

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

## 3. SKUPINA ZADATAKA

ŠKOLSKA GODINA 2024./2025.

**Upute za bodovanje:** Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak na drugačiji, ali fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

**Zadatak 1. (19 bodova)**

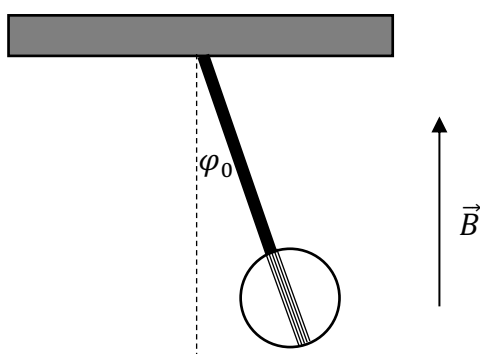
Homogena kugla mase  $M_k = 20\text{ g}$  i polumjera  $r = 5\text{ cm}$  visi na krutoj homogenoj šipci mase  $m = 100\text{ g}$  i duljine  $L = 20\text{ cm}$  zanemarujuće debljine. Oko opsega kugle (vidi sliku) namotano je 100 paralelnih, gusto namotanih zavoja bakrene žice mase  $m_z = 30\text{ g}$ . Krajevi žice su spojeni tako da čine zatvorenu petlju. Kugla i šipka načinjeni su od izolatora.

Šipka je za strop pričvršćena tako da se može slobodno njihati u vertikalnom magnetskom polju jakosti  $2\text{ T}$ . Ukupni otpor 100 zavoja bakrene žice iznosi  $4\ \Omega$ .

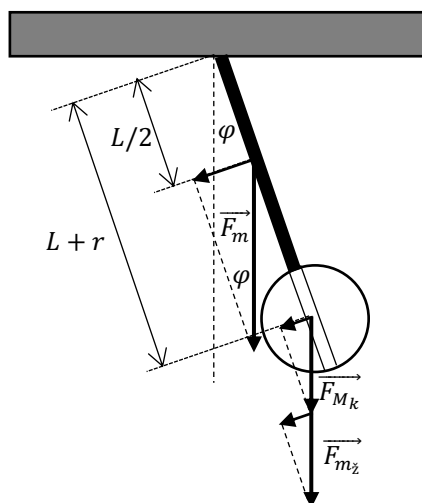
Šipku otklonimo za mali kut  $\varphi_0 = 5^\circ$  i pustimo da njiše.

- Odredite period njihala.
- Odredite srednju struju koja se inducira u bakrenoj žici u periodu od trenutka kada smo šipku otklonili i pustili da njiše do trenutka kada je šipka po prvi puta postigla najveću brzinu.
- Odredite srednju struju koja se inducira u bakrenoj žici u periodu od trenutka kada smo šipku otklonili i pustili da njiše do trenutka  $t = T/8$ , gdje je  $T$  perioda njihala.

Primijenite aproksimaciju malih kutova  $\sin \alpha \approx \alpha$

**Rješenje**

Za odrediti period njihala, potrebno je pronaći sile i momente sila na štap, kuglu i prsten kojeg čini 100 paralelnih namotaja žice. Nacrtajmo sile koje djeluju na njihalo.



Sile koje na njih djeluju su sile teže:

$$\begin{aligned} F_m &= mg \\ F_{M_k} &= M_k g \\ F_{m_z} &= m_z g \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Za mali pomak šipke pod kutom  $\varphi$ , momenti sila oko ovjesišta su:

$$\begin{aligned} M_m &= -mg \frac{L}{2} \sin \varphi & 1 \text{ bod} \\ M_{M_k} &= -M_k g (L + r) \sin \varphi & 1 \text{ bod} \\ M_{m_z} &= -m_z g (L + r) \sin \varphi & 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

Ukupan moment sile uzrokuje rotaciju njihala kutnim ubrzanjem  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} I\alpha &= M_{uk} \\ I\alpha &= -mg \frac{L}{2} \sin \varphi - M_k g (L + r) \sin \varphi - m_z g (L + r) \sin \varphi \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Za male kutove odklona njihala vrijedi  $\sin \varphi \approx \varphi$ , što je približno točno i za  $\varphi = 5^\circ$ :

$$I\alpha \approx - \left[ mg \frac{L}{2} + (M_k + m_z) g (L + r) \right] \varphi \quad 1 \text{ bod}$$

Gornja jednačba odgovara jednačbi jednostavnog harmoničkog oscilatora:

$$\alpha = -\omega^2 \varphi$$

gdje je:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mg \frac{L}{2} + (M_k + m_z) g (L + r)}{I}} \quad 1 \text{ bod}$$

Potrebno je još odrediti moment inercije njihala koji se sastoji od šipke, kugle i N prstena.

