

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Broj $\frac{(10^{2024} + 10^{2026})^2}{10^{2023} + 10^{2025}}$ zapiši u znanstvenom zapisu.

Rješenje.

Sređivanjem brojnika i nazivnika dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{(10^{2024} + 10^{2026})^2}{10^{2023} + 10^{2025}} &= \frac{[10^{2024}(1 + 10^2)]^2}{10^{2023}(1 + 10^2)} && 2 \text{ boda} \\ &= \frac{10^{4048}}{10^{2023}} \cdot 101 && 2 \text{ boda} \\ &= 101 \cdot 10^{2025}. && 1 \text{ bod}\end{aligned}$$

Prema tome, znanstveni zapis danog broja jest $1.01 \cdot 10^{2027}$. 1 bod

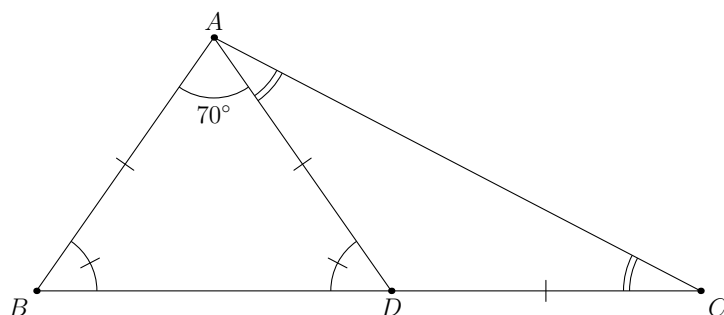
Zadatak B-1.2.

Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC nalazi se točka D takva da vrijedi $|AB| = |AD| = |DC|$ te je $|\sphericalangle BAD| = 70^\circ$. Odredi veličinu kuta $\sphericalangle ACB$.

Rješenje.

Budući da je $|AB| = |AD|$ vrijedi $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DBA|$. 1 bod

Također, budući da je $|AD| = |DC|$ vrijedi $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACD|$. 1 bod



Iz zbroja veličina kutova u trokutu ABD slijedi $|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle DBA| + 70^\circ = 180^\circ$, odnosno $2|\sphericalangle ADB| + 70^\circ = 180^\circ$, pa je $|\sphericalangle ADB| = 55^\circ$. 1 bod

Stoga je

$$|\sphericalangle CDA| = 180^\circ - |\sphericalangle ADB| = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz zbroja veličina kutova u trokutu ADC slijedi $|\angle DAC| + |\angle ACD| + 125^\circ = 180^\circ$, odnosno $2|\angle ACD| + 125^\circ = 180^\circ$, pa je $|\angle ACD| = |\angle ACB| = 27.5^\circ$.

2 boda

Napomena: Ako učenik samo na skici označi sukladne kutove trokuta ABD i ADC ili napiše veličine kutova koje je potrebno izračunati, dobiva odgovarajuće bodove prema bodovnoj shemi.

Zadatak B-1.3.

Odredi najmanje prirodne brojeve x , y i z za koje vrijedi:

- brojevi $x - 1$, y i z su djeljivi brojem 2,
- brojevi x , $y - 2$ i z su djeljivi brojem 3,
- brojevi x , y i $z - 2$ su djeljivi brojem 5.

Rješenje.

Budući da je $x - 1$ djeljiv s 2, broj x je neparan. Također je djeljiv s 3 i 5. Najmanji neparan broj koji je djeljiv i s 3 i s 5 je $x = 15$.

2 boda

Broj y je djeljiv i s 2 i s 5, dakle djeljiv je s 10. Osim toga, budući da je $y - 2$ djeljiv s 3, broj y pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2. Najmanji takav broj je $y = 20$.

2 boda

Broj z je djeljiv s 2 i s 3, dakle djeljiv je sa 6. Budući da je $z - 2$ djeljiv s 5, broj z pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2. Najmanji takav broj je $z = 12$.

2 boda

Napomena: Ako učenik sustavno traži najmanji broj koji zadovoljava uvjete i ako su svi uvjeti zadovoljeni, za svaki se broj dodjeljuje 2 boda.

Zadatak B-1.4.

Na kraju sezone prodavač nudi akciju: ako netko kupi dva para tenisica, za jeftiniji par plaća 50 % pune cijene. Teo je iskoristio akciju i kupio dva različita para tenisica za ukupno 95 eura. Na taj način je potrošio 20 % manje novca nego da je oba para kupio po redovnoj cijeni. Kolika je cijena svakog para tenisica bez popusta?

Prvo rješenje.

Neka je x cijena tenisica koje su kupljene uz popust. Tada je $95 - \frac{x}{2}$ cijena tenisica koje su kupljene bez popusta.

1 bod

Iz uvjeta da je ukupna ušteda 20% slijedi da je $\frac{4}{5} \left(x + 95 - \frac{x}{2} \right) = 95$.

2 boda

Sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} x + 95 - \frac{x}{2} &= \frac{475}{4} \\ \frac{1}{2}x &= \frac{95}{4} \\ x &= \frac{95}{2}. \end{aligned}$$

2 boda

Cijena tenisica koje su kupljene bez popusta je $95 - \frac{x}{2} = \frac{285}{4}$.

1 bod

Cijena prvog para tenisica je 71.25 eura, a drugog 47.50 eura.

Drugo rješenje.

Neka je x cijena prvog para tenisica, a y drugog, jeftinijeg para.

Iz uvjeta da je prvi par tenisica kupljen po punoj cijeni i drugi par s popustom od 50% slijedi da je $x + 0.5y = 95$.

1 bod

Iz uvjeta da je ukupna ušteda 20% slijedi da je $0.8(x + y) = 95$.

1 bod

Sada iz $x + 0.5y = 0.8(x + y)$ dobivamo:

$$0.2x = 0.3y$$

$$x = 1.5y.$$

2 boda

Uvrštavanjem $x = 1.5y$ u $x + 0.5y = 95$ dobivamo

$$2y = 95$$

$$y = 47.5.$$

1 bod

Stoga je $x = 1.5y = 71.25$.

1 bod

Cijena prvog para tenisica je 71.25 eura, a drugog 47.50 eura.

Zadatak B-1.5.

Matko ima četiri nove drvene bojice (crvenu, plavu, zelenu i žutu) i na papiru nacrtan kvadrat $ABCD$ kojem je duljina stranica jednaka duljini bojica. Na koliko načina Matko može položiti na svaku stranicu kvadrata po jednu bojicu tako da vrh crvene bojice i vrh plave bojice ne budu u istom vrhu kvadrata?

Prvo rješenje.

Crvenu bojicu možemo položiti na bilo koju od četiri stranice kvadrata. Plavu bojicu zatim možemo položiti na bilo koju od preostale tri stranice, zelenu na jednu od preostale dvije stranice, a žuta strelica nužno dolazi na posljednju stranicu. Na taj način dobivamo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ različita rasporeda boja po stranicama kvadrata.

1 bod

Za svaki takav raspored, svaka od četiri bojice može imati jednu od dvije moguće orijentacije, pa ukupno postoji $2^4 = 16$ mogućih izbora orijentacije.

Stoga je ukupan broj svih mogućih polaganja bojica jednak $24 \cdot 16 = 384$.

1 bod

Preostaje odrediti rasporede u kojima se vrh crvene i vrh plave bojice nalaze u istom vrhu kvadrata. Najprije biramo jedan od četiri vrha kvadrata. Postoje točno dvije stranice koje se u sastaju u izabranom vrhu. Crvenu i plavu bojicu možemo položiti na dva načina na te stranice tako da im vrhovi budu u izabranom vrhu kvadrata.

1 bod

Na preostale dvije stranice polažu se zelena i žuta bojica, što se može učiniti na 2 načina. Svaka od tih dviju bojica može imati jednu od dvije moguće orijentacije, što daje ukupno $2^2 = 4$ mogućnosti.

1 bod

Ukupno tako dobivamo $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 64$ rasporeda u kojima se vrh crvene i vrh plave bojice nalaze u istom vrhu kvadrata.

1 bod

Od broja svih mogućih polaganja bojica oduzimamo broj mogućih polaganja u kojima se vrh crvene i vrh plave bojice nalaze u istom vrhu kvadrata.

Dakle, ima ukupno $384 - 64 = 320$ traženih načina.

1 bod

Drugo rješenje.

Promotrimo položaje crvene i plave bojice koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

Razlikujemo dva slučaja.

