

Rješenja i smjernice za bodovanje

U smjernicama je naveden samo jedan mogući način rješavanja, a treba priznati i bilo koji drugi ispravan postupak. Boduju se i drugi zapisi ako su u skladu s odabranim referentnim sustavom i napisanim jednadžbama u mjernim jedinicama po slobodnom izboru. Ako su preskočene trivijalne linije koje se boduju, a jednadžbe u nastavku su dobre, priznaju se bodovi kao da je napisano sve. Ne boduju se formule u kojima je upisan kriv iznos neke fizičke veličine. Dodjeljuju se samo cjelobrojni bodovi. Svaka novouvedena veličina treba biti jasno definirana ili označena na skici.

1. zadatak (15 bodova)

Modeliramo vagon s čovjekom kao točkasto tijelo mase  $m = 101.937 \text{ kg}$  koje kruži po kružnici u vertikalnoj ravnini pod djelovanjem centripetalne sile koja je rezultat djelovanja gravitacijske sile i reakcije podloge (tračnica) kružnog tobogana *Big Blue* na tijelo (istaknute crvenkasto na slici).

[4 boda] Prema III. Newtonovu zakonu sile, kojima tijelo pritiska podlogu (plavu kružnicu) na dnu i vrhu,  $\vec{F}_{p1,2}$  (istaknute plavim strelicama) suprotne su reakcijama podloga  $\vec{F}_{r1,2} = -\vec{F}_{p1,2}$ . Dakle, na dnu i vrhu prema II. Newtonovu zakonu vrijedi:

[1 bod]  $F_{r1} - mg = mv_1^2/R,$  (1)

[1 bod]  $-F_{r2} - mg = -mv_2^2/R.$  (2)

Iz zbroja (1) i (2) slijedi poveznica

[1 bod]  $F_{r1} = F_{r2} + 2mg + m(v_1^2 - v_2^2)/R.$  (3)

Ako zanemarimo sile otpora, vrijedi zakon očuvanja energije, odnosno njihova jednakost na vrhu i dnu

[1 bod]  $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$  (4)

što za nultu razinu odabranu na dnu daje

[1 bod]  $0.5mv_1^2 + 0 = 0.5mv_2^2 + 2mgR$

iz čega množeći s  $2/R$  slijedi nepoznati član u (3)

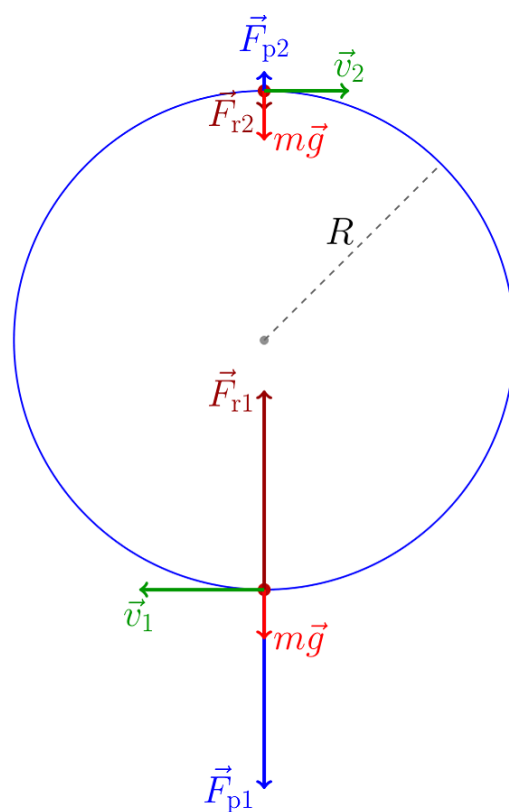
[1 bod]  $m(v_1^2 - v_2^2)/R = 4mg$  čijim uvrštavanjem u (3) dobivamo

[1 bod]  $F_{r1} = F_{r2} + 2mg + 4mg = F_{r2} + 6mg.$

Zbog istih iznosa,  $F_{p1} = F_{r1}, F_{p2} = F_{r2}$  vrijedi

[1 bod]  $F_{p1} = F_{p2} + 6mg = F_{p2} + 6 \text{ kN}.$

[3 boda] Kada sile otpora ne bi bile zanemarive, dio energije potrošio bi se na njihovo savladavanje te bi umjesto (4) vrijedila nejednakost  $E_{k1} + E_{p1} > E_{k2} + E_{p2}$ , odnosno  $F_{p1} > F_{p2} + 6 \text{ kN}$  pri uspinjanju, dok bi zbog gubitka energije pri povratku tijelo postiglo nešto manju brzinu  $v'_1$  pa bi prema (1) bilo  $F'_{r1} < F_{r1}$ , odnosno  $F'_{p1} < F_{p1}$ .



