

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Ako za realne brojeve a i b vrijedi $a + b = 9$ i $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{4}$, izračunaj $\frac{a^4 - b^4}{a^6 - b^6}$.

Prvo rješenje.

Faktorizacijom brojnika i nazivnika slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{a^4 - b^4}{a^6 - b^6} &= \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)} && 2 \text{ boda} \\ &= \frac{(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)}{(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)} && 2 \text{ boda} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)}. && 1 \text{ bod}\end{aligned}$$

$$\text{Iz } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{4} \text{ slijedi } \frac{a + b}{ab} = \frac{3}{4}, \text{ pa je } ab = 12. \quad 2 \text{ boda}$$

Nadalje vrijedi:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 81 - 24 = 57, \quad 2 \text{ boda}$$

pa je

$$\frac{a^4 - b^4}{a^6 - b^6} = \frac{57}{(57 + 12)(57 - 12)} = \frac{57}{69 \cdot 45} = \frac{19}{1035}. \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: Kod prva dva boda 1 bod nosi pravilna faktorizacija brojnika, a 1 bod pravilna faktorizacija nazivnika. Analogno se dodjeljuju i druga dva boda.

Drugo rješenje.

Faktorizacijom brojnika i nazivnika te kraćenjem slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{a^4 - b^4}{a^6 - b^6} &= \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)} && 2 \text{ boda} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^4 + a^2b^2 + b^4}. && 1 \text{ bod}\end{aligned}$$

$$\text{Kao i u prvome rješenju dobivamo da je } ab = 12, \text{ odnosno } a^2b^2 = 144 \quad 2 \text{ boda}$$

te da je $a^2 + b^2 = 57$.

2 boda

Nadalje je:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 57^2 - 2 \cdot 144 = 2961.$$

2 boda

Konačno dobivamo:

$$\frac{a^4 - b^4}{a^6 - b^6} = \frac{a^2 + b^2}{a^4 + a^2b^2 + b^4} = \frac{57}{2961 + 144} = \frac{57}{3105} = \frac{19}{1035}.$$

1 bod

Napomena: Kod prva dva boda **1 bod** nosi pravilna faktorizacija brojnika, a **1 bod** pravilna faktorizacija nazivnika.

Zadatak B-1.2.

Odredi sve vrijednosti realnoga parametra p tako da jednadžbe

$$\frac{x-1}{x^2+2x} + \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{4x^2+2}{x^3-4x} - \frac{x}{2x-x^2}$$

i

$$(x+p)^2 + (x-p)^2 = 2(x-0.5p)(x+0.5p) - \frac{1}{x} \cdot p$$

imaju isti skup rješenja.

Prvo rješenje.

Riješimo najprije prvu jednadžbu. Faktorizacijom svih nazivnika u jednadžbi dobivamo:

$$\frac{x-1}{x(x+2)} - \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x^2+2}{x(x-2)(x+2)} + \frac{x}{x(x-2)}$$

2 boda

Jednadžba ima smisla ako $x \notin \{-2, 0, 2\}$.

1 bod

Množenjem sa zajedničkim nazivnikom slijedi:

$$(x-2)(x-1) - x(x+3) = 4x^2 + 2 + x(x+2),$$

1 bod

odnosno

$$5x^2 + 8x = 0,$$

1 bod

$$x(5x+8) = 0.$$

Samo je $x = -\frac{8}{5}$ rješenje zadane jednadžbe.

1 bod

Uvrštavanjem toga rješenja u drugu jednadžbu dobivamo:

$$\left(-\frac{8}{5} + p\right)^2 + \left(-\frac{8}{5} - p\right)^2 = 2\left(-\frac{8}{5} - \frac{1}{2}p\right)\left(-\frac{8}{5} + \frac{1}{2}p\right) + \frac{5}{8}p,$$

$$\frac{64}{25} - \frac{16}{5}p + p^2 + \frac{64}{25} + \frac{16}{5}p + p^2 = \frac{128}{25} - \frac{1}{2}p^2 + \frac{5}{8}p,$$

$$p\left(\frac{5}{2}p - \frac{5}{8}\right) = 0.$$

1 bod

Ako je $p = 0$, druga jednađba prelazi u jednađbu

$$(x + 0)^2 + (x - 0)^2 = 2(x - 0.5 \cdot 0)(x + 0.5 \cdot 0) - \frac{1}{x} \cdot 0,$$

odnosno jednađbu $2x^2 = 2x^2$, čija su rješenja svi realni brojevi osim nule, pa jednađbe nemaju isti skup rješenja.