Moment inercije šipke (štapa) oko jednog od dva kraja:

$$I_m = \frac{1}{3} mL^2 = 1.333 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad 1 \text{ bod}$$

Moment inercije kugle ( $d = L + r$  je udaljenost središta kugle do ovjesišta):

$$I_{M_k} = \frac{2}{5} M_k r^2 + M_k d^2 = M_k \left[ \frac{2}{5} r^2 + (r + L)^2 \right] = 1.27 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad 1 \text{ bod}$$

Moment inercije prstena bakrene žice ukupne mase  $m_z$  (svaki od 100 namotaja jednako doprinosi momentu inercije):

$$I_{m_z} = \frac{1}{2} m_z r^2 + m_z d^2 = m_z \left[ \frac{r^2}{2} + (r + L)^2 \right] = 1.9125 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \quad 1 \text{ bod}$$

Ukupni moment inercije:

$$I = 4.5158 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

Konačno je period:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} mL^2 + M_k \left[ \frac{2}{5} r^2 + (r + L)^2 \right] + m_z \left[ \frac{r^2}{2} + (r + L)^2 \right]}{mg \frac{L}{2} + (M_k + m_z) g (L + r)}} \\ T &= 0.8987 \text{ s} \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Elektromotorni napon koji se inducira u N zavoja bakrene žice:

$$U = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad 1 \text{ bod}$$

Magnetski se tok u vremenu  $t$  mijenja kao (mijenja se samo površina  $A_{\perp}$  petlje bakrene žice kroz koju okomito prolazi magnetsko polje):

$$\Phi(t) = B \cdot A_{\perp}(t)$$

Okomita komponenta plohe prstenova žice kroz koju prolazi magnetsko polje mijenja se kao:

$$A_{\perp}(t) = r^2 \pi \sin \varphi(t) \quad 1 \text{ bod}$$

gdje je  $\varphi(t)$  kut otklona šipke od ravnotežnog položaja, a koji se mijenja kao:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \frac{2\pi t}{T} \quad 1 \text{ bod}$$

gdje je  $\varphi_0 = 5^\circ$

Srednja inducirana struja iznosi:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{N B \Delta A_{\perp}}{R \Delta t} \quad 1 \text{ bod}$$

Šipka i njhalo postižu najveću brzinu gibanja kada je  $\varphi(t) = 0$ , odnosno u trenutku kada je  $t = T/4$ :

$$I = \frac{U}{R} = \frac{N B |A_{\perp}(T/4) - A_{\perp}(0)|}{R \frac{T}{4}}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{N 4 B r^2 \pi \sin \varphi_0}{R T} \approx \frac{N 4 B r^2 \pi \varphi_0}{R T}$$

$$I = 0.152 \text{ A} \quad 1 \text{ bod}$$

Slično, u c) dijelu zadatka:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{N B |A_{\perp}(T/8) - A_{\perp}(0)|}{R \frac{T}{8}}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{N 8 B r^2 \pi \left| \sin \left[ \varphi_0 \cos \frac{2\pi T}{T} \frac{1}{8} \right] - \sin \varphi_0 \right|}{R T}$$

$$I = \frac{N 8 B r^2 \pi \left| \sin \left[ \varphi_0 \cos \frac{\pi}{4} \right] - \sin \varphi_0 \right|}{R T} \approx \frac{N 8 B r^2 \pi \left| \varphi_0 \cos \frac{\pi}{4} - \varphi_0 \right|}{R T}$$

