

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – osnovna škola

17. ožujka 2025.

Ako učenik ima drukčiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo treba i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-4.1.

Vito, Marko, Ivan i Stipe žele popuniti svatko svoj album sa sličicama.

- Vito, Stipe, Marko i Ivan ukupno u svojim albumima imaju 2025 sličica.
- Vito, Marko i Ivan ukupno u svojim albumima imaju 1520 sličica.
- Vito u albumu ima pet puta manje sličica od Stipe.
- Marko u albumu ima 205 sličica više od Stipe.

Ako se u album može zalijepiti najviše 799 sličica, koliko sličica nedostaje Ivanu da popuni cijeli album?

Rješenje.

Iz prve dvije tvrdnje zaključujemo da Stipe ima $2025 - 1520 = 505$ sličica. 3 boda

Iz treće tvrdnje slijedi da Vito ima $505 : 5 = 101$ sličicu. 2 boda

Iz četvrte tvrdnje slijedi da Marko ima $505 + 205 = 710$ sličica. 2 boda

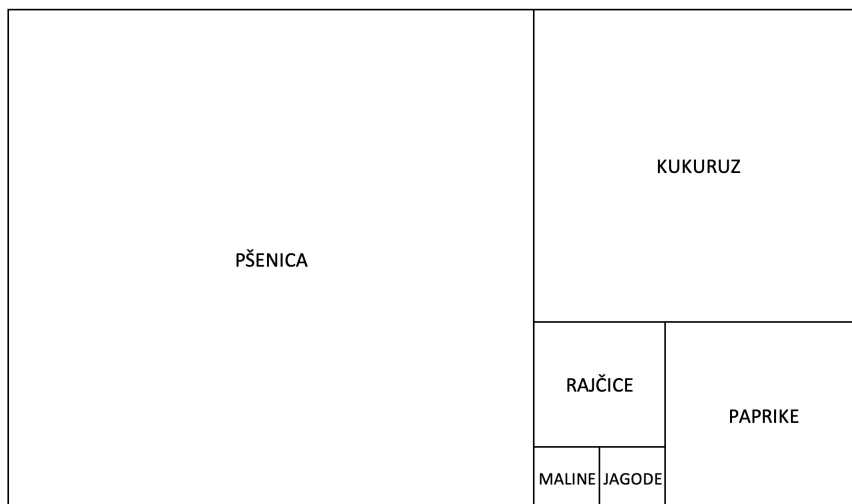
Iz druge tvrdnje zaključujemo da Ivan ima $1520 - 101 - 710 = 709$ sličica. 2 boda

Za popuniti album Ivanu nedostaje $799 - 709 = 90$ sličica. 1 bod

Napomena: Dovoljno je rješenje zapisati samo riječima, grafički ili simbolima (jednadžbama). Bodove nose istaknuti zaključci zapisani na bilo koji od tih načina.

Zadatak OŠ-4.2.

Nikola ima vrt oblika pravokutnika koji je podijelio na šest manjih dijelova oblika kvadrata, kao na slici. Na najvećemu dijelu posadit će pšenicu, na sljedećemu po veličini kukuruz, nakon toga paprike, pa rajčice te na najmanjim površinama maline i jagode. Dio vrta na kojemu su posađene jagode ima opseg 16 metara. Nikola želi postaviti ogradu duž cijeloga ruba vrta i između dijelova vrta. Koliko mu je najmanje metara ograde za to potrebno?



Prvo rješenje.

Dio vrta s jagodama kvadratnoga je oblika i opsega 16 metara, pa je duljina stranice toga kvadrata $16 : 4 = 4$ metra.

1 bod

Odredimo duljine stranica preostalih dijelova vrta redom od manjih prema većima. Dio vrta s malinama i dio vrta s jagodama imaju zajedničku stranicu, pa je stranica dijela vrta s malinama također duljine 4 metra.

Stranica dijela vrta s rajčicama ima istu duljinu kao stranice dijelova vrta s jagodama i malinama zajedno, pa ima duljinu $4 + 4 = 8$ metara.

1 bod

Na sličan način određujemo duljine stranica ostalih dijelova vrta.

Dio vrta	Duljina stranice u metrima
Jagode	4
Maline	4
Rajčice	$4 + 4 = 8$
Paprike	$4 + 8 = 12$
Kukuruz	$8 + 12 = 20$
Pšenica	$4 + 8 + 20 = 32$

2 boda

Duljina cijeloga vrta odgovara duljini dijela s kukuruzom i pšenicom, tj. $20 + 32 = 52$ metra. Širina cijeloga vrta odgovara duljini dijela sa pšenicom, tj. 32 metra,

1 bod

pa duljina ograde potrebne za vanjske rubove vrta iznosi $2 \cdot (32 + 52) = 168$ metara.