1 bod

Ako je $p = \frac{1}{4}$ i $x \neq 0$, druga jednađba poprima oblik

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 2\left(x - 0.5 \cdot \frac{1}{4}\right)\left(x + 0.5 \cdot \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4},$$

odnosno $2x^2 + \frac{1}{8} = 2x^2 - \frac{1}{32} - \frac{1}{4x}$, koja ima jedinstveno rješenje $x = -\frac{8}{5}$.

1 bod

Dakle, jedino za $p = \frac{1}{4}$ zadane jednađbe imaju isti skup rješenja.

1 bod

Napomena: Učenik treba provjeriti i za $p = 0$ i za $p = \frac{1}{4}$ rješenje druge jednađbe, odnosno navesti da za $p = 0$ rješenje nije jedinstveno, a za $p = \frac{1}{4}$ jest jedinstveno. Ako to ne napravi oduzeti po 1 bod po slučaju.

Drugo rješenje.

Druga jednađba ima smisla ako je $x \neq 0$. Nakon kvadriranja, množenja i sređivanja druga jednađba poprima oblik:

$$\frac{5}{2}p^2 + \frac{p}{x} = 0,$$

1 bod

$$p\left(\frac{5}{2}p + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Ako je $p = 0$, skup je rješenja druge jednađbe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ako je $p \neq 0$, tada je rješenje druge jednađbe oblika $x = -\frac{2}{5p}$.

1 bod

Analogno kao i u prvome rješenju dobivamo da je jedino rješenje prve jednađbe $x = -\frac{8}{5}$.

6 bodova

Budući da prva jednađba ima samo jedno rješenje, $p = 0$ ne može biti vrijednost traženoga parametra.

1 bod

Jedina moguća vrijednost parametra p dobiva se izjednačavanjem rješenja jednađbi:

$$-\frac{2}{5p} = -\frac{8}{5},$$

$$p = \frac{1}{4}.$$

1 bod

Zadatak B-1.3.

Koliko ima troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s četiri daju ostatak dva, a pri dijeljenju s tri daju ostatak jedan?

Prvo rješenje.

Neka je x traženi troznamenkasti broj.

Ako pri dijeljenju broja x s četiri ostatak iznosi dva, tada je $x = 4a + 2$, $a \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Ako pri dijeljenju broja x s tri ostatak iznosi jedan, tada je $x = 3b + 1$, $b \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Slijedi $4a + 2 = 3b + 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$ 1 bod

Nadalje je $b = \frac{4a + 1}{3} = \frac{3a + a + 1}{3} = a + \frac{a + 1}{3}$. 1 bod

Budući da su a i b cijeli brojevi, zaključujemo da $\frac{a + 1}{3}$ treba biti cijeli broj, odnosno $\frac{a + 1}{3} = c$, $c \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Nadalje, s obzirom da je $a = 3c - 1$, slijedi

$$x = 4a + 2 = 4(3c - 1) + 2 = 12c - 2, \quad c \in \mathbb{Z}. \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je x troznamenkasti broj, zaključujemo da je $100 \leq 12c - 2 \leq 999$, 1 bod

odnosno $\frac{17}{2} \leq c \leq \frac{1001}{12}$. 1 bod

Zaključujemo da je $c \in \{9, \dots, 83\}$ te da ima $83 - 8 = 75$ traženih brojeva. 2 boda

Drugo rješenje.