$$I \approx \frac{N 8 B r^2 \pi \varphi_0 \left| \cos \frac{\pi}{4} - 1 \right|}{R T} = \frac{N 8 B r^2 \pi \varphi_0 \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right|}{R T} = \frac{N 4 B r^2 \pi \varphi_0 (2 - \sqrt{2})}{R T}$$

$$I = 0.089 \text{ A} \quad 2 \text{ boda}$$

**NAPOMENA:** Rezultat za inducirani elektromotorni napon potrebno je uvažiti bez obzira na predznak

**Zadatak 2. (16 bodova)**

Trčite konstantnom brzinom 7.2 km/h uz rub ceste, te vas sustižu kola hitne pomoći s upaljenom sirenom. Pred vama se nalazi vertikalno brdo i ulaz u tunel. Osim što čujete zvuk sirene kola hitne pomoći frekvencije  $f_1$ , čujete i zvuk jeke sirene zbog odbijanja zvuka o brdo ispred vas, no nešto drugačije frekvencije  $f_2$ . Zbog bliskih frekvencija zvuka sirene  $f_1$  i  $f_2$  čujete udare frekvencije  $f_u = |f_1 - f_2| = 8$  Hz. Prije ulaska u tunel, kola hitne pomoći vas preteknu i tada se udari više ne čuju, no čujete dva tona (zvuka) sirene čije se frekvencije razlikuju za 100 Hz. Pretpostavite da se vi i kola hitne pomoći gibate cijelo vrijeme konstantnom brzinom. Brzina zvuka u zraku iznosi 340 m/s. Odredite brzinu kola hitne pomoći i frekvenciju zvuka sirene koju biste čuli da mirujete i vi i kola hitne pomoći.

**Rješenje.**

Kada se kola hitne pomoći gibaju konstantnom brzinom  $v_{hp}$  i emitiraju zvuk sirene frekvencije  $f_0$  i brzine  $v$ , promatrač koji se giba brzinom  $v_p$  čuje zvuk sirene frekvencije (promatrač i izvor zvuka se gibaju u istom smjeru):

$$f_1 = \frac{v - v_p}{v - v_{hp}} f_0 \quad 2 \text{ boda}$$

Zvuk emitiran iz vozila hitne pomoći dolazi do brda koje miruje kao opažač, pa je frekvencija zvuka koja se reflektira od brda jednaka:

$$f' = \frac{v}{v - v_{hp}} f_0 \quad 2 \text{ boda}$$

Brdo je sada izvor zvuka frekvencije  $f'$  prema kojem se giba promatrač brzinom  $v_p$ . Frekvencija zvuka jeke sirene kojeg čuje promatrač je:

$$f_2 = \frac{v + v_p}{v} f' = \frac{v + v_p}{v} \cdot \frac{v}{v - v_{hp}} f_0 \quad 1 \text{ bod}$$

$$f_2 = \frac{v + v_p}{v - v_{hp}} f_0 \quad 1 \text{ bod}$$

Udari koje čuje promatrač (trkač) imaju frekvenciju:

$$f_u = |f_1 - f_2| = \left| \frac{v - v_p}{v - v_{hp}} f_0 - \frac{v + v_p}{v - v_{hp}} f_0 \right| = \frac{2v_p}{v - v_{hp}} f_0 \quad 1 \text{ bod}$$

Kada kola hitne pomoći preteknu promatrača (trkača), izvor zvuka sirene giba se od promatrača. Promatrač stoga sada čuje frekvenciju zvuka sirene:

$$f'_1 = \frac{v + v_p}{v + v_{hp}} f_0 \quad 2 \text{ boda}$$

Frekvencija zvuka jeke sirene kojeg čuje promatrač (trkač) i dalje je nepromijenjena:

$$f'_2 = f_2 = \frac{v + v_p}{v - v_{hp}} f_0 \quad 1 \text{ bod}$$

Promatrač sada čuje dva tona (zvuka) sirene čije se frekvencije razlikuju za:

$$\Delta f = |f'_1 - f'_2| = \left| \frac{v + v_p}{v + v_{hp}} f_0 - \frac{v + v_p}{v - v_{hp}} f_0 \right|$$

$$\Delta f = \left| \frac{(v + v_p)(v - v_{hp} - v - v_{hp})}{v^2 - v_{hp}^2} \right| f_0 = \frac{2v_{hp}(v + v_p)}{v^2 - v_{hp}^2} f_0 \quad 2 \text{ boda}$$

