

Državno natjecanje iz fizike, šk. god. 2024./2025.
Srednja škola, 4. skupina
(6. 5. 2025.)

RJEŠENJA I SMJERNICE ZA BODOVANJE

Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici zadatak riješe na drugačiji, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. a) Iz zakona očuvanja energije imamo

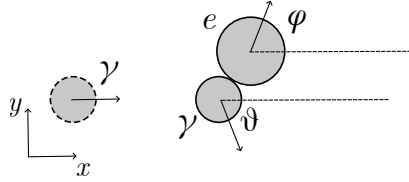
$$E_0 + m_e c^2 = E + T + m_e c^2 \Rightarrow E = E_0 + T, \quad (2 \text{ boda}) \quad (1)$$

gdje su E_0 i E redom energije fotona prije i nakon raspršenja, a T kinetička energija elektrona nakon sudara. Zakon očuvanja količine gibanja pak kaže

$$x: \quad \frac{E_0}{c} = p \cos \phi + \frac{E}{c} \cos \theta \quad (2)$$

$$y: \quad 0 = p \sin \phi - \frac{E}{c} \sin \theta, \quad (3 \text{ boda ukupno}) \quad (3)$$

pri čemu smo koordinatni sustav orijentirali i kutove definirali kao na priloženoj skici, p je količina gibanja elektrona nakon raspršenja te smo iskoristili da za foton općenito vrijedi $p_f = E_f/c$.



Slijedi

$$p^2 \sin^2 \phi = \left(\frac{E}{c} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (4)$$

$$p^2 \cos^2 \phi = \left(\frac{E_0}{c} - \frac{E}{c} \cos \theta \right)^2. \quad (5)$$

Zbrajanjem i množenjem s c^2 imamo

$$p^2 c^2 = E_0^2 - 2E_0 E \cos \theta + E^2. \quad (1 \text{ bod}) \quad (6)$$

S druge strane, vrijedi

$$E^2 = (m_e c^2)^2 + p^2 c^2 = (m_e c^2 + T)^2 = (m_e c^2)^2 + 2m_e c^2 T + T^2 \Rightarrow p^2 c^2 = 2m_e c^2 T + T^2. \quad (2 \text{ boda}) \quad (7)$$

Usporedbom zadnjih dvaju izraza te iskorištavanjem (1) slijedi

$$E_0^2(1 - \cos \theta) - E_0 T(1 - \cos \theta) - m_e c^2 T = 0. \quad (1 \text{ bod}) \quad (8)$$

Budući da promatramo kutove $\theta \neq 0$, jednadžbu možemo podijeliti s $(1 - \cos \theta)$ te dobivamo rješenja

$$E_0 = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{2} \right)^2 + \frac{m_e c^2 T}{1 - \cos \theta}}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (9)$$

Za postojeći foton vrijedi $E_0 > 0$ pa zadržavamo samo rješenje

$$E_0 = \frac{T}{2} + \sqrt{\left(\frac{T}{2} \right)^2 + \frac{m_e c^2 T}{1 - \cos \theta}}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (10)$$

U ovaj izraz uvrštavamo zadane vrijednosti $\theta = 120^\circ$ i $T = 0.45 \text{ MeV}$ te dobivamo

$$E_0 \approx 0.677 \text{ MeV} . \quad (1 \text{ bod}) \quad (11)$$

b) Granična energija za stvaranje para elektron-pozitron (nazovimo ju E_0^*) odgovara njihovu nastajanju u mirovanju, tj.

$$E_0^* = 2m_e c^2 . \quad (1 \text{ bod}) \quad (12)$$

Budući da je

$$\frac{E_0}{E_0^*} \approx 0.662 < 1 , \quad (1 \text{ bod}) \quad (13)$$

zaključujemo da energija fotona iz a) dijela zadatka nije dovoljna za stvaranje para.