Kao i u prvome rješenju zaključujemo da je $4a + 2 = 3b + 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$, odnosno da vrijedi diofantska jednačina $4a - 3b = -1$. 3 boda

Uočimo da je jedno partikularno rješenje ove jednačine $a = -1$, $b = -1$, pa vrijedi

$$4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = -1, \quad 1 \text{ bod}$$

$$4a - 3b = -1.$$

Oduzimanjem tih jednačina dobivamo

$$4(a + 1) - 3(b + 1) = 0, \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno $a + 1 = 3c$, $b + 1 = 4c$, $c \in \mathbb{Z}$, pa je $a = 3c - 1$, $b = 4c - 1$ te

$$x = 12c - 2, \quad c \in \mathbb{Z}. \quad 1 \text{ bod}$$

Sada kao i u prvome rješenju zaključujemo da je $c \in \{9, \dots, 83\}$ te da ima $83 - 8 = 75$ traženih brojeva. 4 boda

Treće rješenje.

Troznamenkasti su brojevi koji daju ostatak dva pri djeljenju s četiri 102, 106, 110, 114, 118, ..., 994, 998.

2 boda

Troznamenkasti su brojevi koji daju ostatak jedan pri djeljenju s tri 100, 103, 106, 109, 112, 115, 118, ..., 994, 997.

2 boda

U oba niza nalaze se brojevi 106, 118, ..., 994.

3 boda

Zaključujemo da je riječ o brojevima oblika $106 + 12k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 74\}$ te da takvih brojeva ima 75.

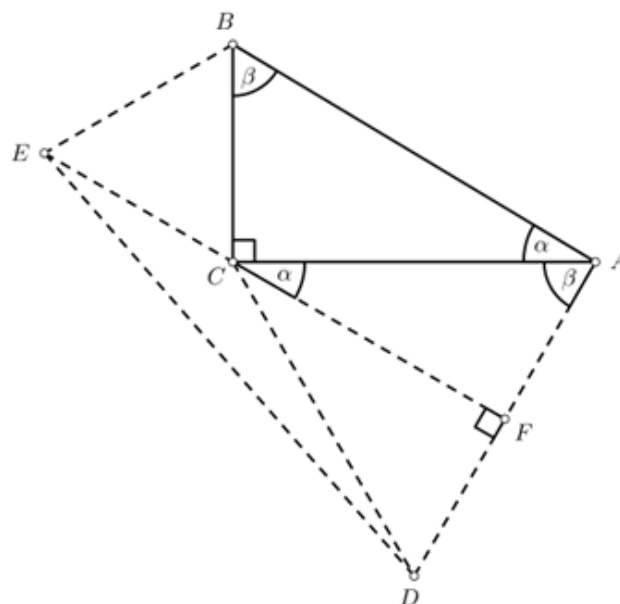
3 boda

Napomena: Ako učenici ispišu sve tražene brojeve i točno ih prebroje, dodijeliti svih 10 bodova.

Zadatak B-1.4.

U pravokutnome trokutu ABC s pravim kutom u vrhu C i hipotenuzom duljine 8 cm mjera unutarnjega kuta u vrhu B dvostruko je veća od mjere unutarnjega kuta u vrhu A . Izvan toga trokuta konstruirani su jednakostranični trokuti ACD i BEC . Koliko iznosi površina četverokuta $ABED$?

Prvo rješenje.



1 bod

Neka je $\alpha = |\angle BAC|$ i $\beta = |\angle CBA|$. Tada iz $\beta = 2\alpha$ slijedi $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$.

1 bod

Neka je točka F sjecište pravaca EC i AD . Budući da su trokuti BEC i CDA jednakostranični, zaključujemo da je $|\angle CAF| = 60^\circ = \beta$, $|\angle FCA| = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \alpha$, pa je i $|\angle AFC| = 90^\circ$.

1 bod

Tražena je površina četverokuta $ABED$ jednaka zbroju površina četiriju trokuta:

$$P_{ABED} = P_{ABC} + P_{BEC} + P_{ACD} + P_{CED}.$$

1 bod

Kako je $\sin \alpha = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{BC}|}{8}$, slijedi $|\overline{BC}| = 4$ cm i $|\overline{AC}| = 4\sqrt{3}$ cm.