Ako podijelimo relacije za  $f_u$  i  $\Delta f$ , dobijemo:

$$\frac{f_u}{\Delta f} = \frac{v_p}{v_{hp}} \frac{v + v_{hp}}{v + v_p}$$

Riješimo po brzini kola hitne pomoći (izvor zvuka):

$$v_{hp} = \frac{v_p v}{\frac{f_u}{\Delta f} v - v_p \left(1 - \frac{f_u}{\Delta f}\right)} \quad 2 \text{ boda}$$

$$v_{hp} = 26.81 \text{ m/s} = 96.53 \text{ km/h}$$

Frekvenciju zvuka sirene možemo dobiti iz relacija za  $f_u$  ili  $\Delta f$ :

$$f_0 = \frac{v - v_{hp}}{2v_p} f_u \quad 2 \text{ boda}$$

$$f_0 = 626.38 \text{ Hz}$$

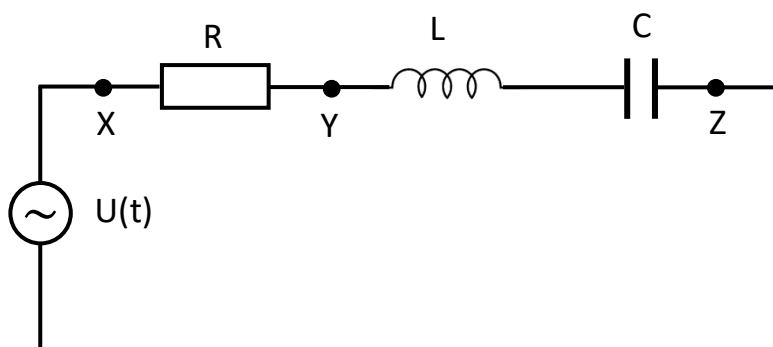
### Zadatak 3. (19 bodova)

Serijski RLC krug se može koristiti kao uskopojasni propusan ili nepropusan elektronički filter. Elektronički filtri su sklopovi koji na izlaz sklopa propuštaju samo ulazne napone točno određenih frekvencija, i to tako da za takve frekvencije izlazni napon bude gotovo jednak ulaznom naponu. Ulazni napon je izvor izmjeničnog napona, na donjoj slici označen sa  $U(t)$ , a izlazni napon se može mjeriti na krajevima RLC elemenata sklopa između točaka X i Y ili Y i Z kako je prikazano na slici dolje.

Induktivitet zavojnice iznosi 300 mH, a omski otpor 60  $\Omega$ . Amplituda ulaznog napona iznosi 120 V.

- Odredite ovisnost pada efektivnog napona između točaka X i Y, odnosno između točaka Y i Z u odnosu na efektivni ulazni napon  $U_{\text{eff}}$ .
- Uskopojasni propusni elektronički filter na izlaz propušta samo ulazne napone točno određene frekvencije  $f_0$ , a ulazne napone ostalih frekvencija prigušuje. Na osnovu relacije izvedene pod a), odredite i obrazložite između kojih točaka (X i Y ili Y i Z) trebate mjeriti izlazni napon da bi serijski RLC krug djelovao kao uskopojasni propusni elektronički filter? Ukoliko želite propustiti korisnu frekvenciju signala od 1.5 kHz, koliki mora biti kapacitet kondenzatora?
- Uskopojasni nepropusni (zaustavni) filter na izlazu maksimalno prigušuje samo ulazni napon točno određene frekvencije  $f_0$ , dok ulazne napone ostalih frekvencija propušta gotovo nepromijenjeno. Takav se filter koristi kada iz korisnog signala želimo ukloniti signal šuma poput šuma gradske mreže pri frekvenciji 50 Hz. Na osnovu relacije izvedene pod a), odredite i obrazložite između kojih točaka (X i Y ili Y i Z) trebate mjeriti izlazni napon da bi serijski RLC krug djelovao kao uskopojasni nepropusni (zaustavni) elektronički filter? Ukoliko želite ukloniti signal šuma gradske mreže, koliki mora biti kapacitet kondenzatora?
- Prikažite grafički ovisnost izlaznog efektivnog napona o frekvenciji pod b) i c) tako da izračunate izlazne efektivne napone  $U_{XY}$  odnosno  $U_{YZ}$  za  $f = f_0$ ,  $f = 5f_0$  i  $f = \frac{1}{5}f_0$