## 2. zadatak (20 bodova)

[1 bod] Neka je ishodište Kartezijeva koordinatnog sustava u  $(x_1, y_1)$ , tj. u prvoj točki sudara s kosinom koja s tlom zatvara kut  $\alpha$ , os  $x$  usmjerena niz kosinu, a os  $y$  okomita na kosinu kao na slici.

Na česticu cijelo vrijeme gibanja djeluje gravitacijska sila:

[3 boda]  $\vec{F}_g = m\vec{g}$ , čije su komponente

$$\vec{F}_{gx} = mg \sin \alpha \hat{i} \text{ te}$$

$$\vec{F}_{gy} = -mg \cos \alpha \hat{j} \text{ pa je ubrzanje čestice}$$

[2 boda]  $\vec{a}_x = \vec{F}_{gx}/m = g \sin \alpha \hat{i}$  te  $\vec{a}_y = \vec{F}_{gy}/m = -g \cos \alpha \hat{j}$ . (1)

Čestica iz mirovanja na visini  $h$  iznad prve točke sudara slobodno pada do sudara u trenutku  $t_1$  pri čemu postiže brzinu

[1 bod]  $v_1 = \sqrt{2gh}$

te se elastično odbije pod istim kutom pod kojim je i upala s obzirom na okomicu na kosinu u točki sudara, što okrene predznak njezinoj komponenti u smjeru  $y$ . Dakle, nakon sudara

[2 boda]  $\vec{v}_{1x} = v_1 \sin \alpha \hat{i}$ ,  $\vec{v}_{1y} = v_1 \cos \alpha \hat{j}$ . (2)

Daljnji dio gibanja analiziramo kao kosi hitac tijekom intervala  $\Delta t_{21} = t_2 - t_1$  s početnom brzinom (2) i ubrzanjem (1), nakon čega se u trenutku  $t_2$  kuglica ponovno elastično sudara s kosinom, pa vrijedi

[1 bod]  $(y_2 = 0) = v_{1y} \cdot \Delta t_{21} + 0.5 \cdot a_y \cdot \Delta t_{21}^2$

$$0 = v_1 \cos \alpha \cdot \Delta t_{21} - 0.5 \cdot g \cos \alpha \cdot \Delta t_{21}^2 \text{ što možemo podijeliti s } \cos \alpha \cdot \Delta t_{21} \neq 0 \text{ pa slijedi}$$

[1 bod]  $\Delta t_{21} = 2v_1/g$  tijekom kojega se čestica duž kosine pomakne za

[1 bod]  $\Delta x_{21} = v_{1x} \cdot \Delta t_{21} + 0.5 \cdot a_x \cdot \Delta t_{21}^2 = v_1 \sin \alpha \cdot (2v_1/g) + 0.5 \cdot g \sin \alpha \cdot (2v_1/g)^2$

[1 bod]  $\Delta x_{21} = (2v_1^2/g + 2v_1^2/g) \sin \alpha = (4v_1^2/g) \sin \alpha = 8h \sin \alpha$ .

Sličan je nastavak gibanja, kosi hitac tijekom intervala  $\Delta t_{32} = t_3 - t_2$  do trećeg sudara u trenutku  $t_3$  s akceleracijom (1) i početnim brzinama na završetku prvog hitca, uz okretanje predznaka komponenti brzine u smjeru  $y$  zbog sudara

[1 bod]  $v_{2x} = v_{1x} + a_x \cdot \Delta t_{21} = v_1 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot \left(\frac{2v_1}{g}\right) = 3v_1 \sin \alpha$ ,

[1 bod]  $v_{2y} = -[v_{1y} + a_y \cdot \Delta t_{21}] = -\left[v_1 \cos \alpha - g \cos \alpha \cdot \left(\frac{2v_1}{g}\right)\right] = v_1 \cos \alpha$ .