1 bod

Sada je redom:

$$P_{ABC} = \frac{|\overline{BC}| \cdot |\overline{AC}|}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad 1 \text{ bod}$$

$$P_{BEC} = \frac{|\overline{BC}|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad 1 \text{ bod}$$

$$P_{ACD} = \frac{|\overline{AC}|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad 1 \text{ bod}$$

$$P_{CED} = \frac{|\overline{EC}| \cdot |\overline{DF}|}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno izračunavamo ukupnu površinu:

$$P_{ABED} = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 28\sqrt{3} \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: Učenik je do duljine katete \overline{BC} mogao doći zaključivanjem da je u pravokutnome trokutu s danim mjerama unutarnjih kutova duljina katete \overline{BC} jednaka radijusu opisane kružnice, odnosno koristeći se činjenicom da je u takvome trokutu duljina kraće katete jednaka polovici duljine hipotenuze.

1 bod za određivanje duljina kateta trokuta ABC treba dodijeliti ako su duljine kateta točno izračunane neovisno o načinu izračuna.

Drugo rješenje.

Skica je ista kao i u prvome rješenju. 1 bod

Kao i u prvom rješenju nalazimo da je $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$ te da je $|\overline{BC}| = 4 \text{ cm}$ i $|\overline{AC}| = 4\sqrt{3} \text{ cm}$. 2 boda

Neka je točka F sjecište pravaca EC i AD . Na isti način kao i u prvome rješenju nalazimo da je $|\angle FCA| = 30^\circ$ i $|\angle AFC| = 90^\circ$. 1 bod

Tražena je površina četverokuta $ABED$ jednaka zbroju površina četverokuta $EFAB$ i trokuta EDF :

$$P_{ABED} = P_{EFAB} + P_{EDF}. \quad 1 \text{ bod}$$

Unutarnji kutovi uz vrhove A i F četverokuta $EFAB$ pravi su zbog čega je taj četverokut trapez. 1 bod

Uočimo da je \overline{CF} visina jednakokraničnoga trokuta kojem je osnovica duljine $4\sqrt{3} \text{ cm}$, pa je $|\overline{CF}| = 6 \text{ cm}$, a $|\overline{EF}| = 10 \text{ cm}$. 1 bod

Sada je redom:

$$P_{EFAB} = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{EF}| + |\overline{AB}|) \cdot |\overline{AF}| = \frac{1}{2} \cdot (10 + 8) \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2, \quad 1 \text{ bod}$$

$$P_{EDF} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DF}| \cdot |\overline{EF}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 10 = 10\sqrt{3}. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno izračunavamo ukupnu površinu:

$$P_{ABED} = 18\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 28\sqrt{3} \text{ cm}^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Zadatak B-1.5.

Na školskome je natjecanju iz matematike u prvome razredu sudjelovalo 7 učenika među kojima su Ana, Dino, Jakov, Katja i Toni. Budući da je ljestvica poretka objavljena sa zaporkama, njihovi se prijatelji iz razreda zabavljaju pogađanjem koja su mjesta ostvarili Ana, Dino, Jakov, Katja i Toni. Pri tome su im poznati sljedeći podatci:

- nema učenika s istim brojem bodova
- Tonijev je rang paran broj
- Dino je ispred Ane.

Na koliko načina prijatelji mogu dodijeliti rang Ani, Dinu, Jakovu, Katji i Toniju?

Prvo rješenje.

Ako svakome od pet navedenih učenika dodijelimo njegov rang, dobit ćemo peteroznamenkasti broj. Anin je rang prva znamenka, Dinov druga, Jakovljev treća, Katjin četvrta i Tonijev posljednja, peta znamenka.

Stoga traženih rasporeda ima i koliko različitih peteroznamenkastih brojeva sastavljenih od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7, pri čemu se znamenke ne mogu ponavljati, broj je paran i prva znamenka mora biti veća od druge.

Ako je Tonijev rang paran broj, zadnja znamenka može biti 2, 4, 6. Dakle, posljednju znamenku biramo na 3 načina.

