a^2 = b(b + 7)$.

Prvo rješenje.

Iz uvjeta zadatka slijedi

$$a^2 - b^2 = 7b,$$

odnosno

$$(a - b)(a + b) = 7b.$$

1 bod

Budući da je $a > b$, imamo $a + b > 2b$. 1 bod

Iz toga slijedi da je

$$a - b = \frac{7b}{a + b} < \frac{7b}{2b} = 3.5.$$

Dakle, $a \leq b + 3$. 2 boda

Ako je $a = b + 1$, slijedi da je $(a - b)(a + b) = 2b + 1 < 7b$, što nas dovodi do kontradikcije. 2 boda

Ako je $a = b + 2$, slijedi da je $(a - b)(a + b) = 4b + 4 = 7b$, pa je $3b = 4$, što nas dovodi do kontradikcije. 2 boda

Ako je $a = b + 3$, slijedi da je $(a - b)(a + b) = 6b + 9 = 7b$, odnosno $b = 9$ i $a = 12$. 2 boda

Zaključujemo da je jedino rješenje $(a, b) = (12, 9)$.

Drugo rješenje.

Najveći zajednički djelitelj brojeva b i $b + 7$ jednak je 1 ili 7. 2 boda

Ako je najveći zajednički djelitelj od b i $b + 7$ jednak 1, tada b i $b + 7$ moraju biti potpuni kvadrati. 2 boda

Neka je $b = m^2$ i $b + 7 = n^2$ za neke prirodne brojeve m i n . Tada je

$$7 = n^2 - m^2 = (n + m)(n - m),$$

iz čega zaključujemo $n + m = 7$, $n - m = 1$. Dakle, $m = 3$, $n = 4$, odnosno $b = 9$ i $a = 12$. 2 boda

Ako je najveći zajednički djelitelj od b i $b + 7$ jednak 7, tada postoje prirodni brojevi k i ℓ takvi da je $b = 7k^2$ i $b + 7 = 7\ell^2$. 2 boda

Tada je $7 = a^2 - b^2 = 7\ell^2 - 7k^2$, odnosno $1 = (\ell + k)(\ell - k)$. Zaključujemo da u ovom slučaju mora biti $k = 0$, $\ell = 1$ te $b = 0$, što nas dovodi do kontradikcije. 2 boda

Dakle, jedino rješenje je $(a, b) = (12, 9)$.

Treće rješenje.

Kada je $b \geq 2$, znamo da je

$$(b + 2)^2 = b^2 + 4b + 4 < b^2 + 7b < b^2 + 8b + 16 = (b + 4)^2. \quad 2 \text{ boda}$$

Kako je $b^2 + 7b = b(b + 7) = a^2$, zaključujemo da je nužno $a = b + 3$. 1 bod

Kao u prvom rješenju, jedino rješenje za koje je $a = b + 3$ je $(a, b) = (12, 9)$. 2 boda

Preostaje se uvjeriti da nema rješenja kada je $b = 1$.

Doista, u tom slučaju je $b(b + 7) = 8$, što nije potpuni kvadrat. 1 bod

Zaključujemo da je jedino rješenje $(a, b) = (12, 9)$.

Zadatak A-1.7.

U svako polje tablice 5×5 upisan je po jedan cijeli broj pri čemu se u pojedinom retku ili stupcu isti broj nalazi najviše tri puta. Razlika bilo koja dva broja u istom retku ili stupcu iznosi najviše 2. U tablici se nalazi broj 0, ali ne i broj 4. Odredi najveći mogući zbroj svih brojeva u tablici.

Rješenje.

Promotrimo brojeve koji se nalaze u istom retku kao 0. Ti brojevi su manji ili jednaki 2, te se broj 2 pojavljuje najviše tri puta. Zaključujemo da je zbroj brojeva u retku u kojem se nalazi 0 manji ili jednak $3 \cdot 2 + 1 = 7$. Analogno zaključujemo da je zbroj brojeva koji se pojavljuju u istom stupcu kao 0 manji ili jednak 7.

2 boda

Ostatak tablice sastoji se od 4 retka i 4 stupca. Budući da je 2 najveći broj koji može biti u istom retku ili stupcu s 0, zaključujemo da je 3 najveći broj koji se može nalaziti u ostatku tablice (jer se broj 4 ne nalazi u tablici).

2 boda

U tom ostatku tablice, broj 3 se u svakom retku pojavljuje najviše tri puta, pa se ukupno pojavljuje najviše dvanaest puta, a ostala četiri broja su manja ili jednaka 2. Dakle, u tom dijelu tablice je zbroj brojeva najviše $12 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 44$.

3 boda

Taj zbroj možemo postići tako da u tom dijelu tablice stavimo broj 2 na četiri polja koja su u različitim retcima i stupcima, te broj 3 na preostalih dvanaest polja.

2 boda

Dakle, ukupan zbroj brojeva u tablici je najviše $2 \cdot 7 + 44 = 58$.

1 bod

Primjer tablice opisane gornjim postupkom

2	3	3	3	2
2	3	3	2	3
2	3	2	3	3
1	2	3	3	3
0	1	2	2	2

Napomena: Primjer optimalne tablice bez objašnjenja zašto je takva tablica optimalna nosi 3 boda, a odgovor da je najveći mogući zbroj brojeva 58 nosi 1 bod.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\frac{3 - 2\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-2} - 2} \geq \sqrt{x+6}.$$

Rješenje.

Da bi izraz bio dobro definiran, mora vrijediti $x - 2 \geq 0$, $x + 6 \geq 0$ i $\sqrt{x-2} \neq 2$. Zaključujemo da sva rješenja x zadovoljavaju $x \geq 2$ i $x \neq 6$.

1 bod

Oduzimanjem $\sqrt{x+6}$ s obje strane nejednakosti i svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo

$$\frac{3 - 2\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2}\sqrt{x+6} + 2\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-2} - 2} \geq 0,$$

odnosno

$$\frac{3 - \sqrt{(x-2)(x+6)}}{\sqrt{x-2} - 2} \geq 0.$$

1 bod

Promotrimo prvo slučaj kada je $\sqrt{x-2} - 2 < 0$, odnosno $x < 6$.

Tada je nužno $3 - \sqrt{(x-2)(x+6)} \leq 0$, odnosno $3 \leq \sqrt{(x-2)(x+6)}$,

1 bod

što daje kvadratnu nejednadžbu $0 \leq x^2 + 4x - 21 = (x+7)(x-3)$, čije je rješenje $x \leq -7$ ili $x \geq 3$. Budući da je $2 \leq x < 6$, zaključujemo da je $3 \leq x < 6$.

1 bod

U slučaju kada je $\sqrt{x-2} - 2 > 0$, odnosno $x > 6$, nužno je $3 - \sqrt{(x-2)(x+6)} \geq 0$.

1 bod

Analogno prethodnom slučaju, rješavanjem ove nejednadžbe dobivamo $-7 \leq x \leq 3$, što nije kompatibilno s uvjetom $x > 6$, odnosno zaključujemo da u ovom slučaju nema rješenja.

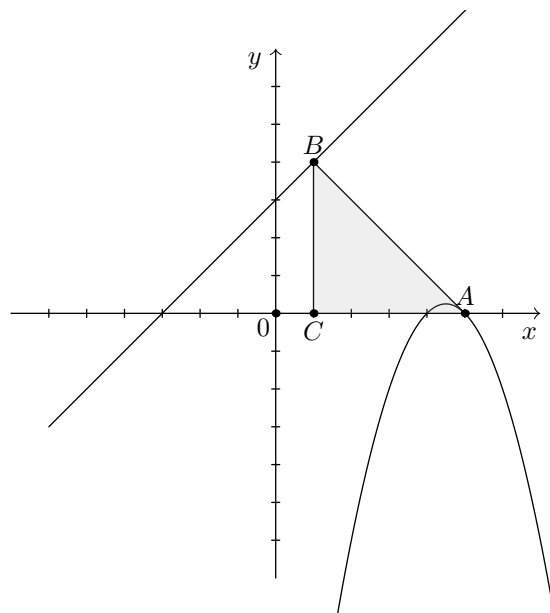
1 bod

Konačno, skup rješenja je $[3, 6)$.

Zadatak A-2.2.