[1 bod]  $(y_3 = 0) = v_{2y} \cdot \Delta t_{32} + 0.5 \cdot a_y \cdot \Delta t_{32}^2$

$$0 = v_1 \cos \alpha \cdot \Delta t_{32} - 0.5 \cdot g \cos \alpha \cdot \Delta t_{32}^2 \text{ što možemo podijeliti s } \cos \alpha \cdot \Delta t_{32} \neq 0 \text{ pa slijedi}$$

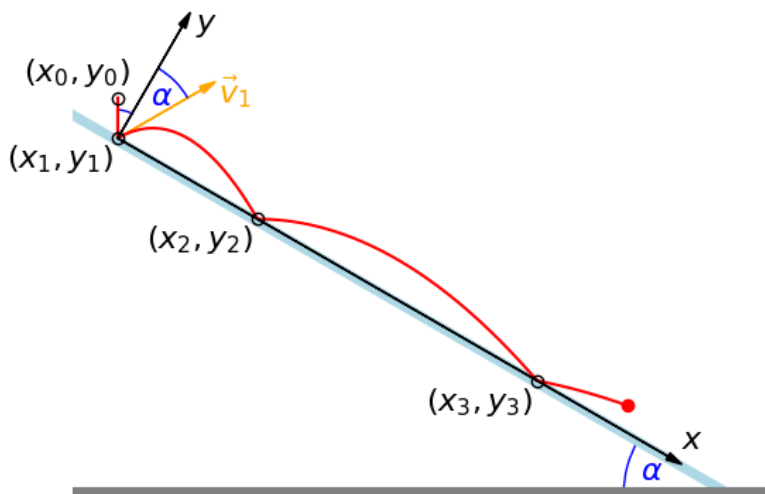
[1 bod]  $\Delta t_{32} = 2v_1/g$  tijekom kojega se čestica duž kosine pomakne za

[1 bod]  $\Delta x_{32} = v_{2x} \cdot \Delta t_{32} + 0.5 \cdot a_x \cdot \Delta t_{32}^2 = 3v_1 \sin \alpha \cdot (2v_1/g) + 0.5 \cdot g \sin \alpha \cdot (2v_1/g)^2$

[1 bod]  $\Delta x_{32} = (6v_1^2/g + 2v_1^2/g) \sin \alpha = (8v_1^2/g) \sin \alpha = 16h \sin \alpha$ .

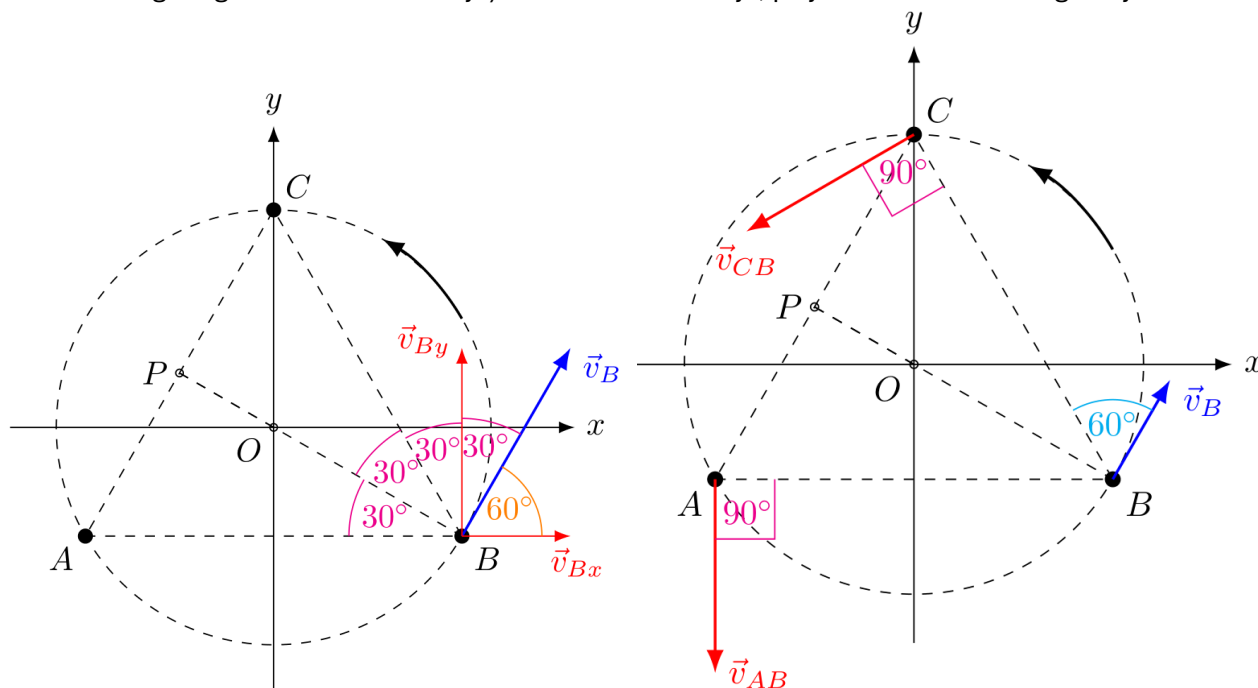
Dakle, udaljenosti između točaka sudara odnose se kao