2 boda

Neka je posljednja znamenka 2. Preostale znamenke biramo iz skupa $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Budući da prva znamenka mora biti veća od druge:

- ako je druga znamenka 1, prvu biramo iz skupa $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ (5 izbora)
- ako je druga znamenka 3, prvu biramo iz skupa $\{4, 5, 6, 7\}$ (4 izbora)
- ako je druga znamenka 4, prvu biramo iz skupa $\{5, 6, 7\}$ (3 izbora)
- ako je druga znamenka 5, prvu biramo iz skupa $\{6, 7\}$ (2 izbora)
- ako je druga znamenka 6, prvu biramo iz skupa $\{7\}$ (1 izbor).

2 boda

Ukupan je broj mogućih načina da izaberemo prve dvije znamenke $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

2 boda

Nakon odabira prve dvije i zadnje znamenke treću i četvrtu znamenku biramo od preostala četiri broja. To možemo učiniti na $4 \cdot 3 = 12$ načina.

2 boda

Za svaki od 3 odabira posljednje znamenke postoji 15 odabira prve i druge, što je ukupno $3 \cdot 15$ odabira za te tri znamenke.

Za svaki od tih $3 \cdot 15$ odabira postoji po 12 odabira treće i četvrte znamenke, što daje ukupno $3 \cdot 15 \cdot 12 = 540$ različitih peteroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju dane uvjete.

Stoga je 540 načina da se danim učenicima dodijeli rang od 1 do 7.

2 boda

Drugo rješenje.

Kao i u prethodnome rješenju svakomu ćemo od pet navedenih učenika pridružiti njegov rang, odnosno jedan od brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Najprije Toniju pridružujemo jedan od brojeva iz skupa $\{2, 4, 6\}$, što možemo napraviti na 3 načina.

2 boda

Preostala 4 natjecatelja mogu dobiti bilo koji od preostalih šest brojeva, što možemo napraviti na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ načina.

3 boda

Opisano pridruživanje možemo napraviti na $3 \cdot 360 = 1080$ načina.

2 boda

U pola od tih načina Ana će imati poziciju veću od Dina, a u pola će biti obrnuto, što nam nosi ukupno $1080 : 2 = 540$ načina koji odgovaraju uvjetu zadatka.

3 boda

Treće rješenje.

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

1. Dino je prvi.

Tada za Tonija možemo odabrati jednu od 3 parne pozicije, dok za Anu preostaje 5 pozicija što je $3 \cdot 5 = 15$ razmještaja.

1 bod

2. Dino je drugi.

Tada za Tonija možemo odabrati jednu od preostale 2 parne pozicije, dok Anu možemo smjestiti na 4 pozicije. Prema tome, u tome slučaju za njih imamo $2 \cdot 4 = 8$ razmještaja.

1 bod

3. Dino je treći.

Ako je Toni na drugoj poziciji tada Anu možemo smjestiti na 4 pozicije, a ako je Toni na četvrtoj ili šestoj poziciji, Anu možemo smjestiti na 3 pozicije. To je ukupno $4 + 2 \cdot 3 = 10$ razmještaja.

1 bod

4. Dino je četvrti.

Ako je Toni na drugoj poziciji, za Anu na raspolaganju imamo 3 pozicije. Ako je Toni na šestoj poziciji, za Anu imamo 2 pozicije. Prema tome, u tome slučaju imamo ukupno 5 razmještaja.

1 bod

5. Dino je peti.

Ako je Toni na šestoj poziciji, Ana mora biti na sedmoj. Ako je Toni na drugoj ili četvrtoj poziciji, Ana mora ići na šestu ili sedmu poziciju. Prema tome, izbor pozicije za Tonija i Anu nosi $1 + 2 \cdot 2 = 5$ načina.

1 bod

6. Dino je šesti.

Tada Ana mora biti na sedmoj poziciji, a Toni može biti na drugoj ili četvrtoj poziciji, pa za njega imamo 2 načina.

1 bod

Za Dina, Anu i Tonija prema navedenom imamo ukupno $15 + 8 + 10 + 5 + 5 + 2 = 45$ razmještaja.

1 bod

Preostala 4 natjecatelja možemo razmjestiti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina.

Međutim, kako učenike koji nisu među navedenih 5 ne razlikujemo, taj broj moramo podijeliti s 2. Prema tome, za te natjecatelje imamo ukupno $24 : 2 = 12$ načina.