U prvom slučaju plava i crvena bojica se nalaze na susjednim stranicama kvadrata, ali im nisu oba vrha u vrhu kvadrata u kojem se sastaju te susjedne stranice. Vrh kvadrata u kojem se sastaju plava i crvena bojica možemo odabrati na 4 načina.

1 bod

Plavu i crvenu bojicu možemo položiti na stranice kvadrata na 2 načina, a možemo ih okrenuti tako da ne budu vrhovi obje bojice u vrhu kvadrata na 3 načina. Stoga, u ovom slučaju plavu i crvenu bojicu možemo položiti na $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ načina.

1 bod

U drugom slučaju plava i crvena bojica se nalaze na nasuprotnim stranicama kvadrata. Na 4 načina možemo odabrati stranicu kvadrata na koju polažemo crvenu bojicu, a stranica na koju polažemo plavu bojicu je time jedinstveno određena.

1 bod

Na $2 \cdot 2$ načina možemo okrenuti plavu i crvenu bojicu. Stoga, u ovom slučaju plavu i crvenu bojicu možemo položiti na $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ načina.

1 bod

U oba slučaja, na 2 načina možemo odabrati na kojoj stranici će biti položena zelena bojica i time je jedinstveno određena stranica na kojoj će biti žuta bojica. Te dvije bojice možemo okrenuti na $2 \cdot 2 = 4$ načina, tj. možemo ih položiti na ukupno $2 \cdot 4 = 8$ načina.

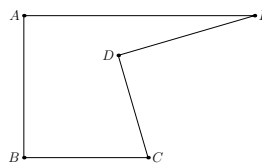
1 bod

Ukupan broj traženih načina iznosi $(24 + 16) \cdot 8 = 320$.

1 bod

Zadatak B-1.6.

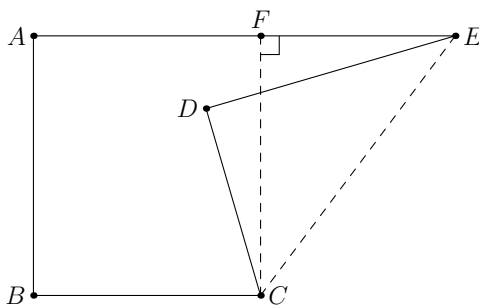
Izračunaj površinu peterokuta $ABCDE$ sa slike ako je $|AE| = 13$ cm, $|BC| = 7$ cm, $|CD| = 6$ cm, $|DE| = 8$ cm i vrijedi $\angle BAE = \angle CBA = \angle CDE = 90^\circ$.



Rješenje.

Neka je točka F na dužini $\overline{AE}$ takva da je četverokut $ABCF$ pravokutnik.

1 bod



Promotrimo dužinu $\overline{CE}$, zajedničku hipotenuzu pravokutnih trokuta CED i CEF .

1 bod

Prema Pitagorinom poučku za trokut CED dobivamo

$$|CE| = \sqrt{|CD|^2 + |DE|^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm.}$$

2 boda

Budući da je $|AF| = |BC|$, dobivamo $|FE| = |AE| - |AF| = 13 - 7 = 6$ cm.

1 bod

Prema Pitagorinom poučku za trokutu CEF dobivamo

$$|FC| = \sqrt{|CE|^2 - |FE|^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm} = |AB|. \quad 2 \text{ boda}$$

Budući da vrijedi

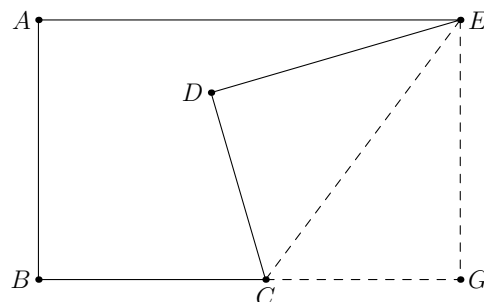
$$\begin{aligned} P_{ABCF} &= |AB| \cdot |BC| = 8 \cdot 7 = 56 \text{ cm}^2, \\ P_{CEF} &= \frac{|FC| \cdot |FE|}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2, \\ P_{CED} &= \frac{|DC| \cdot |DE|}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2, \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

slijedi

$$\begin{aligned} P_{ABCDE} &= P_{ABCF} + P_{CEF} - P_{CED} \\ &= 56 + 24 - 24 \\ &= 56 \text{ cm}^2. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ bod} \\ 1 \text{ bod} \end{array}$$

Napomena: Ako je učenik izračunao površinu pravokutnika $ABCF$ i barem jednog pravokutnog trokuta CEF ili CED dobiva predviđeni **1 bod**.

Zadatak se može riješiti i uvodeći točku G takvu da je četverokut $ABGE$ pravokutnik.



Tada je CGE također pravokutan trokut s hipotenuzom $\overline{CE}$ i površinom 24 cm^2 , te vrijedi

$$P_{ABCDE} = P_{ABGE} - P_{CED} - P_{CGE} = 104 - 24 - 24 = 56 \text{ cm}^2.$$

Bodovanje je u potpunosti analogno kao u predloženom rješenju.

Zadatak B-1.7.

Odredi posljednju znamenku zbroja

$$1^{2026} + 2^{2026} + 3^{2026} + 4^{2026} + 5^{2026} + 6^{2026} + 7^{2026} + 8^{2026} + 9^{2026} + 10^{2026}.$$

Rješenje.

Za brojeve 1, 5, 6 i 10 posljednja znamenka potencije uvijek je ista, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: 1^n ima posljednju znamenku 1, 5^n ima posljednju znamenku 5, 6^n ima posljednju znamenku 6, 10^n ima posljednju znamenku 0.

2 boda

Kod potencija s bazama 2, 3, 4, 7, 8 i 9 posljednje znamenke se pravilno ponavljaju.

Za potencije broja 2 vrijedi:

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad \dots,$$

te se posljednje znamenke ponavljaju u ciklusu 2, 4, 8, 6 duljine 4. Dijeljenjem broja 2026 s 4 dobivamo ostatak 2, pa je posljednja znamenka potencije 2^{2026} jednaka 4.

1 bod

Za baze 3, 4, 7, 8 i 9 na isti način utvrdjemo kako se ponavljanju posljednje znamenke.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
3^n	3	9	7	1
4^n	4	6	4	6
7^n	7	9	3	1
8^n	8	4	2	6
9^n	9	1	9	1

Za $n > 4$ brojevi u redcima tablice periodički se ponavljaju.

Posljednje znamenke potencija brojeva 3, 7 i 8 periodički se ponavljaju u ciklusima duljine 4. Budući da je $2026 : 4 = 506$ i ostatak 2, vrijedi da je

- posljednja znamenka potencije 3^{2026} znamenka 9, 1 bod
- posljednja znamenka potencije 7^{2026} znamenka 9, 1 bod
- posljednja znamenka potencije 8^{2026} znamenka 4. 1 bod

Posljednje znamenke potencija brojeva 4 i 9 periodički se ponavljaju u ciklusima duljine 2. Budući da je 2026 paran broj, vrijedi da je

- posljednja znamenka potencije 4^{2026} znamenka 6, 1 bod
- posljednja znamenka potencije 9^{2026} znamenka 1. 1 bod

Zbrajanjem posljednje znamenke svakog člana dobivamo

$$1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 + 0 = 45,$$

1 bod

pa je posljednja znamenka zbroja

$$1^{2026} + 2^{2026} + 3^{2026} + 4^{2026} + 5^{2026} + 6^{2026} + 7^{2026} + 8^{2026} + 9^{2026} + 10^{2026}$$

znamenka 5.

1 bod

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Kvadratna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ postiže najveću vrijednost 8 za $x = -1$ i vrijedi $f(0) = 6$. Odredi nultočke funkcije g ako za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $g(x) = f(x + 1)$.

Prvo rješenje.