2 boda

Za odvajanje dijelova vrta Nikola treba redom dodati četvrtu stranicu svakoga dijela vrta, osim onog s jagodama, od većega prema manjemu (prvo četvrtu stranicu za dio sa pšenicom, pa s kukuruzom itd. sve do četvrte stranice dijela s malinama).

Za to mu je potrebno još $32 + 20 + 12 + 8 + 4 = 76$ metara ograde.

2 boda

Nikoli je ukupno potrebno $168 + 76 = 244$ metra ograde.

1 bod

Napomena: Ako učenik nakon određivanja duljina stranica svih dijelova vrta točno odredi opseg vrta na koji drugi način nego što je prikazano u rješenju dodijeliti **3 boda**. U slučaju jedne računske pogreške uz pravilnu strategiju (npr. točnu formulu za opseg pravokutnika ili zbrajanjem svih duljina stranica dijelova vrta uz rub) dodijeliti **2 boda**. U slučaju dviju ili više računskih pogrešaka dodijeliti **0 bodova**. Ako učenik točno odredi duljinu ili širinu vrta, ali nema strategiju za računanje opsega cijelog vrta, treba dobiti **1 bod**.

Drugo rješenje.

Kao u prvome rješenju odredimo duljine stranica svih dijelova vrta.

4 boda

Opseg svih dijelova vrta iznosi

$$4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 12 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 32 = 4 \cdot (4 + 4 + 8 + 12 + 20 + 32) = 4 \cdot 80 = 320 \text{ m.}$$

2 boda

Pritom smo dijelove ograde koji odvajaju dijelove vrta računali dva puta, pa ih moramo oduzeti.

Za odvajanje dijelova vrta koristimo se četvrtom stranicom svakoga dijela vrta od većega prema manjemu (prvo četvrtu stranicu za dio sa pšenicom, pa s kukuruzom itd. sve do četvrte stranice dijela s malinama).

Za to je potrebno još $32 + 20 + 12 + 8 + 4 = 76$ metara ograde.

2 boda

Nikoli je ukupno potrebno $320 - 76 = 244$ metra ograde.

2 boda

Treće rješenje.

Kao u prvome rješenju odredimo duljine stranica svih dijelova vrta.

4 boda

Na opseg dijela vrta s jagodama od 16 metara pribrajamo duljine po tri stranice od svakoga sljedećeg dijela vrta (od manjih prema većima), tj. najmanja duljina ograde koja je potrebna Nikoli iznosi

$$16 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 32.$$

4 boda

Budući da vrijedi

$$16 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 32 = 16 + 3 \cdot (4 + 8 + 12 + 20 + 32) = 16 + 3 \cdot 76 = 16 + 228 = 244,$$

Nikoli će trebati ukupno 244 metra za potrebne ograde.

2 boda

Zadatak OŠ-4.3.

Odredi sve troznamenkaste brojeve kojima je znamenka desetica za 3 veća ili za 3 manja od znamenke jedinica, a znamenka stotica za 3 veća ili za 3 manja od znamenke desetica.

Prvo rješenje.

Neka je a znamenka stotica, b znamenka desetica te c znamenka jedinica troznamenkastoga broja \overline{abc} . Da bismo bili sigurni da smo odredili sve tražene brojeve, ispisujemo ih redom prema znamenki stotica.

a	b	c	\overline{abc}
1	4	1 ili 7	141, 147
2	5	2 ili 8	252, 258
3	0	3	303
	6	3 ili 9	363, 369
4	1	4	414
	7	4	474
5	2	5	525
	8	5	585
6	3	0 ili 6	630, 636
	9	6	696
7	4	1 ili 7	741, 747
8	5	2 ili 8	852, 858
9	6	3 ili 9	963, 969

10 bodova

Drugo rješenje.

Zapišimo sve tražene brojeve gledajući slučajeve koja znamenka je najveća (i koja je najmanja).

Odredimo prvo sve brojeve u kojima je znamenka jedinica najmanja, a znamenka stotica najveća. To su brojevi 963, 852, 741, 630.

Odredimo brojeve u kojima je znamenka jedinica najveća, a znamenka stotica najmanja. To su brojevi 147, 258, 369.

Još je moguće da znamenke stotica i jedinica budu jednake, a znamenka desetica veća ili manja od njih.