1 bod

Ukupno imamo $45 \cdot 12 = 540$ razmještaja.

2 boda

Četvrto rješenje.

Kao i u prethodnome rješenju rezultate natjecanja shvaćamo kao niz od 7 znakova, pri čemu pozicija znaka označava rang natjecatelja.

Od tri parna mjesta odaberimo najprije mjesto za Tonija, što možemo učiniti na 3 načina.

2 boda

Od preostalih 6 mjesta sada odabiremo 2 mjesta za Anu i Dina. Prvo mjesto odabiremo na 6 načina, a drugo onda na 5 načina, što ukupno daje $6 \cdot 5 = 30$ načina. Međutim, kod Ane i Dina pozicije su određene, tj. Dino mora biti na poziciji s manjim, a Ana na poziciji s većim brojem što ukupno daje $30 : 2 = 15$ načina.

2 boda

Preostaje još 4 mjesta na koja proizvoljno možemo rasporediti preostale 4 osobe, što možemo učiniti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina.

2 boda

Opisani proces daje ukupno $3 \cdot 15 \cdot 24 = 1080$ načina.

2 boda

Kako poredak dvaju natjecatelja koji nisu među odabranima nije bitan, rang odabranih pet natjecatelja možemo dodijeliti na $1080 : 2 = 540$ načina.

2 boda

Napomena: Učenik je mogao najprije odrediti broj načina za Anu i Dina, no u tome slučaju trebao bi analizirati tri posebna slučaja u ovisnosti o tome koliko parnih pozicija zauzimaju Ana i Dino. Ako je učenik korektno zapisao pripadna tri slučaja, dobiva 1 bod, te po 1 bod za točno određen broj načina u svakome od slučaja. Preostalih 6 bodova tada dodijeliti prema navedenoj shemi.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi:

$$\frac{x^9}{7} + \frac{1}{7} = \frac{x^6}{3} + \frac{x^3}{3}.$$

Rješenje.

Zapišimo danu jednadžbu u pogodnijemu obliku:

$$\frac{1}{7}(x^9 + 1) - \frac{x^3}{3}(x^3 + 1) = 0$$

$$3(x^9 + 1) - 7x^3(x^3 + 1) = 0$$

$$3(x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) - 7x^3(x^3 + 1) = 0 \quad 3 \text{ boda}$$

$$(x^3 + 1)(3(x^6 - x^3 + 1) - 7x^3) = 0$$

$$(x^3 + 1)(3x^6 - 10x^3 + 3) = 0 \quad 2 \text{ boda}$$

Slijedi da je $x^3 + 1 = 0$ ili $3x^6 - 10x^3 + 3 = 0$. 1 bod

U prvome je slučaju $x_1 = \sqrt[3]{-1} = -1$. 1 bod

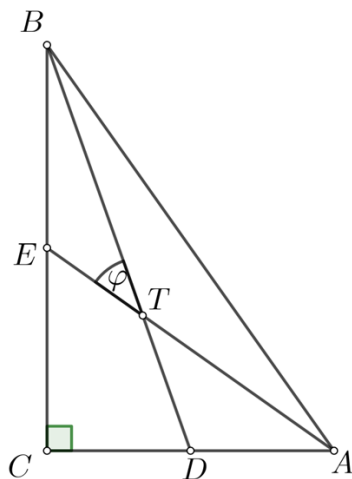
U drugom slučaju uvođenjem supstitucije $x^3 = t$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $3t^2 - 10t + 3 = 0$ čija su rješenja jednaka $t_1 = 3$, $t_2 = \frac{1}{3}$. 1 bod

Slijedi da je $x_2 = \sqrt[3]{3}$, $x_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$. 2 boda

Dakle, sva rješenja zadane jednadžbe su $-1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Zadatak B-2.2.

Duljine kateta pravokutnoga trokuta odnose se $1 : \sqrt{2}$. Odredi kosinus manjega kuta koji zatvaraju težišnice povučene na katete toga trokuta.

Rješenje.