[1 bod]  $\Delta x_{32} : \Delta x_{21} = (8v_1^2/g) \sin \alpha : (4v_1^2/g) \sin \alpha = 16h \sin \alpha : 8h \sin \alpha = 2 : 1 \Rightarrow \Delta x_{32} = 2\Delta x_{21}$ .



### 3. zadatak (15 bodova)

Modeliramo satelite kao točkasta tijela  $A, B, C$  međusobno udaljena za  $L = |AB| = |AC| = |BC| = 5 \cdot 10^9$  m tako da tvore jednakostranični trokut  $ABC$  dok mu njihova putanja opisuje kružnicu promatrano iz ravnine u kojoj leži trokut (sustava koji se nagnut giba duž orbite Zemlje) kao na slikama dolje, pa je relevantno samo gibanje u ravnini.



Radijus kružnice opisane trokutu  $ABC$  možemo izraziti primjerice iz jednakostraničnog trokuta  $O'OB$  gdje je  $O'$  osnosimetrična pravcu  $BC$  pa mu je visina polovica dužine  $\overline{BC}$ ,

[1 bod]  $L/2 = R\sqrt{3}/2 \Rightarrow R = L/\sqrt{3}.$

Sateliti okruže opisanu kružnicu za

[1 bod]  $T = 365 \text{ d } 6 \text{ h } 9 \text{ min } 9.76 \text{ s} = 365.256363 \text{ d} = 31558149.76 \text{ s}$

pa njihova kružna frekvencija

[1 bod]  $\omega = 2\pi/T \approx 1.99099 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$

odnosno brzine iznose

[1 bod]  $v = v_A = v_B = v_C = \omega R = \omega L/\sqrt{3} \approx 574.75 \text{ m s}^{-1}.$

Brzinu satelita  $B$  rastavimo na komponente kao na lijevoj slici

[1 bod]  $\vec{v}_B = v \cos 60^\circ \hat{i} + v \sin 60^\circ \hat{j} = 0.5v\hat{i} + 0.5\sqrt{3}v\hat{j} \approx 287\hat{i} + 498\hat{j}.$

Slično dobijemo:

[1 bod]  $\vec{v}_A = v \cos 60^\circ \hat{i} - v \sin 60^\circ \hat{j} = 0.5v\hat{i} - 0.5\sqrt{3}v\hat{j},$

[1 bod]  $\vec{v}_C = -v\hat{i}.$

Tada relativne brzine gibanja iznose

[1 bod]  $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = -v\sqrt{3}\hat{j} \approx 995.5\hat{j},$

[1 bod]  $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = -\vec{v}_{AB},$

[1 bod]  $\vec{v}_{CB} = \vec{v}_C - \vec{v}_B = -1.5v\hat{i} - 0.5\sqrt{3}v\hat{j} \approx 862\hat{i} + 498\hat{j}.$

[3 boda] Na slici desno strelicama su prikazani vektori brzina  $\vec{v}_B, \vec{v}_{AB}$  i  $\vec{v}_{CB}$

[2 boda] s označenim kutovima  $60^\circ$  i  $90^\circ$  ili relevantnim drugim.