Grafovi funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 9x - 20$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$ nacrtani su u koordinatnoj ravnini. Odredi najveću moguću površinu pravokutnog trokuta ABC s pravim kutom u vrhu C smještenog tako da su mu vrhovi A i C na osi apscisa, vrh A pripada grafu funkcije f , a vrh B grafu funkcije g i pritom je apscisa točke B manja od apscise točke A , a njena ordinata veća od ordinate točke A .

Prvo rješenje.



Faktorizirajući $f(x) = -(x - 5)(x - 4)$, vidimo da je $A = (4, 0)$ ili $A = (5, 0)$.

1 bod

U slučaju kada je $A = (4, 0)$, postoji $t \in \langle -3, 4 \rangle$ takav da je $C = (t, 0)$ i $B = (t, t + 3)$.

1 bod

U tom slučaju je površina jednaka

$$\frac{1}{2}(t + 3)(4 - t),$$

i postiže maksimalnu vrijednost 6.125 kada je $t = 0.5$.

1 bod

U slučaju kada je $A = (5, 0)$, postoji $t \in \langle -3, 5 \rangle$ takav da je $C = (t, 0)$ i $B = (t, t + 3)$.

1 bod

U tom slučaju je površina jednaka

$$\frac{1}{2}(t + 3)(5 - t),$$

i postiže maksimalnu vrijednost 8 kada je $t = 1$.

2 boda

Uspoređujući ova dva slučaja vidimo da je maksimalna površina jednaka 8.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je $A = (4, 0)$ ili $A = (5, 0)$.

1 bod

Kada bi se maksimalna površina postizala za $A = (4, 0)$, $C = (t, 0)$ i $B = (t, t + 3)$, gdje je $t \in \langle -3, 4 \rangle$. Tada bi trokut $A'BC$, gdje je $A' = (5, 0)$, također zadovoljavao uvjete zadatka, no imao strogo veću površinu od trokuta ABC jer je $|A'C| > |AC|$. Stoga je dovoljno promatrati slučaj kada je $A = (5, 0)$.

2 boda

Tretiranje slučaja $A = (5, 0)$ kao u prvom rješenju.

3 boda

Zadatak A-2.3.

Zadan je pravokutan trokut opsega 60 čija je visina na hipotenuzu duljine 12. Odredi duljine stranica tog trokuta.

Rješenje.

Neka su a i b duljine kateta trokuta i c duljina hipotenuze zadanog trokuta. Površinu trokuta možemo izraziti na dva načina

$$\frac{ab}{2} = P = \frac{12c}{2},$$

iz čega slijedi

$$ab = 12c. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz uvjeta zadatka za opseg trokuta slijedi

$$a + b = 60 - c.$$

Kvadriranjem dobivamo

$$a^2 + b^2 + 2ab = (60 - c)^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Korištenjem Pitagorinog poučka $a^2 + b^2 = c^2$ i uvjeta $ab = 12c$ dobivamo

$$c^2 + 24c = (60 - c)^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Rješavanjem ove jednadžbe dobijemo $c = 25$.

1 bod

Sada je $a + b = 60 - c = 35$ i $ab = 12c = 300$. Iz toga dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$b(35 - b) = 300.$$

Rješenja te jednadžbe su $b = 15$ i $b = 20$. Ako je $b = 15$, onda je $a = 20$. Ako je $b = 20$, onda je $a = 15$. U oba slučaja, duljine stranica trokuta su 15, 20, 25.

1 bod

Zadatak A-2.4.

Odredi sve realne brojeve r za koje su sva rješenja jednadžbe $x^2 - 19x + r = 0$ kubovi cijelih brojeva.

Rješenje.

Neka su $x_1 = a^3$ i $x_2 = b^3$ rješenja dane kvadratne jednadžbe, pri čemu su a i b cijeli brojevi. Korištenjem Vieteovih formula slijedi

$$\left. \begin{aligned} a^3 + b^3 &= 19, \\ a^3 b^3 &= r. \end{aligned} \right\} \quad 1 \text{ bod}$$

Faktorizacijom prve jednakosti dobivamo

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 19.$$

Slijedi da je $a + b$ djelitelj od 19, pa je $a + b$ jednak 1, -1, 19 ili -19.

1 bod

Primijetimo da je $a^2 + b^2 - ab = \frac{a^2 + b^2 + (a - b)^2}{2} \geq 0$, pa zaključujemo da je $a + 1$ jednak 1 ili 19. Prvi slučaj. Ako je $a + b = 1$, onda je $a^2 + b^2 - ab = 19$. Uvrštavanjem $b = 1 - a$ dobivamo

$$a^2 + (1 - a)^2 - a(1 - a) = 19.$$

Iz toga dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$a^2 - a - 6 = 0,$$

čija su rješenja $a = -2$ i $a = 3$. Ako je $a = -2$, onda je $b = 1 - a = 3$ i $r = a^3 b^3 = -216$. Ako je $a = 3$, onda je $b = 1 - a = -2$ i ponovno slijedi $r = a^3 b^3 = -216$.

2 boda

Drugi slučaj. Ako je $a + b = 19$, onda je $a^2 + b^2 - ab = 1$. Uvrštavanjem $b = 19 - a$ dobivamo

$$a^2 + (19 - a)^2 - a(19 - a) = 1.$$

Iz toga dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$a^2 - 19a + 120 = 0$$

koja nema realna rješenja. Zaključujemo da ovaj slučaj nije moguć.

1 bod

Dakle, jedini mogući slučaj je $a + b = 1$. U tom slučaju je $r = -216$ pa zaključujemo da je to jedini realan broj koji zadovoljava uvjet zadatka.

Zadatak A-2.5.

U svako polje pravokutne tablice upisan je po jedan realan broj tako da zbroj brojeva u svakom retku tablice iznosi 1, a zbroj brojeva u svakom stupcu tablice iznosi 2.

- (a) Može li tablica imati točno 200 polja?
- (b) Može li tablica imati točno 2000 polja?

Rješenje.

Označimo sa r broj redaka, a sa s broj stupaca tablice. Broj polja u tablici jednak je $r \cdot s$. Kako je zbroj brojeva u svakom retku jednak 1, zaključujemo da je ukupan zbroj brojeva u tablici jednak r . Slično, kako je zbroj brojeva u svakom stupcu jednak 2, zaključujemo da je ukupan zbroj brojeva u tablici jednak $2s$. Dakle, vrijedi $r = 2s$.

2 boda

Slijedi da je broj polja u tablici jednak $2s^2$.

1 bod

- (a) Ako tablica ima 200 polja, onda je $2s^2 = 200$ i slijedi $s = 10$, pa tablica treba imati 10 stupaca i 20 redaka.

Promotrimo tablicu dimenzija 20×10 kojoj je u svako polje upisan broj $\frac{1}{10}$.

1 bod

Zbroj brojeva u svakom retku je jednak $10 \cdot \frac{1}{10} = 1$, a zbroj brojeva u svakom stupcu je jednak $20 \cdot \frac{1}{10} = 2$. Zaključujemo da postoji tražena tablica s točno 200 polja.

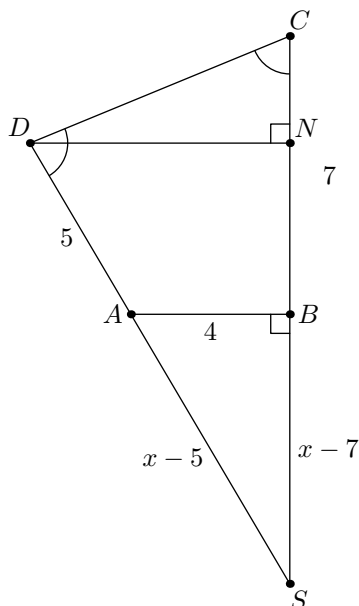
1 bod

- (b) Ako tablica ima 2000 polja, onda je $2s^2 = 2000$ i slijedi $s = 10\sqrt{10}$, što je nemoguće jer s treba biti prirodni broj. Zaključujemo da ne postoji tražena tablica s točno 2000 polja.

1 bod

Zadatak A-2.6.

Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da je $|AB| = 4$, $|BC| = 7$, $|AD| = 5$, $|\angle CBA| = 90^\circ$, te su kutovi $\angle ADC$ i $\angle DCB$ šiljasti i međusobno sukladni. Odredi duljinu dužine $\overline{CD}$.