Brojevi kod kojih je znamenka desetica manja jesu 969, 858, 747, 636, 525, 414, 303.

Brojevi kod kojih je znamenka desetica veća jesu 141, 252, 363, 474, 585, 696.

10 bodova

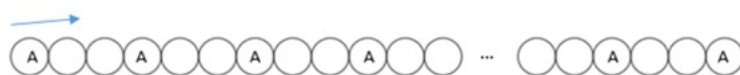
Napomena: Dokaz da nema drugih rješenja sastoji se u sustavnoj organizaciji slučajeva koja može biti vidljiva iz poretka kojim učenik ispisuje brojeve i ne mora biti opisana riječima. Svaka dva tražena broja vrednovati kao **1 bod**. Neparan broj rješenja zaokruživati na manji cijeli broj bodova. Ako učenik ispiše i suvišna (netočna) rješenja, za svaka dva netočna broja oduzimati **1 bod**.

Zadatak OŠ-4.4.

Na ploči je nacrtan niz od 166 krugova. Ana je upisala slovo A u prvi i četvrti krug na lijevoj strani niza, te dalje u svaki treći krug slijeva nadesno. Bruno je upisao slovo B u prvi i treći krug na desnoj strani niza, te dalje u svaki drugi krug zdesna nalijevo. Koliko ima krugova u kojima su napisana oba slova, a u koliko krugova nije napisano ni slovo A ni slovo B?

Prvo rješenje.

Na ploči je 166 krugova. Ana je napisala slovo A u prvi krug i redom u svaki treći krug. Uočimo da je $166 : 3 = 55$ i ostatak 1, što znači da je u posljednjemu krugu slovo A. Nakon što je Ana napisala sva slova niz izgleda ovako:



2 boda

Bruno je krenuo iz suprotnoga smjera i u svaki drugi krug napisao slovo B. Nakon što je Bruno napisao sva slova, niz izgleda ovako:



2 boda

Uočimo šestorku koja se ponavlja (A, B, 0, AB, 0, B).

2 boda

Budući da je $166 : 6 = 27$ i ostatak 4, takvih šestorki ima 27.

1 bod

Posljednja četiri kruga popunjena su slovima (A, B, 0, AB).

1 bod

Krug sa slovima AB pojavljuje se jednom u svakoj šestorki i u posljednjoj četvorki.

Dakle, oba slova AB napisana su u $27 \cdot 1 + 1 = 28$ krugova.

1 bod

Krugovi u kojima nije napisano nijedno slovo u svakoj od 27 šestorki pojavljuju se dva puta i jednom u ostatku, tj. u posljednjoj četvorki.

Dakle, broj krugova bez slova je $27 \cdot 2 + 1 = 55$.

1 bod

Drugo rješenje.

Slovo A se nalazi na 1., 4., 7., 10., 13., 16., 19., 22., ..., 166. mjestu.

Budući da je $166 : 3 = 55$ i ostatak 1, slovo A ukupno se pojavljuje 56 puta.

1 bod

Slovo B nalazi se na 2., 4., 6., 8., 10., 12., 14., 16., 18., 20., 22., 24., ..., 166. mjestu.

Budući da je $166 : 2 = 83$, slovo B ukupno se pojavljuje 83 puta.

1 bod

Zaključujemo da se slova A i B zajedno nalaze na 4., 10., 16., 22., ..., 166. mjestu.

2 boda

Budući da je $166 : 6 = 27$ i ostatak 4, slova A i B u istome se krugu pojavljuju 28 puta.

2 boda

Samo slovo A u krugu se pojavljuje $56 - 28 = 28$ puta.

1 bod

Samo slovo B u krugu se pojavljuje $83 - 28 = 55$ puta.

1 bod

Krugova s jednim ili dva slova imamo $28 + 28 + 55 = 111$.

1 bod

Praznih je krugova onda $166 - 111 = 55$.

1 bod

Napomena: Ako učenik nacрта 166 krugova i zadatak riješi brojenjem slova i praznih krugova, rezultate vrednovati analogno predloženomu drugom rješenju. Tim načinom učenik uz točna rješenja može ostvariti 10 bodova.

Zadatak OŠ-4.5.

Učiteljica je donijela u školu kutiju s bombonima. Ako svakoj djevojčici u razredu da po 3 bombona, a svakome dječaku po 2 bombona, učiteljici će ostati 7 bombona. Ako djevojčicama da po 2 bombona, a dječacima po 4 bombona, ostat će joj 6 bombona. U razredu su 23 djeteta. Koliko je bombona u kutiji?

Prvo rješenje.