c) U zadatku je rečeno da ovdje količinu gibanja i kinetičku energiju elektrona možemo povezati nerelativistički, tako da je

$$p = \sqrt{2m_e T} . \quad (1 \text{ bod}) \quad (14)$$

U vanjskom magnetskom polju jakosti B na elektron djeluje Lorentzova sila, čiji je iznos u slučaju polja okomitog na smjer brzine v jednak $Bv|e|$. Ova sila služi kao centripetalna sila pri kružnom gibanju pa imamo

$$\frac{m_e v^2}{r} = Bv|e| , \quad (1 \text{ bod}) \quad (15)$$

gdje je r traženi radijus. Uz $p = m_e v$ slijedi

$$r = \frac{p}{B|e|} = \frac{\sqrt{2m_e T}}{B|e|} . \quad (1 \text{ bod}) \quad (16)$$

Uvrštavanjem $T = 0.45 \text{ MeV}$, $B = 0.12 \text{ T}$ te konstanti, dobivamo

$$r \approx 1.89 \text{ cm} . \quad (1 \text{ bod}) \quad (17)$$

2. a) Izjednačavamo privlačnu kulonsku silu između jezgre naboja $Z|e|$ i elektrona naboja e s centripetalnom silom:

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} , \quad (18)$$

gdje je r_n radijus dopuštene kružne orbite, a v_n brzina elektrona na toj orbiti. Slijedi da je

$$m_e v_n^2 r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} , \quad (2 \text{ boda}) \quad (19)$$

a, s druge strane,

$$m_e v_n^2 r_n = (m_e v_n r_n) v_n = (r_n p_n) v_n = n\hbar v_n , n \in \mathbb{N} , \quad (20)$$

gdje smo u posljednjem koraku iskoristili zadani uvjet kvantizacije. Konačno imamo

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} . \quad (2 \text{ boda}) \quad (21)$$

Dalje slijedi

$$r_n = \frac{n\hbar}{m_e v_n} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \frac{n^2}{Z} . \quad (1 \text{ bod}) \quad (22)$$

Energija je dana kao zbroj potencijalne energije

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{(Ze^2)^2 m_e}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} \quad (1 \text{ bod}) \quad (23)$$

i kinetičke energije

$$T = \frac{m_e v_n^2}{2} = \frac{(Ze^2)^2 m_e}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} \cdot \quad (1 \text{ bod}) \quad (24)$$

Konačno imamo

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \cdot \quad (1 \text{ bod}) \quad (25)$$

Primijetite da ako stavimo $Z = 1$ i $n = 1$, imamo energiju osnovnog stanja vodika pa gornji izraz možemo elegantnije pisati kao

$$E_n = E_1^{(H)} \frac{Z^2}{n^2} \cdot \quad (26)$$

b) Iz gore pronađenog izraza slijedi da je valna duljina λ_n fotona emitiranog pri prijelazu iz n -tog u osnovno stanje dana s

$$\frac{hc}{\lambda_n} = Z^2 I_H \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (1 \text{ bod}) \quad (27)$$

gdje je $I_H = -E_1^{(H)}$. Iz toga zaključujemo da su valne duljine dvaju susjednih prijelaza povezane preko

$$\frac{hc}{\lambda_{n+1}} - \frac{hc}{\lambda_n} = Z^2 I_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot \quad (1 \text{ bod}) \quad (28)$$

Izraz u zagradi s desne strane možemo pojednostaviti na sljedeći način:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \stackrel{n \gg 1}{\approx} \frac{2}{n^3}, \quad (29)$$

pa imamo

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_n} = \frac{2Z^2 I_H}{hc} \frac{1}{n^3} \cdot \quad (2 \text{ boda}) \quad (30)$$

Ako definiramo da je

$$\delta\lambda = \lambda_n - \lambda_{n+1} \Rightarrow \lambda_{n+1} = \lambda_n - \delta\lambda, \quad (31)$$

gornji izraz prelazi u

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{1}{1 - \delta\lambda/\lambda_n} - 1\right) \approx \frac{1}{\lambda_n} \left(1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda_n} - 1\right), \quad (32)$$

gdje smo u posljednjem koraku iskoristili $(1+x)^n \approx 1+nx$ za $x \ll 1$. Usporedbom s (30) imamo