Prvo rješenje.

Neka je točka S presjek pravaca AD i BC .

Iz uvjeta zadatka imamo da je $|\angle CDS| = |\angle SCD|$ iz čega slijedi da je trokut DCS jednakokrani, tj. $|SC| = |SD|$.

2 boda

Označimo s $x = |SC| = |SD|$. Tada je

$$|SA| = |SD| - |AD| = x - 5,$$

$$|SB| = |SC| - |BC| = x - 7.$$

1 bod

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ABS redom imamo

$$4^2 + (x - 7)^2 = (x - 5)^2$$

$$x^2 - 14x + 65 = x^2 - 10x + 25$$

$$4x = 40,$$

$$x = 10.$$

1 bod

Neka je N nožište okomice iz točke D na pravac BC .

Uočimo da su trokuti DNS i ABS slični prema K-K poučku o sličnosti trokuta jer su pravokutni i imaju zajednički kut u vrhu S .

2 boda

Iz gornje sličnosti redom računamo

$$\frac{|SN|}{|SB|} = \frac{|SD|}{|SA|} = 2,$$

iz čega slijedi da je $|SN| = 2|SB| = 6$.

1 bod

Analogno je $|DN| = 2|AB| = 8$.

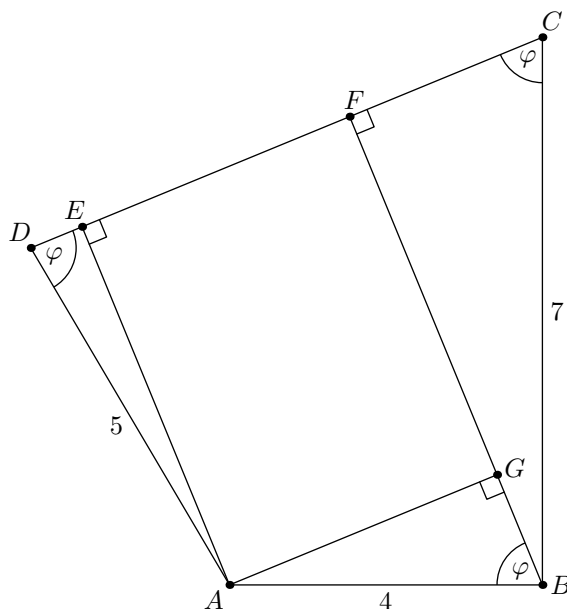
1 bod

Konačno, primjenom Pitagorinog poučka na trokutu DCN možemo izračunati duljinu dužine $\overline{CD}$.

$$|CD| = \sqrt{|CN|^2 + |DN|^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

2 boda

Drugo rješenje.



Neka su točke E i F redom nožišta okomica iz A i B na pravac DC te neka je točka G nožište okomice iz A na pravac BF .

Označimo s $\varphi = |\angle CDA| = |\angle BCD|$.

Promotrimo pravokutni trokut FCB . Imamo da je

$$|\angle FBC| = 90^\circ - |\angle BCF| = 90^\circ - \varphi.$$

Nadalje, kako je $|\angle ABC| = 90^\circ$ slijedi da je

$$|\angle ABG| = 90^\circ - |\angle FBC| = \varphi.$$

1 bod

U pravokutnim trokutima AGB , DEA i FCB redom vrijedi

$$|BG| = 4 \cos \varphi,$$

1 bod

$$|GF| = |AE| = 5 \sin \varphi,$$

1 bod

$$|BF| = 7 \sin \varphi.$$

1 bod

Duljinu dužine $\overline{BF}$ možemo zapisati kao

$$|BF| = |BG| + |GF|.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza za duljine $|BG|$, $|GF|$ i $|BF|$ slijedi

$$7 \sin \varphi = 4 \cos \varphi + 5 \sin \varphi,$$

odnosno nakon sređivanja dobijemo da je

$$\sin \varphi = 2 \cos \varphi. \quad 2 \text{ boda}$$

Kvadriranjem prethodne jednadžbe i korištenjem $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ dobivamo

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 \varphi &= 4 \cos^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Kako je $\varphi < 90^\circ$ slijedi da je $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\sin \varphi = 2 \cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 2 boda

U pravokutnim trokutima AGB , DEA i FCB redom slijedi

$$\begin{aligned} |EF| &= |AG| = 4 \sin \varphi = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \\ |DE| &= 5 \cos \varphi = \frac{5\sqrt{5}}{5}, \\ |FC| &= 7 \cos \varphi = \frac{7\sqrt{5}}{5}. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno možemo izračunati duljinu dužine $\overline{CD}$.

$$|CD| = |DE| + |AG| + |FC| = \frac{5\sqrt{5}}{5} + \frac{8\sqrt{5}}{5} + \frac{7\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak A-2.7.

Neka su x i y racionalni brojevi takvi da su $x + y$ i $x^2 + y^2$ cijeli brojevi. Jesu li nužno x i y cijeli brojevi?

Prvo rješenje.

Dokazat ćemo da su x i y nužno cijeli brojevi. Bez smanjenja općenitosti neka je $x \geq y$.

Primijetimo da je $2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2$ cijeli broj kao razlika dva cijela broja. 1 bod

Iz toga slijedi da je $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ također cijeli broj, pa je $x - y = \sqrt{d}$ za neki nenegativan cijeli broj d . 1 bod

Međutim, $x - y$ je racionalan broj, pa je $\sqrt{d}$ racionalan. Slijedi da je d cijeli broj koji je kvadrat racionalnog broja, pa je d kvadrat cijelog broja. Zaključujemo da je $x - y$ cijeli broj. 2 boda

Posljedično,

$$2x = (x + y) + (x - y) \quad \text{i} \quad 2y = (x + y) - (x - y)$$

su cijeli brojevi. 1 bod

Stoga, postoje cijeli brojevi a i b takvi da je $x = \frac{a}{2}$ i $y = \frac{b}{2}$. Kako je $x + y = \frac{a+b}{2}$ cijeli broj, slijedi da su a i b iste parnosti. 2 boda

Ako su a i b neparni, onda $2xy = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{2}$ nije cijeli broj, što nas dovodi do kontradikcije. 2 boda

Dakle, a i b su parni, pa su x i y cijeli brojevi. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su m i n cijeli brojevi takvi da je $x+y = m$ i $x^2+y^2 = n$. Uvrštavanjem $y = m-x$ u drugu jednadžbu dobivamo da je x racionalno rješenje jednadžbe

$$2x^2 - 2mx + m^2 - n = 0. \quad 2 \text{ boda}$$

S druge strane, znamo da su rješenja te jednadžbe brojevi

$$\frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 8(m^2 - n)}}{4} = \frac{m \pm \sqrt{2n - m^2}}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Stoga zaključujemo da je $\sqrt{2n - m^2}$ racionalan broj. 1 bod

Kako je $2n - m^2$ cijeli broj, zaključujemo da je i $\sqrt{2n - m^2}$ cijeli broj. 2 boda

Parnost broja $2n - m^2$ jednaka je parnosti broja m , pa je i parnost broja $\sqrt{2n - m^2}$ jednaka parnosti broja m . 2 boda

Stoga su brojevi $m + \sqrt{2n - m^2}$ i $m - \sqrt{2n - m^2}$ parni, odnosno $\frac{m + \sqrt{2n - m^2}}{2}$ i $\frac{m - \sqrt{2n - m^2}}{2}$ su cijeli brojevi. Ovime zaključujemo da je x cijeli broj, pa je i y cijeli broj. 1 bod

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve parove (x, y) pozitivnih realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{cases} y^{x^2-7x+12} = 1 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Rješenje.

Primijetimo da je $y^{x^2-7x+12} = 1$ ako i samo ako je $y = 1$ ili $x^2 - 7x + 12 = 0$.

1 bod

U slučaju $y = 1$, dobivamo rješenje $(x, y) = (5, 1)$.

2 boda

Kvadratna jednadžba $x^2 - 7x + 12 = 0$ ima rješenja $x = 3$ i $x = 4$.

2 boda

Odavde dobivamo rješenja

$$(x, y) = (3, 3) \quad \text{i} \quad (x, y) = (4, 2).$$

1 bod

Zadatak A-3.2.