Iz $f(0) = 6$ slijedi $c = 6$. 1 bod

Točka $T(-1, 8)$ je tjeme parabole $y = f(x)$. 1 bod

Stoga vrijedi $-\frac{b}{2a} = -1$, $\frac{4ac - b^2}{4a} = 8$, odnosno $b = 2a$ i

$$32a = 4ac - b^2 = 24a - 4a^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Jednadžba $32a = 24a - 4a^2$ ima dva rješenja $a_1 = 0$ i $a_2 = -2$, ali mora vrijediti $a \neq 0$ kako bi f bila kvadratna funkcija. Stoga je $a = -2$ i $b = -4$. 1 bod

Iz $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$ slijedi $g(x) = f(x + 1) = -2x^2 - 8x$. 1 bod

Konačno, iz $g(x) = 0$ slijedi $x_1 = -4$ i $x_2 = 0$. 1 bod

Napomena:

U prvome je rješenju moguće posljednja 2 boda ostvariti na sljedeći način:

Nultočke funkcije $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$ su $x_1 = -3$ i $x_2 = 1$.

Konačno, iz $g(x) = f(x + 1)$ slijedi da su nultočke funkcije g : $x_1 = -4$ i $x_2 = 0$.

Drugo rješenje.

Točka $T(-1, 8)$ tjeme je parabole $y = f(x)$. 1 bod

Slijedi $f(x) = a(x + 1)^2 + 8$. 2 boda

Iz $f(0) = 6$ slijedi $a = -2$. 1 bod

Iz $f(x) = -2(x + 1)^2 + 8$ slijedi $g(x) = f(x + 1) = -2(x + 2)^2 + 8 = -2x^2 - 8x$. 1 bod

Konačno, iz $g(x) = 0$ slijedi $x_1 = -4$ i $x_2 = 0$. 1 bod

Napomena: Umjesto korištenja $f(x) = a(x + 1)^2 + 8$ i $f(0) = 6$, učenici mogu iz $g(x) = f(x + 1)$ zaključiti da je točka $T_g(-2, 8)$ tjeme parabole $y = g(x)$ i da je $g(-1) = 6$ (2 boda), pa iz $g(x) = a(x + 2)^2 + 8$ i $g(-1) = 6$ dobiti $a = -2$ (1 bod).

Zadatak B-2.2.

U skupu realnih brojeva riješi jednađbu $x|x+1|+1=\frac{|x+1|}{x+1}$.

Rješenje.

Prvi slučaj. Neka je $x+1>0$. Tada vrijedi

$$x>-1, \quad x(x+1)+1=\frac{x+1}{x+1}=1. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz $x^2+x+1=1$ slijedi $x_1=0$ i $x_2=-1$. Za rješenje $x=-1$ polazna jednađba nije definirana, pa je rješenje samo $x=0$. 1 bod
1 bod

Drugi slučaj. Neka je $x+1<0$. Tada vrijedi

$$x<-1, \quad x(-x-1)+1=\frac{-x-1}{x+1}=-1. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz $-x^2-x+1=-1$ slijedi $-x^2-x+2=0$, odnosno $x_3=1$ i $x_4=-2$. 1 bod

Rješenje $x=1$ ne zadovoljava uvjet $x+1<0$, pa je rješenje samo $x=-2$. 1 bod

Tražena rješenja su $x=0$ i $x=-2$.

Zadatak B-2.3.

Marko u školu udaljenu 3 km ide biciklom. Prvog je dana do škole vozio prosječnom brzinom v . Drugoga je dana vozio prosječnom brzinom za 10 km/h manjom nego prvoga dana i trebalo mu je tri minute više da stigne do škole. Kojom je prosječnom brzinom Marko vozio prvoga dana i koliko mu je vremena trebalo do škole?

Rješenje.

Neka je $s=3$ put od Markove kuće do škole u kilometrima. Neka je t vrijeme izraženo u satima za koje Marko stigne do škole prvog dana, te neka je prosječna brzina v izražena u km/h.

Vrijedi $t=\frac{s}{v}$. 1 bod

Drugoga dana Markova je prosječna brzina bila $v-10$, a vrijeme za koje je došao do škole iznosi $t+\frac{3}{60}$. 1 bod

Stoga vrijedi

$$\frac{s}{v-10}=t+\frac{3}{60}=\frac{s}{v}+\frac{3}{60}. \quad 1 \text{ bod}$$

Uvrštavanjem $s=3$ dobivamo kvadratnu jednađbu:

$$v^2-10v-600=0, \quad 1 \text{ bod}$$

čija su rješenja $v_1=30$ i $v_2=-20$.

Prosječna brzina kojom vozi Marko prvog dana je 30 km/h. 1 bod

Vrijeme za koje stigne do škole prvog dana je 0.1 sati odnosno 6 minuta. 1 bod

Zadatak B-2.4.

U knjižnici s nekoliko soba spremjeno je 1260 knjiga. U svakoj je sobi jednak broj ormara, svaki ormar ima jednak broj polica i na svakoj je polici jednak broj knjiga. Broj soba manji je od broja polica u ormaru, broj polica u ormaru manji je od broja ormara u sobi, a broj ormara u sobi manji je od broja knjiga na polici. Ako je broj knjiga na polici manji od deset, koliko je ormara u toj knjižnici?

Rješenje.

Neka je s broj soba u knjižnici, o broj ormara u pojedinoj sobi, p broj polica u pojedinom ormaru i k broj knjiga na pojedinoj polici.

Tada vrijedi $s < p < o < k < 10$ i $s \cdot p \cdot o \cdot k = 1260$.

Broj 1260 trebamo zapisati kao umnožak četiri različita prirodna broja manja od 10. 1 bod

Djelitelji broja 1260 manji od 10 su 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 9. 1 bod

Umnožak prostih faktora 5 i 7 veći je od 10, kao i umnožak tih brojeva s prostim faktorima 2 ili 3, što znači da su 5 i 7 dva od četiri tražena broja. 1 bod

Sada možemo zapisati $1260 = 5 \cdot 7 \cdot 36$.

Broj 36 možemo zapisati u obliku umnoška dvaju prirodnih brojeva na sljedeće načine:

$$36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6.$$

Prema uvjetima zadatka svi faktori trebaju biti međusobno različiti i manji od 10, što zadovoljava jedino zapis $36 = 4 \cdot 9$. 1 bod

Traženi je zapis $1260 = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$, iz čega slijedi $s = 4$, $p = 5$, $o = 7$ i $k = 9$. 1 bod

U toj je knjižnici ukupno $4 \cdot 7 = 28$ ormara. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Odredi sve realne brojeve x i y za koje vrijedi:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{y-2}} = 7, \\ \frac{3}{\sqrt{x+1}} - 2\sqrt{y-2} = -7. \end{cases}$$

Prvo rješenje.

Za brojeve x i y mora vrijediti $x > -1$, $y > 2$.

Uvođenjem zamjene $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{y-2}$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} 2a + \frac{4}{b} = 7, \\ \frac{3}{a} - 2b = -7. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $a = \frac{3}{2b-7}$, pa se uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobiva jednadžba

$$\frac{6}{2b-7} + \frac{4}{b} = 7, \quad 2 \text{ boda}$$

odnosno nakon sređivanja jednadžba

$$2b^2 - 9b + 4 = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Slijede rješenja $b_1 = 4$, $b_2 = \frac{1}{2}$, odnosno $a_1 = 3$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. 1 bod

Budući da za svaki realan broj x vrijedi $\sqrt{x+1} \geq 0$, ne može vrijediti $\sqrt{x+1} = -\frac{1}{2}$. 1 bod

Zato je $\sqrt{x+1} = 3$ i $\sqrt{y-2} = 4$, pa je rješenje $x = 8$, $y = 18$. 1 bod

Drugo rješenje.

Za brojeve x i y mora vrijediti $x > -1$, $y > 2$.

Iz prve jednadžbe slijedi

$$\sqrt{y-2} = \frac{4}{7-2\sqrt{x+1}},$$

pa se uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobiva jednadžba

$$\frac{3}{\sqrt{x+1}} - \frac{8}{7-2\sqrt{x+1}} = -7. \quad 2 \text{ boda}$$

Pojednostavljivanjem dobivamo jednadžbu

$$5\sqrt{x+1} = 2x - 1,$$

a nakon kvadriranja i sređivanja jednadžbu

$$4x^2 - 29x - 24 = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{3}{4}$, te dobivamo $y_1 = 18$, $y_2 = \frac{2}{3}$. 2 boda

Budući da $y = \frac{2}{3}$ ne zadovoljava uvjet $y > 2$, to nije rješenje. 1 bod

Jedino rješenje je $x = 8$ i $y = 18$.

Napomena: U oba rješenja moguće je odabrati koju nepoznanicu izraziti pomoću druge, te iz koje jednadžbe to učiniti. Bodovanje je analogno.

Zadatak B-2.6.