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_n^2} = \frac{2Z^2 I_H}{hcn^3} \cdot \quad (2 \text{ boda}) \quad (33)$$

tj.

$$\frac{\lambda_n^2}{\delta\lambda} = \frac{hcn^3}{2Z^2 I_H} \cdot \quad (34)$$

S druge strane, razlučivost difrakcijske rešetke dana je s

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN, \quad (2 \text{ boda}) \quad (35)$$

gdje je k red difrakcije, a N broj pukotina. To možemo raspisati na sljedeći način:

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = k \frac{l}{d} = k\lambda \cdot \frac{l}{d\lambda} = d \sin \theta \cdot \frac{l}{\lambda d} \Rightarrow \theta = \arcsin \left(\frac{\lambda^2}{l \delta\lambda} \right), \quad (2 \text{ boda}) \quad (36)$$

gdje je l širina rešetke, a d konstanta rešetke, tj. udaljenost između susjednih pukotina. U našem slučaju vrijedi izraz (34) pa je

$$\theta = \arcsin \left(\frac{1}{l} \cdot \frac{hcn^3}{2Z^2 I_H} \right). \quad (37)$$

Uvrštavanjem $Z = 3$, $l = 6.6 \text{ mm}$, $n = 100$ te konstanti dobivamo

$$\theta \approx 50^\circ. \quad (1 \text{ bod}) \quad (38)$$

3. a) Iz zakona očuvanja količine gibanja imamo

$$m(^4\text{He}) v_a = p_f, \quad p_f = \frac{E_f}{c}. \quad (2 \text{ boda}) \quad (39)$$

Energija fotona odgovara prijelazu iz osnovnog stanja ($n = 1$) u drugo pobuđeno stanje ($n = 3$), što uz $Z = 2$ daje:

$$E_f = 4I_H(1 - 1/9) = \frac{32}{9}I_H. \quad (1 \text{ bod}) \quad (40)$$

Budući da jezgra helija 4 ima četiri nukleona, $m(^4\text{He}) \approx 4u$ pa slijedi

$$v_a = \frac{32}{9} \frac{I_H}{4uc}, \quad (1 \text{ bod}) \quad (41)$$

tj.

$$v_a \approx 3.89 \text{ m s}^{-1}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (42)$$

b) Ion koji putuje prema laseru frekvencije f_S uslijed Dopplerova pomaka vidi frekvenciju (u uputi zadatka rečeno je da problem promatramo nerelativistički)

$$f_V = \left(1 + \frac{v_b}{c}\right) \cdot f_S, \quad (2 \text{ boda}) \quad (43)$$

gdje je v_b brzina iona. Ta frekvencija pobuđuje prijelaz iz osnovnog u treće pobuđeno stanje ($n = 4$), tako da je

$$f_V = \frac{4I_H}{h}(1 - 1/16) = \frac{15I_H}{4h}. \quad (2 \text{ boda}) \quad (44)$$

Slijedi da je stvarna frekvencija lasera

$$f_S = \frac{15I_H}{4h} \left(1 + \frac{v_b}{c}\right)^{-1}. \quad (45)$$

Uvrštavanjem $v_b = 10^5 \text{ m s}^{-1}$ imamo

$$f_S \approx 1.233 \times 10^{16} \text{ Hz}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (46)$$

Preostalo nam je naći brzinu iona nakon apsorpcije $N_f = 1000$ ovakvih fotona. U principu svaka apsorpcija malo usporava ion pa će se i Dopplerov pomak mijenjati. Međutim, u zadatku je rečeno da to zanemarimo pa, analogno zadatku a), imamo

$$v'_b = v_b - \frac{N_f h f_V}{m(^4\text{He})c} = v_b - \frac{15N_f I_H}{16uc}. \quad (2 \text{ boda}) \quad (47)$$