Ako je $\sin x + \cos x = 1.4$, odredi $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

Prvo rješenje.

Uvrštavanjem $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ dobivamo

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

1 bod

Kvadriranjem izraza $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dobijemo

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

2 boda

Uvrštavanjem u gornju jednakost imamo

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2.$$

Izračunajmo sada vrijednost izraza $\sin^2 x \cos^2 x$.

Kvadriranjem izraza $\sin x + \cos x = 1.4 = \frac{7}{5}$ i uvrštavanjem $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dobivamo da je

$$\sin x \cos x = \frac{1.4^2 - 1}{2} = \frac{12}{25}, \quad 2 \text{ boda}$$

odakle slijedi da je

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{144}{625}.$$

Ovime konačno dobivamo da je

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{625}{144} - 2 = \frac{337}{144}. \quad 1 \text{ bod}$$

Drugo rješenje.

Uvrštavanjem $\cos x = 1.4 - \sin x$ u osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dobivamo

$$2 \sin^2 x - 2.8 \sin x + 1.96 = 1. \quad 2 \text{ boda}$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo da je $\sin x = 0.6$ ili $\sin x = 0.8$. 2 boda

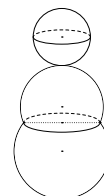
U slučaju kada je $\sin x = 0.6$, koristeći $\sin x + \cos x = 1.4$, dobivamo da je $\cos x = 0.8$, dok u slučaju $\sin x = 0.8$ dobivamo $\cos x = 0.6$. 1 bod

U oba slučaja vrijedi da je

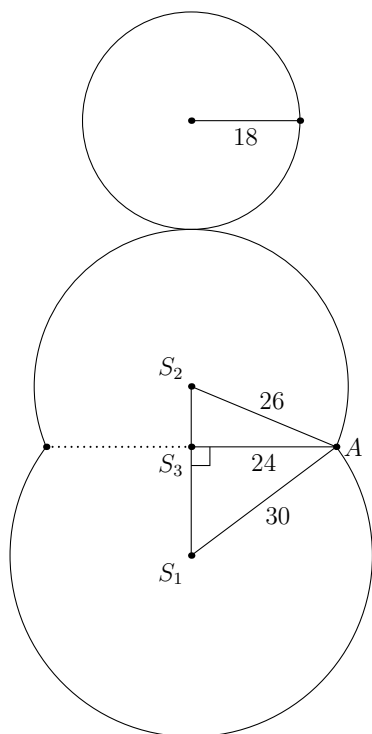
$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{9}{16} + \frac{16}{9} = \frac{337}{144}. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak A-3.3.

Lukas je odlučio napraviti snjegovića od tri kugle čiji su polumjeri 30 cm, 26 cm i 18 cm. Dvije veće kugle prerezao je tako da oba presjeka budu krugovi polumjera 24 cm, te je odbacio manje dijelove, a veće dijelove stavio jedan na drugi, spajajući ih duž tog kruga. Na kraju je na vrh položio najmanju kuglu. Kolika je ukupna visina Lukasovog snjegovića?



Rješenje.



Neka je S_1 središte najveće kugle, S_2 središte srednje kugle, te neka je S_3 središte kruga duž kojeg su one spojene. Neka je još A neka točka na rubu tog kruga. Primjenom Pitagorinog poučka na trokut S_1S_3A dobivamo da je

$$|S_1S_3| = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18. \quad 2 \text{ boda}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut S_2S_3A dobivamo da je

$$|S_2S_3| = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10 \quad 2 \text{ boda}$$

Dakle, ukupna visina snjegovića je $30 + 18 + 10 + 26 + 2 \cdot 18 = 120$ cm.

2 boda

Zadatak A-3.4.

Za realne brojeve a, b, c, d veće od 1 vrijedi $\log_b a \cdot \log_d c = 1$. Odredi vrijednost izraza

$$\frac{a^{\log_b c} \cdot b^{\log_c d} \cdot c^{\log_d a} \cdot d^{\log_a b}}{abcd}.$$

Prvo rješenje.

Iz uvjeta zadatka imamo

$$1 = \log_b a \cdot \log_d c = \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log c}{\log d}. \quad 1 \text{ bod}$$

Slijedi da je

$$1 = \log_a b \cdot \log_c d = \log_d a \cdot \log_b c = \log_a d \cdot \log_c b. \quad 1 \text{ bod}$$

Sada je

$$a^{\log_b c} = a^{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d} = a^{\log_a b \cdot \log_b d} = a^{\log_a d} = d. \quad 2 \text{ boda}$$

Analogno slijedi i $b^{\log_c d} = a, c^{\log_d a} = b$ i $d^{\log_a b} = c$.

1 bod

Konačno, dobivamo da je zadani izraz jednak 1.

1 bod

Drugo rješenje.

Iz uvjeta zadatka imamo

$$1 = \log_b a \cdot \log_d c = \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log c}{\log d}. \quad 1 \text{ bod}$$

Neka je $S = \frac{a^{\log_b c} \cdot b^{\log_c d} \cdot c^{\log_d a} \cdot d^{\log_a b}}{abcd}$. Sada je

$$\log S = \log a \log_b c + \log b \log_c d + \log c \log_d a + \log d \log_a b - \log a - \log b - \log c - \log d \quad 2 \text{ boda}$$

$$= \log a \cdot \frac{\log c}{\log b} + \log b \cdot \frac{\log d}{\log c} + \log c \cdot \frac{\log a}{\log d} + \log d \cdot \frac{\log b}{\log a}$$

$$- \log a - \log b - \log c - \log d \quad 1 \text{ bod}$$

$$= \log d + \log a + \log b + \log c - \log a - \log b - \log c - \log d \quad 1 \text{ bod}$$

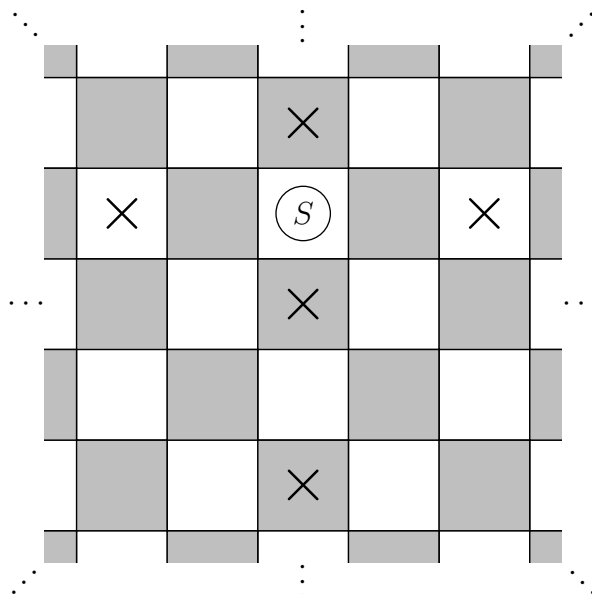
$$= 0.$$

Konačno, $S = 1$. 1 bod

Zadatak A-3.5.

Polja pravokutne ploče s 2026 redaka i 100 stupaca obojena su naizmjenice crno i bijelo, kao na šahovskoj ploči. Skakavac koji se nalazi na nekom polju ploče može skočiti na bilo koje polje iste boje u istom retku, ili bilo koje polje različite boje u istom stupcu. Koliko se najviše skakavaca može rasporediti na toj ploči tako da niti jedan skakavac ne može skočiti na polje na kojem se već nalazi neki drugi skakavac?

Rješenje.