Odredi sve realne brojeve k za koje jednačba

$$x^2 - 2kx + 2x + k^2 + k - 2 = 0$$

ima realna i različita rješenja, a zbroj kvadrata rješenja jednačbe manji je od 20.

Rješenje.

Zadanu jednačbu možemo zapisati u obliku:

$$x^2 + (2 - 2k)x + (k^2 + k - 2) = 0.$$

Kako bi ova jednačba imala realna i različita rješenja njena diskriminanta treba biti pozitivna. Vrijedi:

1 bod

$$D = (2 - 2k)^2 - 4(k^2 + k - 2) = 4(k - 1)^2 - 4(k^2 + k - 2) = -12k + 12.$$

1 bod

Stoga vrijedi

$$D > 0 \iff -12k + 12 > 0 \iff k < 1.$$

1 bod

Neka su x_1, x_2 rješenja jednačbe. Po Vieteovim formulama vrijedi

$$x_1 + x_2 = -(2 - 2k) = 2k - 2, \quad x_1 x_2 = k^2 + k - 2.$$

2 boda

Zbroj kvadrata je

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (2k - 2)^2 - 2(k^2 + k - 2) = 2k^2 - 10k + 8.$$

2 boda

Prema uvjetu zadatka dobivamo nejednačbu

$$x_1^2 + x_2^2 < 20 \iff 2k^2 - 10k + 8 < 20 \iff 2k^2 - 10k - 12 < 0 \iff k^2 - 5k - 6 < 0, \quad 1 \text{ bod}$$

čije rješenje je

$$-1 < k < 6.$$

1 bod

Konačno, uz uvjet $k < 1$ (realna i različita rješenja) dobivamo rješenje

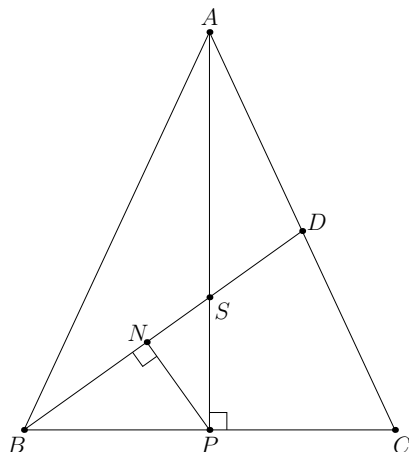
$$-1 < k < 1,$$

odnosno $k \in \langle -1, 1 \rangle$.

1 bod

Zadatak B-2.7.

Trokut ABC je jednakokračan. Točka P polovište je osnovice $\overline{BC}$, a točka D polovište kraka $\overline{AC}$ toga trokuta. Dužine $\overline{BD}$ i $\overline{AP}$ sijeku se u točki S . Okomica iz točke P na dužinu $\overline{BS}$ siječe tu dužinu u točki N i vrijedi $|BN| : |NS| = 2 : 1$. Ako je $|BD| = 27$ cm, koliko iznose duljine stranica trokuta ABC ?

Rješenje.

Budući da je točka D polovište stranice $\overline{AC}$, dužina $\overline{BD}$ je težišnica trokuta ABC . Kako je P polovište osnovice $\overline{BC}$, dužina $\overline{AP}$ je također težišnica, pa je njihovo sjecište S težište trokuta ABC .

Težište dijeli težišnicu u omjeru $2 : 1$, pa vrijedi

$$|BS| = \frac{2}{3} |BD| = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18 \text{ cm.} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz uvjeta $|BN| : |NS| = 2 : 1$ slijedi

$$|BN| = \frac{2}{3} |BS| = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12 \text{ cm}, \quad |NS| = \frac{1}{3} |BS| = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6 \text{ cm.} \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je trokut ABC jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$, težišnica $\overline{AP}$ je ujedno i visina na stranicu $\overline{BC}$. Zato je trokut BPS pravokutan, a dužina $\overline{NP}$ je visina iz vrha P na hipotenuzu $\overline{BS}$. 1 bod

Primjenom Euklidovog poučka za visinu dobivamo

$$|NP|^2 = |BN| \cdot |NS| = 12 \cdot 6 = 72 \implies |NP| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm.} \quad 2 \text{ boda}$$

Primjenom Euklidovog poučka za katete također vrijedi

$$|BP|^2 = |BN| \cdot |BS| = 12 \cdot 18 = 216 \implies |BP| = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \text{ cm} \quad 1 \text{ bod}$$

i

$$|PS|^2 = |NS| \cdot |BS| = 6 \cdot 18 = 108 \implies |PS| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm.} \quad 1 \text{ bod}$$

Budući da je P polovište osnovice $\overline{BC}$, slijedi

$$|BC| = 2|BP| = 2 \cdot 6\sqrt{6} = 12\sqrt{6} \text{ cm.} \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je S težište, ono dijeli težišnicu $\overline{AP}$ u omjeru $2 : 1$, tj. $|PS| = \frac{1}{3}|AP|$, pa je

$$|AP| = 3|PS| = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ cm.} \quad 1 \text{ bod}$$

U pravokutnom trokutu ABP vrijedi Pitagorin poučak:

$$|AB|^2 = |AP|^2 + |BP|^2 = (18\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{6})^2 = 972 + 216 = 1188,$$

pa je

$$|AB| = \sqrt{1188} = 6\sqrt{33} \text{ cm.}$$

Zbog jednakokračnosti trokuta ABC vrijedi $|AB| = |AC| = 6\sqrt{33} \text{ cm.}$ 1 bod

Napomena: Duljine dužina nije nužno djelomično korjenovati.

Umjesto Euklidovog poučka možemo primijeniti Pitagorin poučak na trokute BPN , PSN i BPS :

$$|BN|^2 + |NP|^2 = |BP|^2 \implies 144 + |NP|^2 = |BP|^2,$$

$$|NP|^2 + |NS|^2 = |PS|^2 \implies |NP|^2 + 36 = |PS|^2,$$

$$|BP|^2 + |PS|^2 = |BS|^2 \implies |BP|^2 + |PS|^2 = 324.$$

Zbrajanjem prve dvije jednačbe i uvrštavanjem u treću dobivamo

$$144 + |NP|^2 + |NP|^2 + 36 = 324 \implies 2|NP|^2 = 144 \implies |NP|^2 = 72.$$

Zatim slijedi

$$|BP|^2 = 144 + 72 = 216, \quad |PS|^2 = 72 + 36 = 108.$$

Primjena Pitagorina teorema na trokute BPN , PSN i BPS nosi **2 boda**, a određivanje $|NP|$ **1 bod**, a određivanje $|BP|$ i $|PS|$ još **1 bod**.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt[4]{\frac{3^{12} + 3^{x+1}}{3^5 + 3^x}} = 3$.

Rješenje.

Budući da je izraz pod korijenom uvijek pozitivan, dana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi $\frac{3^{12} + 3^{x+1}}{3^5 + 3^x} = 3^4$. 1 bod

Množenjem s $3^5 + 3^x$ te primjenom pravila za računanje s potencijama dobivamo

$$\begin{aligned} 3^{12} + 3^{x+1} &= 3^4 \cdot (3^5 + 3^x) \\ 3^{12} + 3^{x+1} &= 3^9 + 3^4 \cdot 3^x && \text{1 bod} \\ 27 \cdot 3^9 + 3^{x+1} &= 3^9 + 27 \cdot 3^{x+1} && \text{2 boda} \\ 26 \cdot 3^{x+1} &= 26 \cdot 3^9 \\ 3^{x+1} &= 3^9. && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Potencije s istom bazom su jednake ako i samo ako su im eksponenti jednaki, pa vrijedi $x + 1 = 9$, tj. $x = 8$. 1 bod

Zadatak B-3.2.

Neka je x realan broj takav da je $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ i $\sin x = -\frac{3}{5}$.

Odredi vrijednost izraza $\frac{\operatorname{tg} x + \cos(x - 2^{2026}\pi)}{\operatorname{ctg} x + \sin(x - 2025\pi)}$.

Rješenje.