Neka je $b : a = 1 : \sqrt{2}$, odnosno $b = k$ i $a = \sqrt{2}k$.

Primjenom Pitagorina poučka na pravokutan trokut AEC dobivamo da je duljina težišnice povučene iz vrha A trokuta ABC jednaka:

$$t_a = |AE| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{k\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{k\sqrt{6}}{2}. \quad 2 \text{ boda}$$

Analogno, primjenom Pitagorina poučka na pravokutan trokut DBC dobivamo da je duljina težišnice povučene iz vrha B trokuta ABC jednaka:

$$t_b = |BD| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{(\sqrt{2}k)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2} = \frac{3k}{2}. \quad 2 \text{ boda}$$

Primijenimo li poučak o kosinusu na trokut TBE dobivamo:

$$|BE|^2 = |TE|^2 + |TB|^2 - 2|TE| \cdot |TB| \cdot \cos \varphi. \quad (*) \quad 2 \text{ boda}$$

Kako težište dijeli težišnicu u omjeru $2 : 1$ računajući od vrha trokuta, zaključujemo da je:

$$|TE| = \frac{1}{3}t_a = \frac{k\sqrt{6}}{6}, \quad |TB| = \frac{2}{3}t_b = k. \quad 2 \text{ boda}$$

Konačno, uvrštavanjem $|TE| = \frac{k\sqrt{6}}{6}$, $|TB| = k$ i $|BE| = \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{2}k}{2}$ u $(*)$ slijedi:

$$\frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{6} + k^2 - 2 \cdot \frac{k\sqrt{6}}{6} \cdot k \cdot \cos \varphi,$$

odakle sređivanjem dobivamo

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad 2 \text{ boda}$$

Napomena: Budući da se traži kosinus kuta u trokutu, učenici mogu pretpostaviti da je riječ o pravokutnom trokutu s duljinama kateta $a = \sqrt{2}$, $b = 1$ te im zbog toga ne treba oduzimati bodove.

Zadatak B-2.3.

Odredi sve različite racionalne brojeve $\frac{\overline{ab}}{10}$ i $\frac{\overline{cd}}{10}$ za koje vrijedi $\left(\frac{\overline{ab}}{10}\right)^2 + \left(\frac{\overline{cd}}{10}\right)^2 = \frac{\overline{ab}}{10} + \frac{\overline{cd}}{10}$, pri čemu su a, b, c, d znamenke i $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Prvo rješenje.

Nakon množenja zadane jednakosti sa 100 dobivamo jednakost

$$\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = 10(\overline{ab} + \overline{cd}).$$

Označimo $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$. Tada je

$$x^2 + y^2 = 10(x + y). \quad 1 \text{ bod}$$

Zapišimo posljednju jednadžbu u pogodnome obliku:

$$x^2 - 10x + y^2 - 10y = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 50.$$

Tada je $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 50$. 2 boda

Budući da su x, y prirodni brojevi, vrijedi da je

$$(x - 5)^2 = 25 \text{ i } (y - 5)^2 = 25, (x - 5)^2 = 1 \text{ i } (y - 5)^2 = 49 \text{ ili } (x - 5)^2 = 49 \text{ i } (y - 5)^2 = 1, \quad 2 \text{ boda}$$

pa imamo sljedeće mogućnosti

$$x - 5 = \pm 5 \text{ i } y - 5 = \pm 5 \text{ ili } x - 5 = \pm 7 \text{ i } y - 5 = \pm 1$$

ili obrnuto, što nam daje isto rješenje zbog simetričnosti jednadžba.

U prvom ćemo slučaju dobiti $(x, y) \in \{(10, 10), (0, 0), (10, 0), (0, 10)\}$ što nije rješenje zbog uvjeta u zadatku. 1 bod

U drugome slučaju riješimo redom sustave:

$$\begin{cases} x - 5 = 7 \\ y - 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (12, 6),$$

$$\begin{cases} x - 5 = -7 \\ y - 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2, 6),$$

$$\begin{cases} x - 5 = 7 \\ y - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (12, 4),$$

$$\begin{cases} x - 5 = -7 \\ y - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-2, 4).$$

2 boda

Jedina moguća rješenja su uređeni parovi $(12, 6)$ i $(12, 4)$, pa su traženi decimalni brojevi

$$1.2 \text{ i } 0.6 \text{ ili } 1.2 \text{ i } 0.4.$$

2 boda

Drugo rješenje.