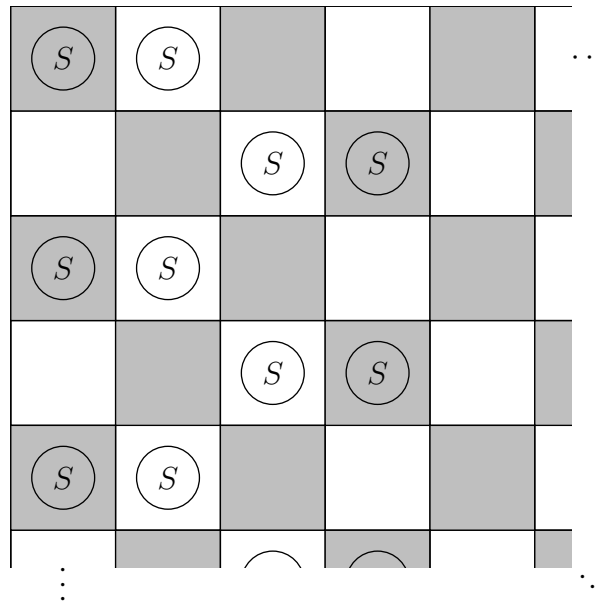
U svakom retku mogu se nalaziti najviše dva skakavca. Ako bi se u nekom retku nalazila tri skakavca, dva bi bila u poljima iste boje, stoga bi neki skakavac mogao

skočiti na polje iste boje na kojem se već nalazi drugi skakavac. Stoga na ploči ne može biti više od $2 \cdot 2026$ skakavaca.

3 boda

Pokažimo da je moguće postići da se na ploči nalazi toliko skakavaca. Označimo retke redom brojevima od 1 do 2026, te pretpostavimo da se u svim neparnim retcima nalaze po dva skakavca u prva dva polja, te da se u parnim retcima nalaze po dva skakavca u trećem i četvrtom polju.

3 boda



Dakle, moguće je postaviti $2 \cdot 2026 = 5052$ skakavaca na ploču, i to je najviše što ih se može postaviti.

Zadatak A-3.6.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da je umnožak prvih n prirodnih brojeva djeljiv zbrojem prvih n prirodnih brojeva.

Rješenje.

Označimo sa $n!$ umnožak prvih n prirodnih brojeva.

Ako je $n \geq 3$ neparan broj, zbroj prvih n prirodnih brojeva je umnožak prirodnih brojeva n i $\frac{n+1}{2}$.

Budući da je $\frac{n+1}{2} < n$, slijedi da $\frac{1}{2}(n+1)$ dijeli $(n-1)!$, odnosno $n \cdot \frac{n+1}{2}$ dijeli $n!$. 2 boda

Za $n = 1$, $n! = 1$ je djeljiv s $\frac{n(n+1)}{2} = 1$. 1 bod

Tvrdnja vrijedi za sve neparne prirodne brojeve n .

Pretpostavimo da je n paran broj.

Zbroj prvih n prirodnih brojeva je umnožak prirodnih brojeva $\frac{n}{2}$ i $n+1$.

Ako je $n+1$ složen broj, onda vrijedi $n+1 = p^2$ za prost broj $p \geq 3$ ili $n+1 = a \cdot b$, gdje je $1 < a < b < n$. 2 boda

Prvi slučaj. Neka je $n + 1 = p^2$ za prost broj p .

Budući da su brojevi n i p relativno prosti, brojevi p , $2p$ i $\frac{n}{2}$ međusobno su različiti i manji od n , pa $p \cdot 2p \cdot \frac{n}{2}$ dijeli $n!$. Slijedi da $\frac{n}{2} \cdot p^2 = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$ dijeli $n!$. 2 boda

Drugi slučaj. Neka je $n + 1 = a \cdot b$ za $1 < a < b < n$.

Budući da su brojevi $\frac{n}{2}$ i $n + 1$ relativno prosti, brojevi a , b i $\frac{n}{2}$ međusobno su različiti i manji od n , pa $\frac{n}{2} \cdot a \cdot b$ dijeli $n!$. 2 boda

Treći slučaj. Neka je $n + 1 = p$ za neki neparan prost broj p .

Tada p dijeli $\frac{n(n + 1)}{2}$, ali p ne dijeli $n!$. 1 bod

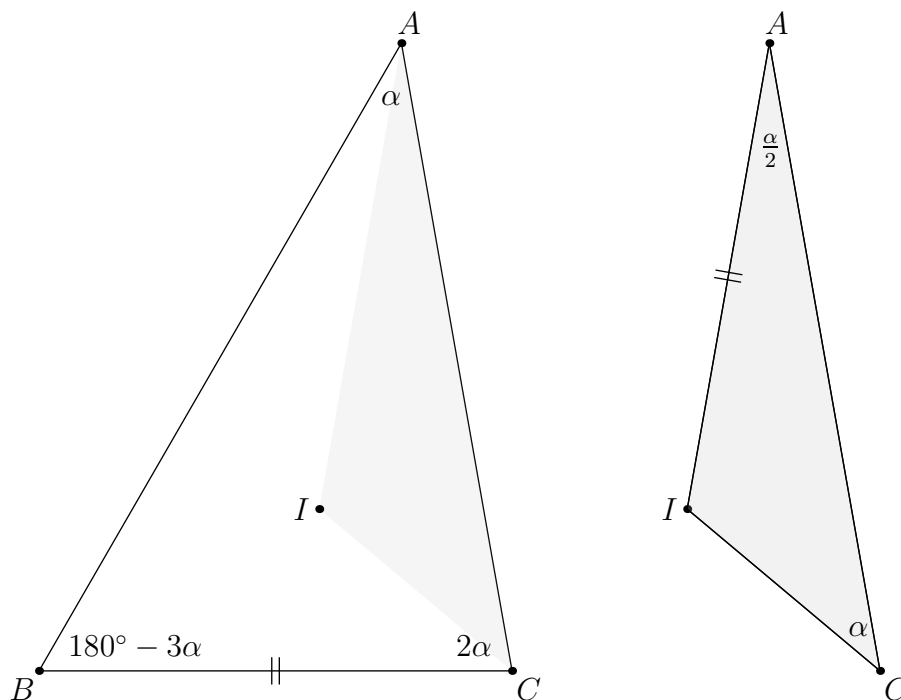
Rješenje su svi prirodni brojevi koji nisu oblika $p - 1$, gdje je p neparan prost broj.

Zadatak A-3.7.

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC . Ako vrijedi $|\angle ACB| = 2|\angle BAC|$ i $|AI| = |BC|$, odredi kutove trokuta ABC .

Prvo rješenje.

Označimo $\alpha = |\angle BAC|$. Tada je $|\angle ACB| = 2\alpha$ te $|\angle CBA| = 180^\circ - 3\alpha$.



Primjenom poučka o sinusima na trokut ABC dobijemo

$$\frac{|BC|}{|CA|} = \frac{\sin \alpha}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha}. \quad 2 \text{ boda}$$

Primjenom poučka o sinusima na trokut AIC dobijemo

$$\frac{|AI|}{|CA|} = \frac{\sin \angle ACI}{\sin \angle CIA} = \frac{\sin \alpha}{\sin(180^\circ - \frac{3\alpha}{2})} = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}}. \quad 2 \text{ boda}$$

Budući da je $|BC| = |AI|$, izjednačavanjem prethodne dvije jednakosti dobijemo $\sin 3\alpha = \sin \frac{3\alpha}{2}$.

2 boda

S druge strane, $\sin 3\alpha = 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$, pa zaključujemo da je $\cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

2 boda

Slijedi da je $\frac{3\alpha}{2} = 60^\circ$, odnosno $\alpha = 40^\circ$.

1 bod

Konačno, $|\angle ACB| = 80^\circ$ i $|\angle CBA| = 60^\circ$.

1 bod

Drugo rješenje.

Označimo $\alpha = |\angle BAC|$ i uvedimo točku D takvu da je $ABCD$ paralelogram.

Sada vidimo da je $|\angle CAD| = |\angle ACB| = 2\alpha$ i $|\angle DCA| = |\angle BAC| = \alpha$.

Uočimo da je $|\angle DCA| = \alpha = |\angle ACI|$, odnosno da je A na simetrali kuta $|\angle DCI|$.