Budući da je period funkcije kosinus bilo koji paran cjelobrojni višekratnik broja π vrijedi da je $\cos(x - 2^{2026}\pi) = \cos x$. 1 bod

Također, $\sin(x - 2025\pi) = \sin(x - 2025\pi + 2026\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$. 1 bod

Iz $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ slijedi $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25}$, odnosno $\cos^2 x = \frac{16}{25}$. 1 bod

Budući da je $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ slijedi da je $\cos x = \frac{4}{5}$. 1 bod

Nadalje, dobivamo da je $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$ i $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{4}{3}$. 1 bod

Konačno dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg} x + \cos(x - 2^{2026}\pi)}{\operatorname{ctg} x + \sin(x - 2025\pi)} = \frac{\operatorname{tg} x + \cos x}{\operatorname{ctg} x - \sin x} = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{4}{5}}{-\frac{4}{3} + \frac{3}{5}} = -\frac{3}{44}. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak B-3.3.

Odredi sve šesteroznamenkaste brojeve oblika $\overline{579abc}$ koji su djeljivi s 5, 7 i 9.

Prvo rješenje.

Budući da su 5, 7 i 9 u parovima relativno prosti brojevi, tražimo brojeve $\overline{579abc}$ djeljive brojem $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$. 1 bod

Podijelimo li broj 579000 s 315 dobivamo količnik 1838 i ostatak 30. 1 bod

Budući da vrijedi

$$\overline{579abc} = 1838 \cdot 315 + 30 + \overline{abc}$$

broj $\overline{579abc}$ djeljiv je brojem 315 ako i samo ako je broj $30 + \overline{abc}$ djeljiv brojem 315. 1 bod

To je moguće jedino kada je broj $30 + \overline{abc}$ jednak nekom od brojeva 315, $2 \cdot 315$, $3 \cdot 315$. 2 boda

Navedeni slučajevi daju redom $\overline{abc} = 285$, $\overline{abc} = 600$, $\overline{abc} = 915$, pa su brojevi s navedenim svojstvom 579 285, 579 600, 579 915. 1 bod

Drugo rješenje.

Budući da je broj $\overline{579abc}$ djeljiv s 5 zaključujemo da je $c = 0$ ili $c = 5$. Također, kako je broj $\overline{579abc}$ djeljiv i brojem 9, zbroj njegovih znamenaka djeljiv je brojem 9.

Ako je $c = 0$, onda je $a + b = 6$ ili $a + b = 15$. 1 bod

U obzir dolaze sljedeći brojevi:

$$\begin{array}{cccccc} 579060, & 579150, & 579240, & 579330, & 579420, & 579510, \\ 579600, & 579690, & 579780, & 579870, & 579960. & \end{array} \quad 1 \text{ bod}$$

Direktnom provjerom utvrđujemo da je jedino broj 579 600 djeljiv brojem 7. 1 bod

Ako je $c = 5$, tada je $a + b = 1$ ili $a + b = 10$. 1 bod

Imamo sljedeće mogućnosti:

$$\begin{array}{cccccc} 579015, & 579105, & 579195, & 579285, & 579375, & 579465, \\ 579555, & 579645, & 579735, & 579825, & 579915. & \end{array} \quad 1 \text{ bod}$$

Jedino su brojevi 579 285 i 579 915 djeljivi brojem 7. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Teo ima vrećicu s 9 loptica, od kojih su 4 zelene i 5 crvenih. Nasumično izvlači loptice iz vrećice, jednu po jednu, i stavlja ih na stol, sve dok na stolu ne budu dvije loptice iste boje. Koja je vjerojatnost da se u trenutku kada Teo stane s izvlačenjem na stolu nalaze loptice obje boje?

Prvo rješenje.

Ako su prve dvije loptice različitih boja, Teo će izvlačiti i treću lopticu. Budući da će boja treće loptice sigurno biti jednaka boji jedne od prvih dviju loptica, Teo tada prestaje s daljnjim izvlačenjem. Stoga je vjerojatnost da će se u trenutku kad stane s izvlačenjem na stolu nalaziti loptice obje boje jednaka vjerojatnosti da su prve dvije loptice koje izvuče različitih boja.

1 bod

Vjerojatnost da je prva izvučena optica crvena, a druga zelena iznosi $\frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 8} = \frac{20}{72}$.

2 boda

Vjerojatnosti da je prva izvučena optica zelena, a druga crvena iznosi $\frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 8} = \frac{20}{72}$

2 boda

Konačno, tražena vjerojatnost iznosi $\frac{20}{72} + \frac{20}{72} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$.

1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da tražimo vjerojatnost da su prve dvije loptice različitih boja.

1 bod

Događaj da su prve dvije loptice različitih boja je komplementaran događaju da su prve dvije loptice iste boje.

1 bod

Vjerojatnost da su prve dvije izvučene loptice obje zelene je $\frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$.

1 bod

Vjerojatnost da su prve dvije izvučene loptice obje crvene je $\frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 8} = \frac{5}{18}$.

1 bod

Vjerojatnost da su prve dvije loptice koje Teo izvuče iste boje iznosi $\frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{4}{9}$.

1 bod

Dakle, tražena vjerojatnost jednaka je $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

1 bod

Zadatak B-3.5.

Odredi najveću i najmanju moguću vrijednost izraza $5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x - 2 \sin x$, pri čemu je x realan broj.

Rješenje.

Korištenjem osnovne relacije među trigonometrijskim funkcijama $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i sređivanjem zadanog izraza dobivamo:

$$5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x - 2 \sin x = 5 \sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) - 2 \sin x = 8 \sin^2 x - 2 \sin x - 3. \quad 1 \text{ bod}$$

Uz supstituciju $\sin x = t$ možemo promatrati funkciju $f(t) = 8t^2 - 2t - 3$ za $t \in [-1, 1]$. 1 bod

Kako je vodeći koeficijent pozitivan, funkcija f postiže najmanju vrijednost za

$$t = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{8}. \quad 1 \text{ bod}$$

Budući da je $\frac{1}{8} \in [-1, 1]$, najmanja vrijednost funkcije f iznosi

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 8 \cdot (-3) - 1}{32} = -\frac{100}{32} = -\frac{25}{8}. \quad 1 \text{ bod}$$

Budući da promatramo kvadratnu funkciju na intervalu $[-1, 1]$, najveća vrijednost se postiže u jednom od rubova intervala. 1 bod

Računajući $f(1) = 3$ i $f(-1) = 7$ zaključujemo da je najveća vrijednost koju može poprimiti dani izraz jednaka 7. 1 bod

Napomena: Budući da je graf kvadratne funkcije $f(t) = 8t^2 - 2t - 3$ simetričan s obzirom na pravac $t = \frac{1}{8}$, te da je točka s apscisom -1 udaljenija od osi simetrije nego točka s apscisom 1 , bez uvrštavanja zaključujemo da se najveća vrijednost postiže za $t = -1$. Dovoljno je da učenici izvedu taj zaključak na temelju nacrtanog grafa funkcije f .

Zadatak B-3.6.

Odredi sva realna rješenja sustava jednačbi $\begin{cases} \log_x y = \log_y x, \\ \log_x(x - 14y) = \log_y(x - 8y). \end{cases}$

Rješenje.

Zbog definicije logaritamske funkcije vrijede sljedeći uvjeti: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$, $x - 14y > 0$, $x - 8y > 0$, odnosno $x, y \in \langle 0, +\infty \rangle \setminus \{1\}$, $x > 14y$. 1 bod

Promjenom baze logaritma u prvoj jednačbi dobivamo $\log_x y = \frac{1}{\log_x y}$, odnosno $(\log_x y)^2 = 1$, odakle slijedi $\log_x y = \pm 1$. 1 bod

Iz $\log_x y = 1$ slijedi $y = x$ što nije moguće jer nije zadovoljen uvjet $x > 14y$. 1 bod

Iz $\log_x y = -1$ slijedi $y = \frac{1}{x}$. 1 bod

Uvrštavanjem $y = \frac{1}{x}$ u drugu jednačbu dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} \log_x \left(x - \frac{14}{x} \right) &= \log_{\frac{1}{x}} \left(x - \frac{8}{x} \right) \\ \log_x \left(\frac{x^2 - 14}{x} \right) &= -\log_x \left(\frac{x^2 - 8}{x} \right) \\ \log_x \left(\frac{x^2 - 14}{x} \cdot \frac{x^2 - 8}{x} \right) &= 0 \\ (x^2 - 14)(x^2 - 8) &= x^2 \\ x^4 - 22x^2 + 112 &= 0. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ bod} \\ 1 \text{ bod} \end{array}$$

Uz supstituciju $x^2 = t$ bikvadratnu jednačbu $x^4 - 22x^2 + 112 = 0$ svodimo na kvadratnu jednačbu $t^2 - 22t + 112 = 0$, čija su rješenja $t_1 = 16$ i $t_2 = 7$. 1 bod

Iz $x^2 = 16$ i uvjeta $x > 0$ dobivamo $x = 4$, te analogno iz $x^2 = 7$ dobivamo $x = \sqrt{7}$. 1 bod

Iz $x = 4$ dobivamo $y = \frac{1}{4}$, a iz $x = \sqrt{7}$ slijedi $y = \frac{\sqrt{7}}{7}$. 1 bod

Par $\left(\sqrt{7}, \frac{\sqrt{7}}{7} \right)$ ne zadovoljava uvjet $x > 14y$, te je jedino rješenje par $\left(4, \frac{1}{4} \right)$. 1 bod

Napomena: Analogno se može svoditi na logaritme po drugim bazama, npr. bazu 10.