NAPOMENA: pod b) i c) pokažite koliko iznose izlazni naponi pri frekvencijama jednakim, puno manjim i puno većim od  $f_0$



**Rješenje.**

a) Impedancija sklopa zapisana u kompleksnoj ravnini za sva tri serijski spojena elementa iznosi:

$$Z = iR + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Odnosno:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad 1 \text{ bod}$$

Efektivni pad napona između točaka X i Y u odnosu na efektivni ulazni napon

$U_{\text{eff, in}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$  možemo dobiti ako uočimo da se elementi između točaka X i Y (R) ponašaju kao djelitelj napona u odnosu na sve elemente kruga (RLC):

$$U_{XY} = \frac{R}{|Z|} \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$U_{XY} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad 3 \text{ boda}$$

Slično, efektivni pad napona između točaka Y i Z možemo odrediti ako uočimo da se kondenzator i zavojnica ponašaju kao djelitelji napona u odnosu na sve elemente kruga (R, L i C):

$$U_{YZ} = \frac{\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|}{|Z|} \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$U_{YZ} = \frac{\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad 3 \text{ boda}$$

b) Kada je frekvencija ulaznog signala jednaka rezonantnoj frekvenciji  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , tada su induktivne i kapacitivne reaktancije jednake

$$X_L + X_C = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

pa je stoga i pad napona (efektivni) između točaka X i Y jednak:

$$U_{XY} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad 1 \text{ bod}$$

Efektivni napon između točaka X i Y je maksimalan i jednak efektivnom ulaznom naponu pri rezonantnoj frekvenciji.

Povećamo li ili smanjimo frekvenciju ulaznog napona, nazivnik postaje veći od R pa je:

$$\omega < \omega_0 \text{ ili } \omega > \omega_0 \Rightarrow U_{XY} < \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$



odnosno za frekvencije  $\omega < \omega_0$  ili  $\omega > \omega_0$  imamo smanjenje (gušenje) izlaznog napona u odnosu na ulazni napon.

Za vrlo niske ili vrlo visoke frekvencije nazivnik postaje vrlo velik pa  $U_{XY}$  teži k nuli. Stoga ovaj sklop djeluje kao propusni elektronički filter.

2 boda

c) Kada je frekvencija ulaznog signala jednaka rezonantnoj frekvenciji  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , pad napona između točaka Y i Z postaje:

$$U_{YZ} = 0 \text{ V}$$

1 bod

Povećamo li ili smanjimo frekvenciju ulaznog napona, brojnik postaje veći od 0 pa je:

$$\omega < \omega_0 \text{ ili } \omega > \omega_0 \Rightarrow U_{YZ} > 0$$

Za vrlo velike frekvencije  $\omega \gg \omega_0$  imamo:

$$U_{YZ} \approx \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R/\omega L)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} \approx \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Za vrlo niske frekvencije  $\omega \ll \omega_0$  imamo:

$$U_{YZ} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} \approx \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Za vrlo niske ili vrlo visoke frekvencije, izlazni napon  $U_{YZ}$  teži k ulaznom naponu, a za frekvenciju jednaku rezonantnoj, teži k nuli. Stoga ovaj sklop djeluje kao nepropusni (zaustavni) elektronički filter.