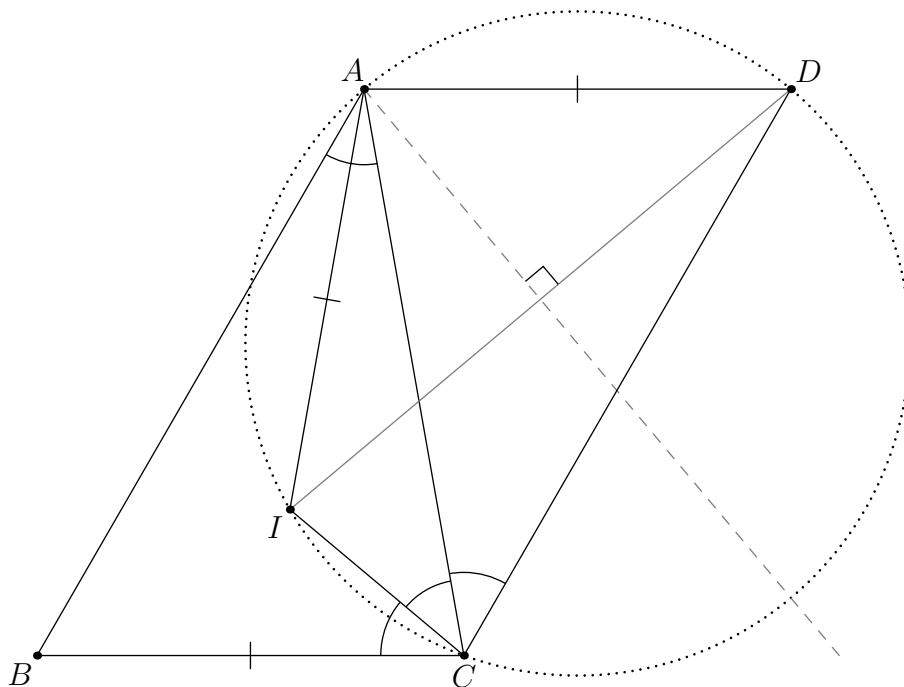
2 boda

Točka A je na simetrali dužine $\overline{DI}$ jer je $|AD| = |BC| = |AI|$.

2 boda

Kako je točka A na simetrali kuta $\angle DCI$ i simetrali dužine $\overline{DI}$, zaključujemo da je A na opisanoj kružnici trokuta CDI .

3 boda



Iz tetivnosti četverokuta $CDAI$ imamo $180^\circ = |\angle IAD| + |\angle DCI| = 4.5\alpha$, odnosno $\alpha = 40^\circ$.

2 boda

Konačno, $|\angle ACB| = 80^\circ$ i $|\angle CBA| = 60^\circ$.

1 bod

Napomena: Nije potrebno dokazivati tvrdnju da se simetrala kuta i simetrala nasuprotne stranice trokuta sijeku na njegovoj opisanoj kružnici.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak A-4.1.

Dokaži da je za svaki prirodan broj n broj

$$\frac{(2 + \sqrt{2})^n - (2 - \sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}$$

također prirodan.

Prvo rješenje.

Po binomnom poučku vrijedi

$$(2 + \sqrt{2})^n = 2^n + \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} \cdot \sqrt{2} + \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2} \cdot 2 + \dots + (\sqrt{2})^n, \quad 2 \text{ boda}$$

$$(2 - \sqrt{2})^n = 2^n - \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} \cdot \sqrt{2} + \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2} \cdot 2 - \dots + (-1)^n \cdot (\sqrt{2})^n. \quad 2 \text{ boda}$$

Stoga je

$$\frac{(2 + \sqrt{2})^n - (2 - \sqrt{2})^n}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \left(\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{3} \cdot 2^{n-2} + \binom{n}{5} \cdot 2^{n-3} + \dots \right),$$

što je prirodan broj.

2 boda

Drugo rješenje.

Uvedimo oznake $a_n = (2 + \sqrt{2})^n$, $b_n = (2 - \sqrt{2})^n$. Matematičkom indukcijom dokazat ćemo da su brojevi $a_n + b_n$ i $\frac{a_n - b_n}{\sqrt{2}}$ prirodni za svaki prirodni broj n .

1 bod

Baza indukcije $n = 1$ vrijedi jer je $a_1 + b_1 = 4$ i $\frac{a_1 - b_1}{\sqrt{2}} = 2$.

1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n . Tada je

$$a_{n+1} + b_{n+1} = (2 + \sqrt{2}) \cdot a_n + (2 - \sqrt{2}) \cdot b_n = 2(a_n + b_n) + 2 \cdot \frac{a_n - b_n}{\sqrt{2}}$$

što je prirodan broj po pretpostavci indukcije.

2 boda

Slično je

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{\sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2}) \cdot a_n - (2 - \sqrt{2}) \cdot b_n}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{a_n - b_n}{\sqrt{2}} + (a_n + b_n)$$

također prirodan broj po pretpostavci indukcije. Time je tvrdnja dokazana.

2 boda

Treće rješenje.

Neka je $a = 2 + \sqrt{2}$, $b = 2 - \sqrt{2}$. Primijetimo prvo da vrijedi $a + b = 4$, $ab = 2$.

1 bod

Pronađimo rekursivnu relaciju za broj $c_n := \frac{a^n - b^n}{\sqrt{2}}$. Budući da je

$$(a^n - b^n)(a + b) = a^{n+1} - b^{n+1} + ab(a^{n-1} - b^{n-1}),$$

2 boda

dobivamo

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{\sqrt{2}} = 2 \frac{a^n - b^n}{\sqrt{2}} + \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt{2}},$$

odnosno

$$c_{n+1} = 2c_n + c_{n-1}$$

1 bod

za svaki prirodni broj n .

Kako je $c_0 = \frac{a^0 - b^0}{\sqrt{2}} = 0$ i $c_1 = \frac{a - b}{\sqrt{2}} = 2$, iz gornje relacije induktivno slijedi da je

broj $c_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{2}}$ prirodan za svaki prirodni broj n .

2 boda

Zadatak A-4.2.

Mjera šiljastog kuta jednakokračnog trapeza iznosi 75° , a duljine osnovica odnose se kao $2 : 1$. Ako je duljina kraka tog trapeza 5, kolika mu je površina?

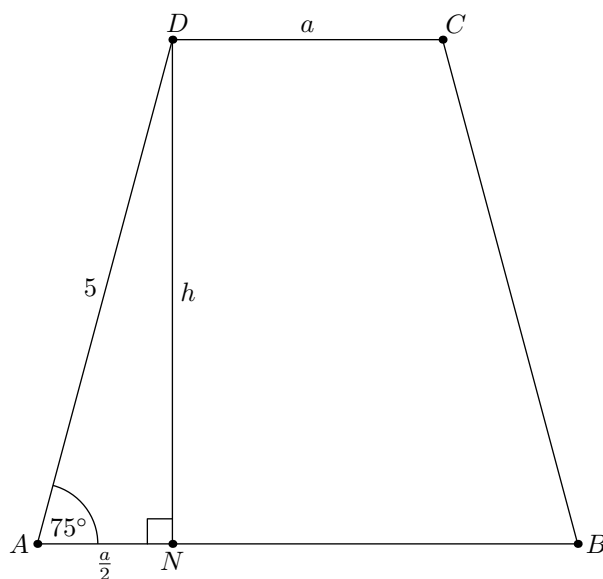
Prvo rješenje.

Neka je $a = |CD|$ i označimo duljinu visinu trapeza s h .

Površina trapeza je jednaka $\frac{(a + 2a)h}{2} = \frac{3ah}{2}$.

1 bod

Nacrtajmo visinu iz vrha D na AB i nožište označimo s N .



U pravokutnom trokutu AND imamo kutove $\sphericalangle DAN = 75^\circ$ i $\sphericalangle ADN = 15^\circ$, te je $|AN| = \frac{a}{2}$ i $|DN| = h$. Slijedi da je $a = 10 \sin 15^\circ$ i $h = 5 \cos 15^\circ$.

1 bod

Prema adicijskim formulama vrijedi

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

1 bod

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

1 bod

Površina trapeza je stoga jednaka $\frac{3ah}{2} = \frac{75}{4}$.

2 boda

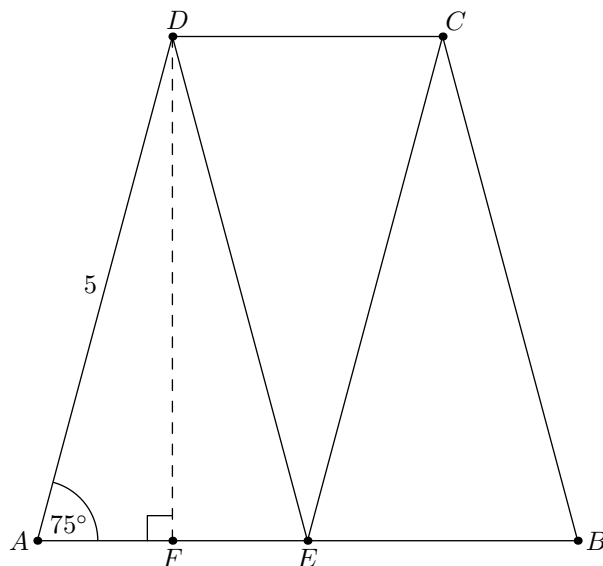
Napomena: Posljednja 4 boda moguće je ostvariti i na sljedeći način.