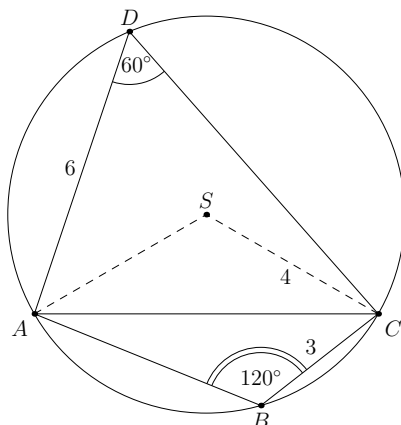
Zadatak B-3.7.

Četverokutu $ABCD$ može se opisati kružnica polumjera 4 cm. Ako je $|\angle ABC| = 120^\circ$, $|BC| = 3$ cm i $|AD| = 6$ cm, izračunaj duljine preostalih dviju stranica toga četverokuta.

Rješenje.

Četverokut $ABCD$ tetivni je, pa je zbroj mjera njegovih nasuprotnih kutova jednak 180° i mjera kuta pri vrhu D iznosi 60° .

2 boda



Trokutu ABC je opisana kružnica polumjera $R = 4$ cm, pa je prema poučku o sinusima $|AC| = 2R \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}$ cm.

2 boda

Primijenimo li poučak o kosinusu na trokut ACD dobivamo

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |CD| \cos 60^\circ.$$

Uvrštavanjem $|AC| = 4\sqrt{3}$ cm i $|AD| = 6$ cm dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$|CD|^2 - 6|CD| - 12 = 0.$$

2 boda

Jedino pozitivno rješenje te jednadžbe je $|CD| = 3 + \sqrt{21}$ cm.

1 bod

Analogno, primijenimo li poučak o kosinusu na trokut ABC dobivamo

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cos 120^\circ.$$

Uvrštavanjem $|AC| = 4\sqrt{3}$ cm i $|BC| = 3$ cm dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$|AB|^2 + 3|AB| - 39 = 0,$$

2 boda

čije je jedino pozitivno rješenje $|AB| = \frac{-3 + \sqrt{165}}{2}$ cm.

1 bod

Napomena: Učenik može koristeći poučak o obodnom i središnjem kutu zaključiti da je kut pri točki S u trokutu ACS jednak 120° . Za taj zaključak treba dodijeliti 1 bod.

Nadalje, budući da je trokut ACS jednakokrakan slijedi da je $\sin 60^\circ = \frac{|AC|}{2R}$, odakle dobivamo $|AC| = 2R \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$ cm, za što se također dodjeljuje 1 bod.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

26. siječnja 2026.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Ako je $z = -\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{3\pi}{5}$ i $w = 1 + i$, koliko je $(z \cdot w)^{20}$?

Prvo rješenje.

Zapišimo prvo zadane brojeve u trigonometrijskom obliku:

$$z = -\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{3\pi}{5} = \cos \left(\pi + \frac{2\pi}{5} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{3\pi}{5} \right) = \cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}, \quad 1 \text{ bod}$$

$$w = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right). \quad 1 \text{ bod}$$

Zaključujemo da je

$$z \cdot w = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{5} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{5} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{33\pi}{20} + i \sin \frac{33\pi}{20} \right), \quad 2 \text{ boda}$$

odnosno

$$(z \cdot w)^{20} = (\sqrt{2})^{20} \left(\cos \frac{20 \cdot 33\pi}{20} + i \sin \frac{20 \cdot 33\pi}{20} \right) = 2^{10} (\cos 33\pi + i \sin 33\pi) = -1024. \quad 2 \text{ boda}$$

Drugo rješenje.

Uočimo da vrijedi

$$z = -\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} = - \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right), \quad 1 \text{ bod}$$

$$w^2 = (1 + i)^2 = 2i. \quad 1 \text{ bod}$$

Slijedi

$$z^{20} = \left(- \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right) \right)^{20} = \cos \frac{20 \cdot 2\pi}{5} + i \sin \frac{20 \cdot 2\pi}{5} = \cos 8\pi + i \sin 8\pi = 1, \quad 2 \text{ boda}$$

$$w^{20} = (w^2)^{10} = (2i)^{10} = 1024 i^2 = -1024. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno je

$$(z \cdot w)^{20} = z^{20} \cdot w^{20} = -1024. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak B-4.2.

Odredi sve prirodne brojeve $n \geq 2$ za koje vrijedi

$$\binom{n+3}{n} + \binom{n+1}{n} = \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} + \binom{n+2}{n+1}.$$

Rješenje.

Prema definiciji binomnih koeficijenata slijedi

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + (n+2). \quad 3 \text{ boda}$$

Množenjem jednadžbe s 6 i sređivanjem dobivamo

$$n^3 - 3n^2 - 10n = 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Rješenja ove jednažbe su $n = 0$, $n = 5$ i $n = -2$. 1 bod

Budući da tražimo prirodne brojeve $n \geq 2$, jedino rješenje je $n = 5$. 1 bod

Napomena: Nakon dobivanja jednadžbe $n^3 = 3n^2 + 10n$ ili $n^2 = 3n + 10$ moguće je uvrstiti brojeve $n = 2, 3, 4$ i 5 (1 bod), te zaključiti da za $n \geq 5$ niz $a_n = n^3$ brže raste od niza $b_n = 3n^2 - 10n$ (1 bod), pa je $n = 5$ jedino rješenje.

Zadatak B-4.3.

Odredi zbroj 1000 najmanjih pozitivnih realnih rješenja jednadžbe $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$.

Rješenje.

Budući da vrijedi $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, zadana jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$\frac{1}{4} \cdot 4^{2 \cos^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 3. \quad 1 \text{ bod}$$

Uvedimo supstituciju $t = 4^{\cos^2 x}$, $t > 0$. Dobivamo jednadžbu $t^2 + 4t - 12 = 0$, čija rješenja su $t_1 = -6$ $t_2 = 2$. 1 bod

Budući da je $t > 0$ moguće je samo $t = 2$, tj. $4^{\cos^2 x} = 2$. Slijedi $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, odnosno

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Stoga je

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 1 \text{ bod}$$

Pozitivna rješenja dane jednadžbe čine aritmetički niz $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots$ s razlikom $d = \frac{\pi}{2}$. 1 bod

Zbroj prvih 1000 pozitivnih članova toga niza iznosi

$$500 \cdot \left[2 \cdot \frac{\pi}{4} + 999 \cdot \frac{\pi}{2} \right] = 250\,000\pi. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak B-4.4.

Niz je zadan formulom za opći član $a_n = \log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Koliko najmanje početnih članova niza treba zbrojiti kako bi zbroj bio veći od 2026?

Rješenje.

Zapišimo opći član u drugačijem obliku:

$$a_n = \log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_2 \frac{n+1}{n} = \log_2(n+1) - \log_2 n. \quad 2 \text{ boda}$$

Zbroj prvih n članova toga niza iznosi:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = (\log_2 2 - \log_2 1) + (\log_2 3 - \log_2 2) + \dots + (\log_2(n+1) - \log_2 n) \\ &= \log_2(n+1) - \log_2 1 = \log_2(n+1) - 0 = \log_2(n+1). \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Uvjet $\log_2(n+1) > 2026$ ekvivalentan je uvjetu $n > 2^{2026} - 1$. 2 boda

Treba zbrojiti najmanje 2^{2026} članova niza.