2 boda

b) Želimo li popuštati samo frekvenciju  $f_0 = 1.5 \text{ kHz}$ , potrebno je izabrati kondenzator kapaciteta:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}$$

$$C = 37.52 \text{ nF}$$

1 bod

c) Želimo li prigušiti samo frekvenciju gradske mreže  $f_0 = 50 \text{ Hz}$ , potrebno je izabrati kondenzator kapaciteta:

$$C = 33.77 \text{ }\mu\text{F}$$

1 bod

d) Za  $f = 5f_0$  i  $f = \frac{1}{5}f_0$  u slučaju b) dobijemo:

$$U_{XY}(5f_0) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(5\omega_0 L - \frac{1}{5\omega_0 C}\right)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0.375 \text{ V}$$

$$U_{XY}(f_0) = 84.85 \text{ V}$$

1 bod

$$U_{XY}\left(\frac{1}{5}f_0\right) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega_0 L}{5} - \frac{5}{\omega_0 C}\right)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0.375 \text{ V}$$

Za  $f = 5f_0$  i  $f = \frac{1}{5}f_0$  u slučaju c) dobijemo:

$$U_{YZ}(5f_0) = \frac{\left| 5\omega_0 L - \frac{1}{5\omega_0 C} \right|}{\sqrt{R^2 + \left( 5\omega_0 L - \frac{1}{5\omega_0 C} \right)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 84.116 \text{ V}$$

$$U_{YZ}(f_0) = 0 \text{ V}$$

1 bod

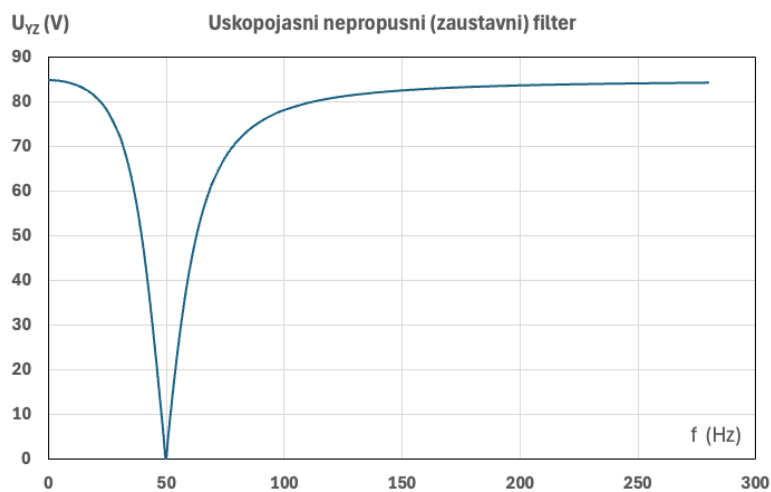
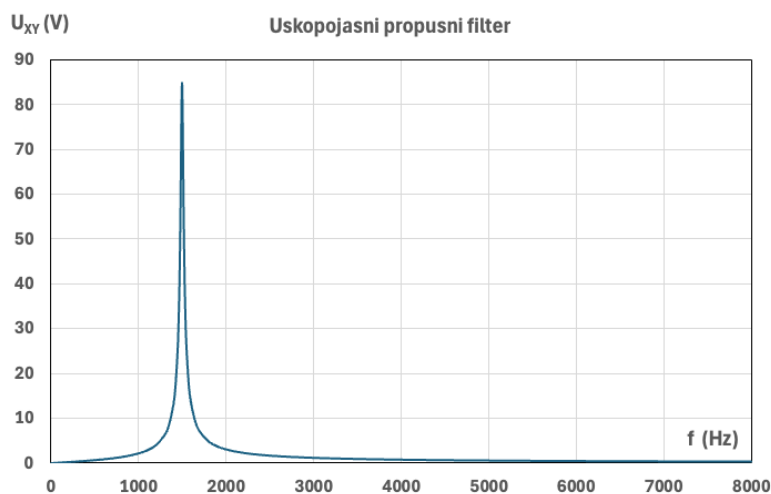
$$U_{YZ}\left(\frac{1}{5}f_0\right) = \frac{\left| \frac{\omega_0 L}{5} - \frac{5}{\omega_0 C} \right|}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{\omega_0 L}{5} - \frac{5}{\omega_0 C} \right)^2}} \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 84.116 \text{ V}$$