Vrijedi $a \cdot h = 10 \sin 15^\circ \cdot 5 \cos 15^\circ = 25 \sin 30^\circ$, što nosi 2 boda. Budući da je $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, što nosi 1 bod, slijedi da je površina trapeza $\frac{75}{4}$, što nosi također 1 bod.

Drugo rješenje.

Neka je $ABCD$ trapez takav da je osnovica $\overline{AB}$ dvostruko duža od osnovice $\overline{CD}$. Također, neka je E polovište osnovice $\overline{AB}$. Tada su trokuti AED , CED i EBC jednakokračni i sukladni.

1 bod



Izračunajmo površinu jednakokračnog trokuta AED s kutovima $75^\circ, 75^\circ, 30^\circ$ i krakom duljine 5. Neka je F polovište osnovice $\overline{AE}$. Tada je $\overline{DF}$ visina trokuta i vrijedi

$$|DF| = |AD| \cdot \cos 15^\circ, \quad |AF| = |EF| = |AD| \cdot \sin 15^\circ.$$

1 bod

Stoga površina trokuta AED iznosi $|AF| \cdot |DF| = 5 \sin 15^\circ \cdot 5 \cos 15^\circ = \frac{25}{2} \sin 30^\circ$.

2 boda

Budući da je $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, površina trokuta AED iznosi $\frac{25}{4}$,

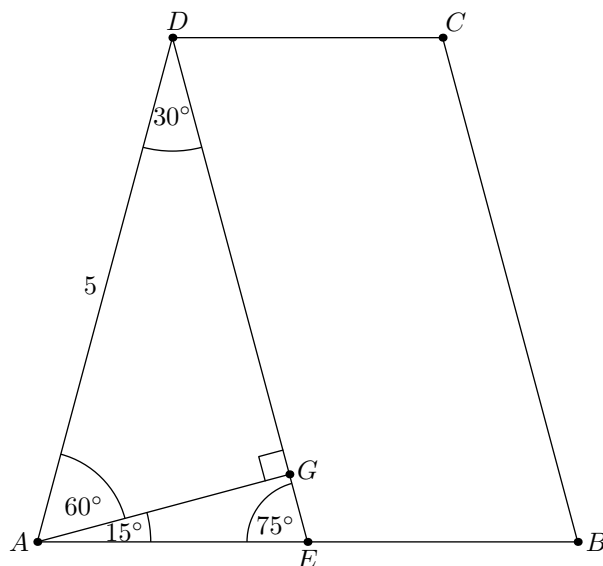
1 bod

pa je površina trapeza jednaka $\frac{75}{4}$.

1 bod

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je potrebno izračunati površinu trokuta AED . 1 bod



Nacrtajmo visinu iz A na $\overline{DE}$ s nožištem G . Tada je $|AG| = |AD| \cdot \sin 30^\circ$, 2 boda
pa je površina trokuta AED jednaka

$$\frac{|AG| \cdot |DE|}{2} = \frac{5 \cdot 5 \sin 30^\circ}{2} = \frac{25}{4}. \quad 2 \text{ boda}$$

Stoga je površina trapeza jednaka $\frac{75}{4}$. 1 bod

Napomena: Površinu trapeza moguće je odrediti i računanjem površine trokuta ABT , gdje je T presjek pravaca AD i BC . Računanje površine trokuta ABT vrijedi 4 boda.

Zadatak A-4.3.

Neka je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva takav da je $a_1 = 1$ i $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da je $a_n \geq \frac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Prvo rješenje.

Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza $n = 1$ očito vrijedi jer je $a_1 = 1$. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n .

Ako je $0 < a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$, tada je $a_n = a_{n+1}^2 + a_{n+1} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$. 2 boda

Također, vrijedi $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$ jer je $(n+1)^2 = n(n+2) + 1 > n(n+2)$. 2 boda

Dobili smo kontradikciju, pa mora vrijediti $a_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$, čime je korak indukcije dokazan. 1 bod

Drugo rješenje.

Tvrđnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza $n = 1$ očito vrijedi jer je $a_1 = 1$.

1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n .

Vrijedi da je $a_{n+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a_n}}{2}$.

Kako su svi članovi niza pozitivni, mora vrijediti $a_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a_n}}{2}$.

1 bod

Kako je $a_n \geq \frac{1}{n}$ po pretpostavci indukcije, dobivamo da je $a_{n+1} \geq \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1}{2}$.

1 bod

Pokažimo da je $\frac{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1}{2} \geq \frac{1}{n+1}$.

Ta nejednakost je, nakon sređivanja i kvadriranja, ekvivalentna s tvrdnjom

$$1 + \frac{4}{n} \geq \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^2.$$

Ta tvrdnja vrijedi jer je

$$\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^2 = 1 + \frac{4}{n+1} + \frac{4}{(n+1)^2} = 1 + \frac{4(n+2)}{(n+1)^2} < 1 + \frac{4}{n}.$$

2 boda

Sada vidimo da je $a_{n+1} \geq \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} - 1}{2} \geq \frac{1}{n+1}$, čime je dokazan korak indukcije.

1 bod

Zadatak A-4.4.

Vita i Lovro naizmjenice bacaju igraću kockicu (na čijim su stranama brojevi od 1 do 6). Svaki od njih zbraja brojeve koje dobije bacanjem kockice. Vita baca prva. Igra završava Vitinom pobjedom ako njezin zbroj dosegne 5 (tj. bude 5 ili više), a Lovrinom pobjedom ako njegov zbroj dosegne 4. Pokaži da je vjerojatnost da Vita pobijedi veća od 0.5.

Rješenje.

Pokažimo da je vjerojatnost da Vita pobijedi u najviše dva bacanja veća od 0.5.

Vita pobjeđuje u prvom bacanju ako dobije 5 ili 6, što se događa s vjerojatnošću $\frac{1}{3}$.

1 bod

U preostala četiri slučaja da bi Vita pobijedila Lovro mora dobiti manje od 4 u svom prvom bacanju, što se događa s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$.

1 bod

Svaki od tih slučajeva se događa s vjerojatnošću $\frac{1}{6}$, ali Vita u svom drugom bacanju ima različite vjerojatnosti za pobjedu, ovisno o broju koji je dobila u prvom bacanju, što prikazujemo tablicom.

Prvo bacanje	Minimalan broj u drugom bacanju	Vjerojatnost
1	4	$\frac{1}{2}$
2	3	$\frac{2}{3}$
3	2	$\frac{5}{6}$
4	1	1

2 boda

Vjerojatnost Vitine pobjede već u prva dva bacanja iznosi

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} + 1 \right) = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}.$$

2 boda

Zadatak A-4.5.

Odredi znamenke $a, b, c \neq 0$ takve da brojevi a , $\overline{ba}$ i $\overline{cba}$ budu uzastopni članovi nekog geometrijskog niza.

Rješenje.

Zapišimo brojeve pomoću dekadskih jedinica:

$$\overline{ba} = 10b + a,$$

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

Prema uvjetu zadatka vrijedi

$$(10b + a)^2 = a(100c + 10b + a), \quad 1 \text{ bod}$$

što se sređivanjem svede na

$$ab = 10(ac - b^2).$$

Odavde slijedi da 10 dijeli ab pa je jedna od znamenaka a i b jednaka 5. 1 bod

Prvi slučaj: $b = 5$.

Budući da je ab djeljiv s 10, a je paran, odnosno $a = 2k$, $1 \leq k \leq 4$. Dobivamo da je $10k = 10(2kc - 25)$, odnosno $25 = k(2c - 1)$. 1 bod

Budući da k nije djeljiv s 5, broj $2c - 1$ mora biti djeljiv s 25, ali to nije moguće jer je $0 < 2c - 1 < 18$. Stoga ovaj slučaj nema rješenja. 1 bod

Drugi slučaj: $a = 5$.