Uvrštavanjem imamo

$$v'_b \approx 95\,900 \text{ m s}^{-1}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (48)$$

c) Ako se ion udaljava od lasera, Dopplerov je pomak u suprotnom smjeru pa ion vidi frekvenciju

$$f_{V2} = f_S \left(1 - \frac{v_b}{c}\right). \quad (1 \text{ bod}) \quad (49)$$

U našem slučaju taj iznos je

$$f_{V2} \approx 1.232 \times 10^{16} \text{ Hz}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (50)$$

Za tipičnu širinu linije $\Delta f = 100 \text{ MHz}$ vrijedi

$$\frac{f_V - f_{V2}}{\Delta f} \approx 10^5. \quad (1 \text{ bod}) \quad (51)$$

Zaključujemo da laser od kojeg se ion udaljava ne pridonosi hlađenju jer je njegova percipirana frekvencija mnogo linija udaljena od frekvencije prijelaza pa ne dolazi do apsorpcije (1 bod).

d) Naknadna emisija ne onemogućava hlađenje opisanom metodom jer se fotoni emitiraju u nasumičnom smjeru pa je prosječna brzina koju ion dobije jednaka nuli (1 bod).

4. a) Reakcija glasi



Energiju oslobođenu u reakciji, Q , računamo iz razlike masa reaktanata i produkata,

$$Q = [m({}^{235}\text{U}) + m_n - m({}^{140}\text{Xe}) - m({}^{94}\text{Sr}) - 2m_n]c^2. \quad (1 \text{ bod}) \quad (53)$$

Uz aproksimaciju $m_n \approx u$, uvrštavanjem zadanih masa jezgara imamo

$$Q \approx 190 \text{ MeV} \approx 3 \times 10^{-11} \text{ J}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (54)$$

b) Apsorpcija neutrona odgovara reakciji



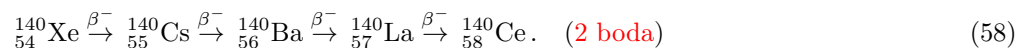
gdje * označava da je nastala jezgra u pobuđenom stanju. Energija pobuđenja jezgre dana je s

$$\Delta E^* = [m({}^{235}\text{U}) + m_n - m({}^{236}\text{U})]c^2, \quad (1 \text{ bod}) \quad (56)$$

gdje je $m({}^{236}\text{U})$ masa nepobuđenog stanja. Uvrštavanjem slijedi

$$\Delta E^* \approx 1.0458 \times 10^{-12} \text{ J} \approx 6.53 \text{ MeV}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (57)$$

c) Odgovarajući lanac β^- -raspada je



Energija oslobođena u jednom ovakvom lancu prema uvjetima zadatka jednaka je $Q_\beta = 15 \text{ MeV}$. Omjer snage oslobođene u β^- -raspadima i ukupne oslobođene snage tada je dan s

$$\eta_\beta = \frac{Q_\beta}{Q + Q_\beta}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (59)$$

Ukupna oslobođena snaga P_O dana je omjerom korisne snage $P_K = 1000 \text{ MW}$ i korisnosti elektrane $\eta = 1/3$,

$$P_O = P_K / \eta. \quad (1 \text{ bod}) \quad (60)$$

Slijedi da je ukupna snaga oslobođena nakon zaustavljanja fisije, tj. ukupna snaga oslobođena u β^- -raspadima, jednaka

$$P_\beta = \frac{Q_\beta}{Q + Q_\beta} \frac{P_K}{\eta}, \quad (1 \text{ bod}) \quad (61)$$

što uvrštavanjem daje

$$P_\beta \approx 220 \text{ MW}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (62)$$

d) Broj jezgara urana raspadnutih u $\Delta t = 1 \text{ god}$ jednak je

$$N = \frac{P_O \Delta t}{Q + Q_\beta}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (63)$$

Ukupna masa utrošenog urana time je

$$m = Nm(^{235}\text{U}) \approx 1125 \text{ kg}. \quad (1 \text{ bod}) \quad (64)$$