Grafički prikaz za uskopojasni propusni filter

1 bod

Grafički prikaz za uskopojasni nepropusni (zaustavni) filter

1 bod



**Zadatak 4. (16 bodova)**

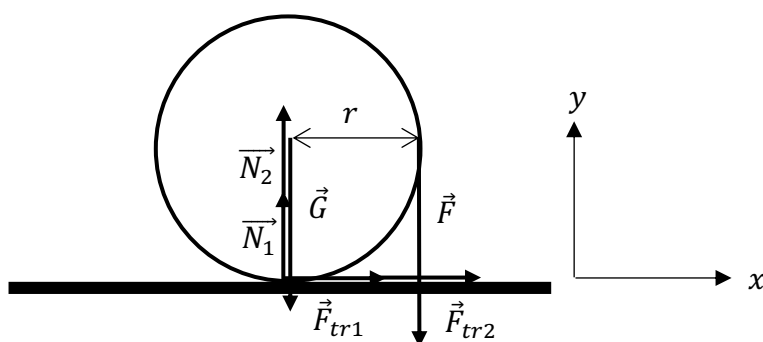
Homogeni puni valjak mase  $m$  i radijusa  $r$  miruje na dvije dugačke paralelne daske. Oko valjka namotana je nerastezljiva nit zanemarive mase čiji slobodan kraj potežemo konstantnom silom  $F$  vertikalno prema dolje zbog čega se valjak započinje kotrljati.

- Odredite najveću silu  $F$  kojom možemo potezati nit u ovisnosti o koeficijentu trenja i masi valjka  $m$  prije nego što valjak počne proklizavati.
- Odredite najveće ubrzanje središta valjka u ovisnosti o koeficijentu trenja za koji valjak još neće proklizati.
- Za koje vrijednosti koeficijenta trenja je moguće kotrljanje valjka bez proklizavanja, bez obzira na silu kojom potežemo nit?

Na donjoj slici je prikazan sustav sa strane i odozgo.

**Rješenje**

Ucrtajmo sile koje djeluju na valjak: sila teža valjka ( $G$ ), vertikalna sila kojom potežemo nit ( $F$ ), sila trenja na svaku od dvije daske ( $F_{tr1}$  i  $F_{tr2}$ ), sila reakcije podloge na valjak ( $N_1$  i  $N_2$ )



1 bod

Valjak se može ubrzavati samo u smjeru x-osi, te ne mijenja položaj u smjeru y-osi. Newtonov zakon primijenjen na valjak u smjeru x i y osi glasi:

$$\text{x-os: } am = F_{tr1} + F_{tr2}$$

1 bod

$$\text{y-os: } 0 = N_1 + N_2 - G - F$$

1 bod

Sile reakcije podloge na valjak su jednake i iznose:

$$N_1 = N_2 = N$$

Valjak rotira oko z-osi uslijed djelovanja momenta sila trenja i težine utega m:

$$\begin{aligned} M &= rF - r(F_{tr1} + F_{tr2}) \\ M &= I\alpha \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Moment inercije valjka:

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad 1 \text{ bod}$$

Ukoliko imamo samo kotrljanje, tada vrijedi:

$$a = ar \quad 1 \text{ bod}$$

I konačno:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mr^2 \frac{a}{r} &= rF - r(F_{tr1} + F_{tr2}) \\ \frac{1}{2}ma &= F - (F_{tr1} + F_{tr2}) \\ \frac{1}{2}ma &= F - ma \\ F &= \frac{3}{2}ma \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Valjak neće proklizavati kada vrijedi:

$$\begin{aligned} F_{tr1} + F_{tr2} &\leq \mu(N_1 + N_2) \\ F_{tr1} + F_{tr2} &\leq \mu(G + F) \\ am &\leq \mu\left(G + \frac{3}{2}ma\right) \\ am\left(1 - \frac{3\mu}{2}\right) &\leq \mu mg \\ a &\leq \frac{2\mu}{2 - 3\mu}g \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Najveće ubrzanje središta valjka za koji valjak još ne proklizava iznosi

$$a_{max} = \frac{2\mu}{2 - 3\mu}g \quad 1 \text{ bod}$$

Maksimalna sila  $F$  za koju još nema proklizavanja dobijemo kao:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2F}{3m} \\ \frac{2F}{3m} &\leq \frac{2\mu}{2 - 3\mu}g \\ F &\leq \frac{3\mu}{2 - 3\mu}mg \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Vidljivo je da su fizikalna netrivialna rješenja moguća samo za

$$\begin{aligned} 2 - 3\mu &> 0 \\ 0 < \mu < \frac{2}{3} &= 0.667 \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$