Jedan bombon označimo s •


Neka crveni pravokutnik (■) prikazuje broj bombona koje bismo podijelili kad bi svaka djevojčica dobila jedan bombon. Ako učiteljica svakoj djevojčici daje po 3 bombona, onda taj broj prikazujemo s tri crvena pravokutnika.

Neka bijeli pravokutnik (□) prikazuje broj bombona koje bismo podijelili kada bi svaki dječak dobio jedan bombon. Ako učiteljica svakomu dječaku daje po 2 bombona, onda taj broj prikazujemo s dva bijela pravokutnika.

Ukupan broj bombona možemo prikazati na sljedeća dva načina.

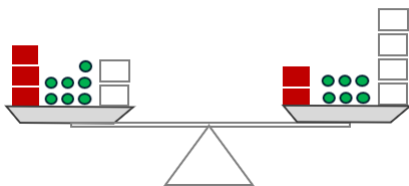
Prikaz prve raspodjele bombona: 

1 bod

Prikaz druge raspodjele bombona: 

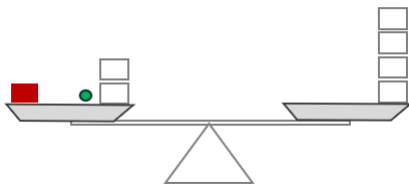
1 bod

Budući da u obje raspodjele imamo isti ukupan broj bombona, prikaze možemo staviti na različite strane vage tako da vaga bude u ravnoteži.



Ako iz oba prikaza uklonimo po dva crvena pravokutnika, jedan bijeli pravokutnik i šest bombona, vaga će i dalje biti u ravnoteži, odnosno dobit ćemo prikaze koji prikazuju isti broj bombona.

2 boda



- Na prvome prikazu ostaje jedan crveni pravokutnik, jedan bijeli pravokutnik i jedan bombon, a na drugome prikazu ostaju tri bijela pravokutnika. 1 bod
- Crveni i bijeli pravokutnik odgovaraju broju bombona koje bismo podijelili kad bi svaki učenik (djevojčica ili dječak) dobili po jedan bombon. Taj je broj jednak ukupnom broju učenika u razredu, što iznosi 23. 2 boda
- Stoga, jedan bombon, crveni i bijeli pravokutnik zajedno prikazuju 24 bombona, pa zaključujemo da i tri bijela pravokutnika prikazuju 24 bombona. 1 bod
- Jedan bijeli pravokutnik prikazuje $24 : 3 = 8$ bombona, pa zaključujemo da je broj dječaka 8 (jer bijeli pravokutnik prikazuje broj bombona ako svaki dječak dobije jedan bombon). Broj je djevojčica $23 - 8 = 15$. 1 bod
- Ukupan je broj bombona u kutiji $3 \cdot 15 + 7 + 8 \cdot 2 = 68$. 1 bod

Napomena: Dovoljno je rješenje zapisati samo riječima, grafički ili simbolima (jednadžbama). Bodove nose istaknuti zaključci zapisani na bilo koji od tih načina.

Drugo rješenje.

- Kad bi u razredu bile samo djevojčice, onda bi prema prvoj raspodjeli bilo $3 \cdot 23 + 7 = 76$ bombona, a prema drugoj raspodjeli $2 \cdot 23 + 6 = 52$ bombona.
- Kad bi u razredu bile 22 djevojčice i 1 dječak, onda bi prema prvoj raspodjeli bilo $3 \cdot 22 + 2 \cdot 1 + 7 = 75$ bombona, a prema drugoj raspodjeli $2 \cdot 22 + 4 \cdot 1 + 6 = 54$ bombona.
- Smanjimo li broj djevojčica za 1 te povećamo broj dječaka za 1, broj bombona u prvoj raspodjeli smanjit će se za 1 bombon, a u drugoj raspodjeli povećati za 2 bombona. 4 boda
- Dakle, smanjimo li broj djevojčica za 1, razlika između broja bombona u prvoj i drugoj raspodjeli smanjuje se za 3 bombona. 2 boda
- Kad nema dječaka, ta razlika iznosi $76 - 52 = 24$. 1 bod
- Taj broj trebamo podijeliti s 3 kako bismo dobili broj dječaka. 1 bod
- Stoga bi broj dječaka trebalo povećati za $24 : 3 = 8$. Tada će biti $23 - 8 = 15$ djevojčica. 1 bod
- Ukupan je broj bombona u kutiji $3 \cdot 15 + 7 + 8 \cdot 2 = 68$. 1 bod

Napomena: Prva 4 boda, odnosno prvih 6 bodova, učenik dobiva ako uoči navedenu pravilnost za bilo koja dva broja djevojčica koja se razlikuju za 1. Preostala 4 boda nosi određivanje točnoga rješenja.