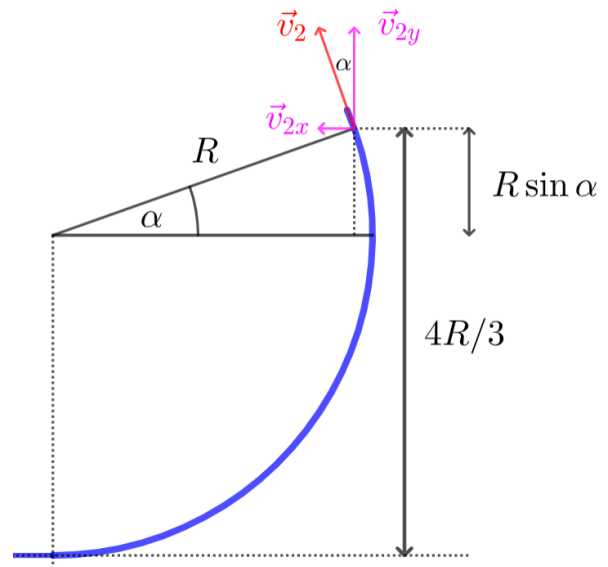
#### 4. zadatak (20 bodova)

Promatramo točkasto tijelo čija je ukupna mehanička energija očuvana jer su sile otpora zanemarive. Kao nultu razinu za računanje potencijalne energije odabiremo najnižu točku putanje u razini tla. Tijelo u početnom trenutku ( $t_0 = 0$ ) miruje ( $v_0 = 0$ ), pa mu je ukupna energija jednaka gravitacijskoj potencijalnoj energiji

[1 bod] na visini  $h_0 = 1.5R$ ,

[1 bod]  $E = mgh_0 = 1.5mgR$ . (1)

Tijelo ubrzava niz kosine te se po ravnom dijelu staze giba maksimalnom brzinom  $v_1$  (ukupna energija jednaka je kinetičkoj) nakon čega usporava duž kružne putanje



(kinetička se energija pretvara u gravitacijsku potencijalnu) i odvaja se od kružne putanje u trenutku  $t_2$ , kao što je prikazano na slici kada reakcija podloge  $F_r$  iščezava, a brzinu tijela  $v_2$  možemo odrediti iz centripetalne sile čiju ulogu igra komponenta gravitacijske sile usmjerena prema središtu kružnice:

[1 bod]  $F_{cp} = (F_r = 0) + mg \sin \alpha$

[1 bod]  $mv_2^2/R = mg \sin \alpha$

[1 bod]  $v_2^2 = Rg \sin \alpha$ . (2)

[2 boda] Kada se tijelo nalazi na visini  $R + R \sin \alpha$  (slijedi iz pravokutnog trokuta na slici), ukupna energija (1) u trenutku  $t_2$  iznosi

[1 bod]  $mgh_0 = mgR(1 + \sin \alpha) + 0.5mv_2^2$

[1 bod]  $v_2^2 = 2g[h_0 - R(1 + \sin \alpha)]$ . (3)

Izjednačavanjem (2) i (3) eliminiramo brzinu

[1 bod]  $Rg \sin \alpha = 2gh_0 - 2gR - 2gR \sin \alpha$

[1 bod]  $3Rg \sin \alpha = 2g(h_0 - R)$

[1 bod]  $\sin \alpha = 2(1.5R - R)/(3R) = 1/3$ . (4)

Uvrštavanjem (4) u (2) slijedi kvadrat brzine

[1 bod]  $v_2^2 = Rg/3$ .

Iz zakona očuvanja energije možemo procijeniti visinu odvajanja

[1 bod]  $mgh_0 = mgh_2 + 0.5mv_2^2 \Rightarrow h_2 = 3R/2 - R/6 \Rightarrow h_2 = 4R/3 = 1.3R$

što potvrđuje da se tijelo odvaja prije završetka kružnog luka kao na gornjoj slici.

[1 bod] Dakle, tijelo se dalje giba kao u kosom hitcu, odnosno njegova se visina povećava dok ne iščezne vertikalna komponenta brzine pa u tom trenutku  $t_3$  kinetičkoj energiji pridonosi samo horizontalna komponenta brzine  $v_3 = v_{2x}$  koja se u odsutnosti otpora ne mijenja u odnosu na iznos u trenutku  $t_2$  te

[2 boda] prema rastavu na slici njezin kvadrat iznosi

[1 bod]  $v_3^2 = v_{2x}^2 = (Rg/3) \sin^2 \alpha = Rg/27$ .

Primjenom zakona očuvanja energije u trenutku  $t_0$  (1) i  $t_3$  slijedi maksimalna visina  $h_3$

[1 bod]  $mgh_0 = mgh_3 + 0.5mv_3^2$

[1 bod]  $h_3 = 3R/2 - R/54 = 40R/27 = 1.481R = 1.481 \text{ m}$ .