Slično kao u prethodnom slučaju zaključujemo da je b paran, odnosno da je $b = 2\ell$, $1 \leq \ell \leq 4$. Slijedi da je $10\ell = 10(5c - 4\ell^2)$, odnosno $\ell(4\ell + 1) = 5c$. 1 bod

Budući da ℓ nije djeljiv s 5, broj $4\ell + 1$ mora biti djeljiv s 5. Stoga je $\ell = 1$, $b = 2$ i $c = 1$. Dakle, jedino rješenje je $a = 5, b = 2, c = 1$. 1 bod

Zadatak A-4.6.

Na koliko je načina moguće svako od šest polja u nizu obojati jednom od tri boje (crvenom, bijelom ili plavom) tako da ne postoje tri uzastopna polja obojena trima različitim bojama?

Prvo rješenje.

Za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definirajmo skupove

$$A_i = \{\text{bojanja u kojima su polja } i, i+1, i+2 \text{ obojana s 3 različite boje.}\}$$

Zanima nas koliko elemenata ima skup $A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c$. 1 bod

Ukupan broj svih mogućih bojanja polja u tri boje je 3^6 . Po formuli uključivanja-isključivanja vrijedi

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c| = 3^6 - \sum_{i=1}^4 |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \quad 1 \text{ bod}$$

Treba izračunati koliko pojedini skup u formuli ima elemenata.

Svaki skup A_i ima $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3^3$ elemenata jer imamo 3 mogućnosti za boju polja i , 2 za boju polja $i+1$ i preostala boja ide na polje $i+2$. Preostala 3 polja možemo obojati u bilo koju boju. 1 bod

Za $i \in \{1, 2, 3\}$ skupovi $A_i \cap A_{i+1}$ imaju po $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3^2$ elemenata jer imamo 3 mogućnosti za boju polja i , 2 za boju polja $i+1$ i preostala boja ide na polje $i+2$. Polja $i, i+3$ moraju biti obojana istom bojom, a preostala 2 polja možemo obojati u bilo koju boju. 1 bod

Skupovi $A_1 \cap A_3$, $A_2 \cap A_4$ imaju po $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ elemenata jer imamo $3 \cdot 2 \cdot 1$ mogućnosti za boje prva 3 polja, četvrto polje ne smije imati istu boju kao treće polje i time je boja petog polja jednoznačno određena. Preostalo šesto polje možemo obojati u bilo koju boju. 1 bod

Skup $A_1 \cap A_4$ ima $6 \cdot 6$ elemenata jer imamo 6 mogućnosti za boje prva 3 polja i 6 mogućnosti za boje zadnja 3 polja. 1 bod

Skupovi $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ i $A_2 \cap A_3 \cap A_4$ imaju po $6 \cdot 3$ elemenata jer imamo 6 mogućnosti za boje prva 3 polja čime su boje četvrtog i petog polja jednoznačno određene. Preostalo šesto polje možemo obojati u bilo koju boju. 1 bod

Skupovi $A_1 \cap A_2 \cap A_4$ i $A_1 \cap A_3 \cap A_4$ imaju po $6 \cdot 2$ elemenata jer imamo 6 mogućnosti za boje prva 3 polja čime je boja četvrtog polja jednoznačno određena, a za zadnja 2 polja imamo 2 mogućnosti (kao za skupove $A_1 \cap A_3$, $A_2 \cap A_4$). 1 bod

Skup $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ ima 6 elemenata jer polja $i, i+3$ moraju biti iste boje za $i \in \{1, 2, 3\}$. 1 bod

Dakle, broj traženih bojanja iznosi

$$3^6 - 4 \cdot 6 \cdot 3^3 + 3 \cdot 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot 2 + 6 = 297. \quad 1 \text{ bod}$$

Drugo rješenje.

Svako bojanje niza s tri boje tako da ne postoje tri uzastopna polja obojena trima različitim bojama ćemo zvati *dobro*. Ako su zadnja dva polja iste boje, reći ćemo da je bojanje *tipa 1*, a ako su zadnja dva polja različite boje, reći ćemo da je bojanje *tipa 2*.

Neka je a_n broj dobrih bojanja n polja tipa 1 i b_n broj dobrih bojanja n polja tipa 2. Zanima nas koliko je $a_6 + b_6$.

1 bod

Odredimo rekursivne relacije za a_n i b_n . Prvo, vrijedi $a_{n+1} = a_n + b_n$. Naime, kako su polja n , $n + 1$ iste boje, svako dobro bojanje $n + 1$ polja dolazi od jedinstvenog dobrog bojanja n polja.

4 boda

Promotrimo sada dobro bojanje $n + 1$ polja tipa 2. Ako su polja $n - 1$, n iste boje, tada polje $n + 1$ može biti obojano u 2 boje. Ako su polja $n - 1$, n različite boje, tada polje $n + 1$ mora biti obojano kao i $n - 1$. Stoga je $b_{n+1} = 2a_n + b_n$.

4 boda

Kako je $a_2 = 3$ i $b_2 = 6$, uz ove relacije dobivamo da je $a_6 = 123$, $b_6 = 174$. Stoga je broj dobrih bojanja jednak $a_6 + b_6 = 297$.

1 bod

Zadatak A-4.7.

Odredi najveću moguću vrijednost realnog dijela kompleksnog broja

$$(10 + 14i)z + \frac{8 - 8i}{z}$$

ako je z kompleksan broj takav da je $|z| = 2$.

Prvo rješenje.

Primijetimo prvo da je $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{4}$.

Zapišemo li $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, dobijemo

$$\begin{aligned}(10 + 14i)z + \frac{8 - 8i}{z} &= (10 + 14i)(x + iy) + (2 - 2i)(x - iy) \\ &= 12x - 16y + i(12x + 8y).\end{aligned}$$

1 bod

Stoga je traženi realni dio jednak

$$12x - 16y.$$

1 bod

Kako je $|z| = 2$, postoji realan broj t takav da je $x = 2 \cos(t)$ i $y = 2 \sin(t)$.

1 bod

Neka $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ broj takav da je $\cos(\varphi) = \frac{3}{5}$. Tada je $\sin(\varphi) = \frac{4}{5}$.

Sada je

$$\begin{aligned}12x - 16y &= \left(20 \cdot \frac{3}{5} \cdot 2 \cos t - 20 \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 \sin t\right) \\ &= 40 (\cos \varphi \cdot \cos t - \sin \varphi \cdot \sin t) = 40 \cos(\varphi + t)\end{aligned}$$

3 boda

Kako je $\cos(s) \leq 1$ za svaki $s \in \mathbb{R}$, slijedi da je traženi izraz manji ili jednak 40.

2 boda

Za $x = \frac{6}{5}$ i $y = -\frac{8}{5}$ (odnosno $t = -\varphi$) vidimo da se ova vrijednost zaista i postiže.

2 boda

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju želimo odrediti najveću moguću vrijednost izraza $12x - 16y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 4$.

2 boda

Koristit ćemo da za sve realne brojeve a, b, x, y vrijedi Cauchy-Schwarz nejednakost

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) \geq (ax + by)^2$$

uz jednakost ako i samo ako $ay = bx$.

Ako stavimo $a = 12$ i $b = -16$, dobivamo

$$1600 = (x^2 + y^2)(12^2 + 16^2) \geq (12x - 16y)^2$$

pa je $12x - 16y \leq 40$.

6 bodova

Jednakost se postiže ako i samo ako je $12y + 16x = 0$, odnosno $y = -\frac{4}{3}x$. Taj uvjet i

uvjet $x^2 + y^2 = 4$ zadovoljava, na primjer, $x = \frac{6}{5}$, $y = -\frac{8}{5}$.

2 boda

Napomena: U drugom rješenju nejednakost $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) \geq (ax + by)^2$ se može dokazati raspisivanjem jer je ekvivalentna s $(ay - bx)^2 \geq 0$ ili pozivanjem na neku od poznatih nejednakosti (AG ili Cauchy-Schwarz). Međutim, za potpun broj bodova na ovome zadatku tu tvrdnju nije nužno dokazivati.