Treće rješenje.

- U zadatku su opisana dva načina raspodjele bombona. U prvoj raspodjeli (kad učiteljici ostane 7 bombona) dječaci dobivaju po 2 bombona, koliko i djevojčice u drugoj raspodjeli (kada učiteljici ostane 6 bombona). Djevojčice u prvoj raspodjeli dobivaju manji broj bombona nego dječaci u drugoj raspodjeli. U drugoj raspodjeli ostaje samo 1 bombon manje nego u prvoj raspodjeli, što je manje od broja bombona koji dobiva jedna osoba, pa možemo zaključiti da broj djevojčica mora biti veći od broja dječaka. 3 boda
- Promotrimo mogućnosti za broj djevojčica i dječaka u razredu i broj bombona koji dobivamo prema pojedinoj raspodjeli.

Broj djevojčica	Broj dječaka	Prva raspodjela	Druga raspodjela
12	11	$12 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 7 = 65$	$12 \cdot 2 + 11 \cdot 4 + 6 = 74$
13	10	$13 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 7 = 66$	$13 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 6 = 72$
14	9	$14 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 7 = 67$	$14 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 6 = 70$
15	8	$15 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7 = 68$	$15 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 6 = 68$
16	7	$16 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 7 = 69$	$16 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 6 = 66$

4 boda

Nastavimo li povećavati broj djevojčica, ukupan će broj bombona prema prvoj raspodjeli biti veći od 68. Nastavimo li povećavati broj djevojčica, ukupan broj bombona prema drugoj raspodjeli bit će manji od 68. Dakle, nema drugih rješenja.

3 boda

Jedino je moguće rješenje da ima 15 djevojčica, 8 dječaka i 68 bombona.

Napomena: Odgovor da ima 68 bombona nosi **1 bod**. Tvrdnja da je broj djevojčica 15 i broj dječaka 8 nosi **1 bod**. Dokaz da ne postoji drugih rješenja nosi **8 bodova**. Kao dokaz za **8 bodova** priznaje se:

- provjera svih 24 slučaja (broj djevojčica od 0 do 23)
- eliminacija nekih slučajeva argumentacijom (npr. broj djevojčica ne može biti paran, djevojčica mora biti više od dječaka itd.) i provjera preostalih slučajeva
- tvrdnja: „Smanjimo li broj djevojčica za 1, te povećamo broj dječaka za 1, broj bombona u prvoj raspodjeli će se smanjiti za 1 bombon, a u drugoj raspodjeli povećati za 2 bombona. Stoga postoji samo jedno rješenje.”

Učenik koji provjerom više od 4, a manje od 24 slučaja, i bez dodatne argumentacije, dođe do rješenja (npr. ima samo tablicu iz prikazanoga rješenja) ostvaruje **2 boda** za dokaz i **2 boda** za odgovor.

Četvrto rješenje.

U zadatku su opisana dva načina raspodjele bombona. Prva raspodjela: Ako svakoj djevojčici u razredu da po 3 bombona, a svakomu dječaku po 2 bombona, učiteljici će ostati 7 bombona. Druga raspodjela: Ako djevojčicama da po 2 bombona, a dječacima po 4 bombona, ostat će joj 6 bombona.

Promotrimo na koji bi način učiteljica od prve raspodjele mogla napraviti drugu raspodjelu. Kako bi postigla drugu raspodjelu iz prve, učiteljica bi svakoj djevojčici i sebi trebala oduzeti po 1 bombon, a svakomu dječaku dati još po 2 bombona. Tada svaka djevojčica i učiteljica dobiju dvostruko manje bombona od svakoga dječaka. Zato je broj dječaka dvostruko manji od broja djevojčica s učiteljicom.

4 boda

Kako je broj djevojčica zajedno s učiteljicom jednak dvostrukom broju dječaka, ukupan broj osoba jednak je trostrukom broju dječaka.

2 boda

Ukupno imamo 23 djeteta te s učiteljicom imamo 24 osobe.

Taj broj treba podijeliti s 3 da bismo dobili broj dječaka.

2 boda

Stoga je broj dječaka $24 : 3 = 8$. Broj je djevojčica $23 - 8 = 15$.

1 bod

Ukupan je broj bombona u kutiji $3 \cdot 15 + 7 + 8 \cdot 2 = 68$.

1 bod