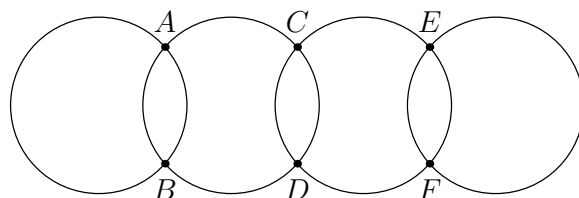
Napomena: Do zbroja prvih n članova toga niza moglo se doći i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \log_2 \left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \log_2 \left[\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \log_2 \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \log_2(n+1) \end{aligned}$$

Bez obzira na pristup, za taj zbroj treba dodijeliti **4 boda**.

Zadatak B-4.5.

Na slici su prikazane četiri kružnice koje se sijeku u šest točaka. Nasumično biramo dvije od tih šest točaka. Koliko iznosi vjerojatnost da odabrane dvije točke pripadaju jednoj od četiri dane kružnice?

**Prvo rješenje.**

Mogući izbori dviju točaka su:

$$AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF.$$

Ukupno imamo 15 mogućnosti. 2 boda

Povoljni izbori (točke koje pripadaju istoj kružnici) su:

$$AB, AC, AD, BC, BD, CD, CE, CF, DE, DF, EF.$$

Ukupno imamo 11 povoljnih mogućnosti. 2 boda

Tražena vjerojatnost iznosi $\frac{11}{15}$. 2 boda

Drugo rješenje.

Dvije točke od zadanih šest možemo odabrati na $\binom{6}{2} = 15$ načina. 2 boda

Par točaka ne pripada istoj kružnici samo ako odaberemo jednu od dvije točke koje pripadaju krajnjoj lijevoj kružnici (A ili B) i jednu od dvije točke koje pripadaju krajnjoj desnoj kružnici (E ili F). Takvih parova ima $2 \cdot 2 = 4$. 2 boda

Vjerojatnost da izabrane točke *ne* pripadaju istoj kružnici je $\frac{4}{15}$. 1 bod

Na kraju, tražena vjerojatnost iznosi $1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$. 1 bod

Treće rješenje.

Najprije odaberemo jednu točku; s jednakom vjerojatnošću $\frac{1}{6}$ to može biti bilo koja od promatranih točaka. 1 bod

Od preostalih pet točaka biramo drugu točku, ali razlikujemo dva slučaja.

Ako je prva točka jedna od četiri točke koje pripadaju krajnjoj lijevoj ili krajnjoj desnoj kružnici (tj. jedna od točaka A , B , E , F) vjerojatnost da druga točka pripada istoj kružnici iznosi $\frac{3}{5}$. 2 boda

Ako je prva odabrana točka C ili D , druga točka sigurno pripada istoj kružnici, tj. vjerojatnost je 1. 1 bod

Tražena vjerojatnost iznosi

$$4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}. \quad 2 \text{ boda}$$

Zadatak B-4.6.

Neka su A i B dirališta tangenata iz ishodišta O koordinatnog sustava na kružnicu čija je jednačba $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 10$. Odredi površinu trokuta ABO .

Prvo rješenje.

Budući da tangente prolaze ishodištem koordinatnog sustava, njihove jednačbe mogu se zapisati u obliku $y = kx$. 1 bod

Iz zadane jednačbe kružnice slijedi da je njezino središte $S(7, -1)$ i polumjer $\sqrt{10}$. 1 bod

Prema uvjetu dodira vrijedi $r^2(1 + k^2) = (q - kp - l)^2$, iz čega uvrštavanjem $p = 7$, $q = -1$ i $r = \sqrt{10}$, slijedi

$$10(1 + k^2) = (-1 - 7k)^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Sređivanjem dobivamo jednačbu $39k^2 + 14k - 9 = 0$, čija rješenja su $k_1 = -\frac{9}{13}$ i $k_2 = \frac{1}{3}$. 1 bod

Jednačbe tangenti glase

$$t_1 \dots y = -\frac{9}{13}x, \quad t_2 \dots y = \frac{1}{3}x.$$

Koordinate dirališta dobivamo rješavanjem sustava jednačbi tangente i kružnice.

$$\begin{aligned}t_1 \cap k &= \{A\} : & t_2 \cap k &= \{B\} : \\(x-7)^2 + \left(-\frac{9}{13}x+1\right)^2 &= 10, & (x-7)^2 + \left(\frac{1}{3}x+1\right)^2 &= 10, \\ \frac{25}{169}x^2 - \frac{20}{13}x + 4 &= 0, & \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 &= 0, & 2 \text{ boda} \\ \left(\frac{5}{13}x-2\right)^2 &= 0, & \left(\frac{1}{3}x-2\right)^2 &= 0, \\ x = \frac{26}{5} \Rightarrow y &= -\frac{18}{5}, & x = 6 \Rightarrow y &= 2. & 2 \text{ boda}\end{aligned}$$

Površina trokuta određenog koordinatama vrhova $A\left(\frac{26}{5}, -\frac{18}{5}\right)$, $B(6, 2)$, $O(0, 0)$ je

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{26}{5} \cdot (2-0) + 6 \cdot \left(0 + \frac{18}{5}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{18}{5} - 2\right) \right| = 16. \quad 2 \text{ boda}$$

Napomena: Jednačbe tangenti mogu se odrediti i bez primjene uvjeta dodira, koristeći činjenicu da je kvadratnoj jednačbi $(x-7)^2 + (kx+1)^2 = 10$ diskriminanta jednaka nuli. Taj dio rješenja nosi **4 boda**. Određivanje koordinata točaka A i B nosi sljedeća **4 boda**, po **2 boda** za svaku točku.

Drugo rješenje.

Iz zadane jednačbe kružnice slijedi da je njezino središte $S(7, -1)$ i polumjer $\sqrt{10}$. 1 bod

Jednačba tangente u točki $T(x_0, y_0)$ zadane kružnice je

$$(x_0 - 7)(x - 7) + (y_0 + 1)(y + 1) = 10. \quad 1 \text{ bod}$$

Budući da tangenta prolazi ishodištem, slijedi

$$(x_0 - 7)(-7) + (y_0 + 1) = 10, \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno

$$y_0 = 7x_0 - 40. \quad 1 \text{ bod}$$

Budući da točka T pripada kružnici, vrijedi i

$$(x_0 - 7)^2 + (y_0 + 1)^2 = 10,$$

pa uvrštavanjem $y_0 = 7x_0 - 40$ dobivamo

$$(x_0 - 7)^2 + (7x_0 - 39)^2 = 10, \quad 2 \text{ boda}$$

odnosno jednačbu $5x_0^2 - 56x_0 + 156 = 0$, čije jedno rješenje je

$$x_0 = \frac{26}{5} \Rightarrow y_0 = -\frac{18}{5}, \quad 1 \text{ bod}$$

a drugo rješenje je

$$x_0 = 6 \Rightarrow y_0 = 2. \quad 1 \text{ bod}$$

Površina trokuta određenog koordinatama vrhova $A\left(\frac{26}{5}, -\frac{18}{5}\right)$, $B(6, 2)$, $O(0, 0)$ je

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{26}{5} \cdot (2-0) + 6 \cdot \left(0 + \frac{18}{5}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{18}{5} - 2\right) \right| = 16. \quad 2 \text{ boda}$$

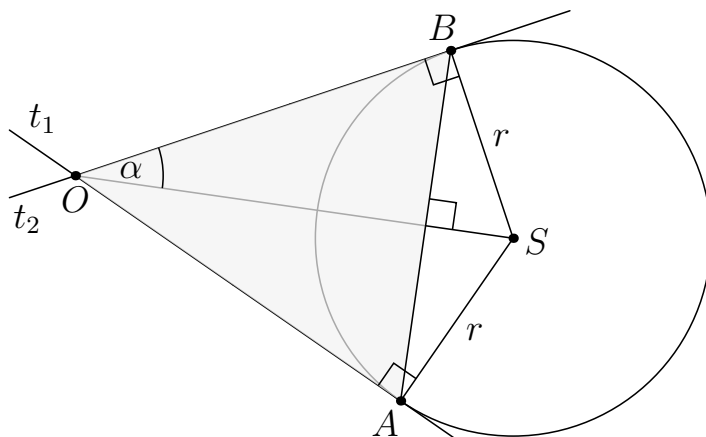
Treće rješenje.

Iz zadane jednadžbe kružnice slijedi da je njezino središte $S(7, -1)$ i polumjer $\sqrt{10}$.

1 bod

Vrijedi $|OS| = \sqrt{(0-7)^2 + (0+1)^2} = 5\sqrt{2}$.

1 bod



Trokuti OAS i OBS su pravokutni i primjenom Pitagorinog poučka slijedi

$$|OA| = |OB| = 2\sqrt{10}.$$

1 bod

Trokuti OAS i OBS su sukladni, pa možemo označiti $|\sphericalangle SOB| = |\sphericalangle AOS| = \alpha$.

1 bod

Površina trokuta OAB iznosi

$$\begin{aligned} P &= \frac{|OA| \cdot |OB| \cdot \sin 2\alpha}{2} \\ &= |OA|^2 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

1 bod

2 boda

U trokutu OSA vrijedi

$$\sin \alpha = \frac{|AS|}{|OS|} = \frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

1 bod

iz čega slijedi

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

1 bod

Konačno imamo

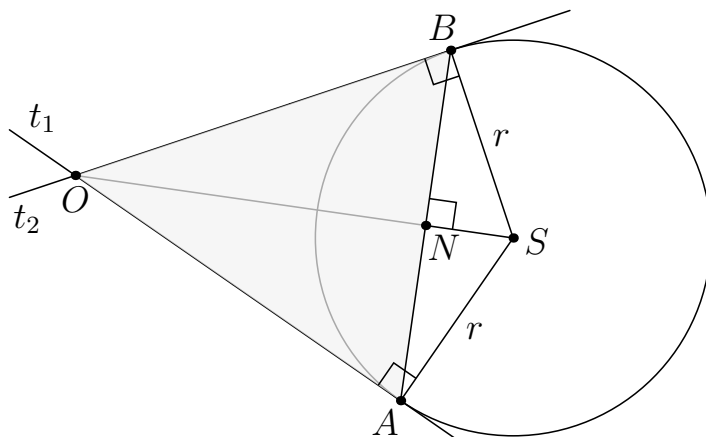
$$P = (2\sqrt{10})^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 16.$$

1 bod

Četvrto rješenje.

Kao u prethodnom rješenju uočimo sukladne pravokutne trokute OAS i OBS , čija je duljina hipotenuze $5\sqrt{2}$, a duljine kateta su $\sqrt{10}$ i $2\sqrt{10}$.

3 boda



Neka je N polovište dužine $\overline{AB}$. Budući da su trokuti AOB i ASB jednakokračni, $\overline{ON}$ i $\overline{SN}$ su visine u tim trokutima, tj. dijagonale četverokuta $ASBO$ sijeku se u točki N i okomite su.

1 bod

Tražena površina jednakokračnog trokuta OAB iznosi $P = \frac{|AB| \cdot |ON|}{2}$.

1 bod

Izražavanjem površine pravokutnog trokuta OAS na dva načina slijedi

$$\frac{|OA| \cdot |AS|}{2} = P(OAS) = \frac{|OS| \cdot |AN|}{2},$$

2 boda

odnosno

$$\frac{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot |AN|}{2} \Rightarrow |AN| = 2\sqrt{2} \Rightarrow |AB| = 4\sqrt{2}.$$

1 bod

Duljinu dužine $\overline{ON}$ dobijemo primjenom Pitagorinog poučka na trokut OAN :

$$|ON| = \sqrt{|OA|^2 - |AN|^2} = \sqrt{40 - 8} = 4\sqrt{2}.$$

1 bod

Konačno imamo:

$$P = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 16.$$

1 bod

Zadatak B-4.7.

Kipar je u svojoj najnovijoj skulpturi od jednakih kockica trebao sastaviti dvije kocke. Za veću kocku je potrošio 387 kockica više nego za manju. Koliko je ukupno kockica upotrijebio?

Prvo rješenje.

Označimo sa x broj kockica duž jednog brida velike kocke i y broj kockica duž jednog brida manje kocke. U tom slučaju velika kocka se sastoji od x^3 kockica, a mala kocka se sastoji od y^3 kockica. Prema uvjetu zadatka treba vrijediti:

$$x^3 - y^3 = 387, \quad x, y \in \mathbb{N}, \quad x > y.$$

Lijevu stranu možemo zapisati u obliku $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 387$.

1 bod

Broj 387 možemo zapisati u obliku umnoška dva faktora na tri načina:

$$387 = 1 \cdot 387 = 3 \cdot 129 = 9 \cdot 43.$$

1 bod

Budući da za $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$ vrijedi $x - y < x^2 + xy + y^2$, imamo tri mogućnosti.

1 bod

U prvom slučaju rješavamo sustav $x - y = 1$, $x^2 + xy + y^2 = 387$. Uvrštavanjem $x = y + 1$ u drugu jednačbu dobiva se kvadratna jednačba $3y^2 + 3y - 386 = 0$, koja nema rješenja u $\mathbb{N}$.

2 boda

U drugom slučaju rješavamo sustav $x - y = 3$, $x^2 + xy + y^2 = 129$. Uvrštavanjem $x = y + 3$ u drugu jednačbu dobiva se kvadratna jednačba $3y^2 + 9y - 120 = 0$, čija su rješenja $y_1 = -8$, $y_2 = 5$.

2 boda

U trećem slučaju rješavamo sustav $x - y = 9$, $x^2 + xy + y^2 = 43$. Uvrštavanjem $x = y + 9$ u drugu jednačbu dobiva se kvadratna jednačba $3y^2 + 27y + 38 = 0$, koja nema rješenja u $\mathbb{N}$.

2 boda

Konačno, jedino rješenje koje zadovoljava uvjete je $y = 5$ i $x = y + 3 = 8$, pa je ukupno upotrijebljeno $x^3 + y^3 = 8^3 + 5^3 = 512 + 125 = 637$ kockica.

1 bod

Napomena: Učenik ne treba rješavati sva tri sustava, ali mora objasniti zašto ne analizira prvu i treću mogućnost. Eliminacija tih slučajeva nosi **4 boda** koji se mogu ostvariti na sljedeći način.

Za svaki prirodni broj n vrijedi da je $n^3 - n = n(n - 1)(n + 1)$ višekratnik broja 3 jer je umnožak tri uzastopna broja (**2 boda**).

Stoga je i broj $(x^3 - x) - (y^3 - y) - 387 = x^3 - y^3 - (x - y) - 387 = -(x - y)$ višekratnik broja 3 (**1 bod**).

Slijedi da je $x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy$ također višekratnik broja 3 (**1 bod**).

Napomena: Umjesto korištenja zaključka $x - y < x^2 + xy + y^2$, učenik može razmatrati dodatna tri slučaja u kojima $x - y$ iznosi 43, 129 ili 387, te pokazati da u tim slučajevima nema rješenja.

Napomena: Ukoliko učenik pogodi da se kocke sastoje od 512 i 125 kockica može dobiti najviše **2 boda** za taj zaključak, kao i **1 bod** za njihov zbroj.

Drugo rješenje.

Kao i u prethodnom rješenju, treba riješiti jednačbu

$$x^3 - y^3 = 387, \quad x, y \in \mathbb{N}, \quad x > y.$$

Budući da je $x^3 - 387 = y^3$ mora vrijediti

$$x^3 > 387 > 343 = 7^3 \Rightarrow x > 7. \quad 1 \text{ bod}$$

Direktnim uvrštavanjem dobivamo:

- $x = 8 \Rightarrow x^3 - 387 = 512 - 387 = 125 = 5^3 \Rightarrow y = 5,$ 2 boda
- $x = 9 \Rightarrow x^3 - 387 = 729 - 387 = 342$, što nije kub prirodnog broja,
- $x = 10 \Rightarrow x^3 - 387 = 1000 - 387 = 613$, što nije kub prirodnog broja,
- $x = 11 \Rightarrow x^3 - 387 = 1331 - 387 = 944$, što nije kub prirodnog broja,
- $x = 12 \Rightarrow x^3 - 387 = 1728 - 387 = 1341$, što nije kub prirodnog broja. 2 boda

Uočimo da je $12^3 - 11^3 = 1728 - 1331 = 397 > 387$, što znači da se za $x > 12$ razlika $x^3 - y^3$ veća od 387, tj. ne može biti drugih rješenja. 4 boda

Jedina mogućnost je $x = 8, y = 5$, pa je ukupno upotrijebljeno

$$x^3 + y^3 = 8^3 + 5^3 = 512 + 125 = 637$$

kockica. 1 bod