Nakon množenja zadane jednakosti sa 100 dobivamo jednakost

$$\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = 10(\overline{ab} + \overline{cd}).$$

Tada je

$$(10a + b)^2 + (10c + d)^2 = 10(10a + b + 10c + d),$$

odnosno

$$100a^2 + 20ab + 100c^2 + 20cd + (b^2 + d^2) = 100a + 100c + 10(b + d) \quad (*) \quad 1 \text{ bod}$$

Uočimo da su svi pribrojnici osim $b^2 + d^2$ djeljivi s 10, pa i zbroj $b^2 + d^2$ mora biti djeljiv s 10.

1 bod

Imamo sljedeće mogućnosti:

$$(b, d) \text{ ili } (d, b) \in \{(1, 3), (2, 4), (2, 6), (5, 5), (4, 8), (3, 9), (6, 8), (7, 9)\}, \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno

$$b^2 + d^2 \in \{10, 20, 40, 50, 80, 90, 100, 130\}. \quad 1 \text{ bod}$$

Ako u izraz $(*)$ uvrstimo da je $b^2 + d^2 = 10k$, $k \in \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13\}$ i podijelimo s 10 dana jednakost prelazi u

$$10a^2 + 2ab + 10c^2 + 2cd + k = 10a + 10c + (b + d), k \in \{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13\}. \quad (**)$$

Budući da je $b + d$ uvijek paran broj, slijedi da je $k \in \{2, 4, 8, 10\}$, odnosno

1 bod

$$(b, d) \text{ ili } (d, b) \in \{(2, 4), (2, 6), (4, 8), (6, 8)\} \text{ i } b + d \in \{6, 8, 12, 14\}.$$

1 bod

Iz jednakosti (**) slijedi

$$10(a^2 + c^2 - a - c) = (b + d) - k - 2(ab + cd).$$

Budući da je razlika $(b + d) - k$ jednaka 4 slijedi

$$5(a^2 + c^2 - a - c) = 2 - (ab + cd).$$

1 bod

Uočimo da je lijeva strana uvijek pozitivna ili jednaka 0 te da desna strana mora biti djeljiva s 5. Zaključujemo da je $ab + cd = 2$.

1 bod

Kako su b i d različiti od 0, jedina je mogućnost $(a, c) = (1, 0)$, $(b, d) \in \{(2, 4), (2, 6)\}$. Zbog simetričnosti isto vrijedi za (c, a) , odnosno (d, b) .

1 bod

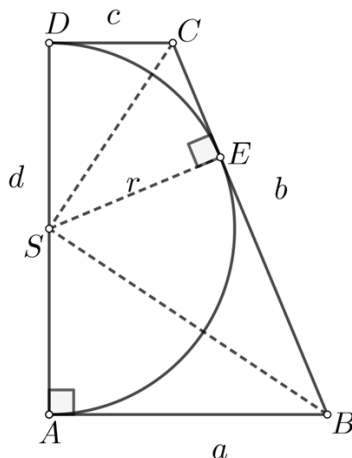
Traženi su brojevi tada jednaki 1.2 i 0.6 ili 1.2 i 0.4.

1 bod

Zadatak B-2.4.

Zadan je pravokutan trapez $ABCD$ s pravim kutovima pri vrhovima A i D . Duljine su osnovica trapeza $|AB| = 9$ cm i $|CD| = 4$ cm. Kružnica s promjerom \overline{AD} dodiruje krak \overline{BC} . Kolika je površina trapeza?

Prvo rješenje.



Skicirajmo pravokutni trapez, označimo diralište polukružnice i kraka trapeza s E te uočimo pravi kut SEB , pri čemu je točka S središte dane kružnice.

2 boda

Uvedimo oznake $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|DC| = c$, $|AD| = d$.

Kako su trokuti ABS i BES pravokutni sa zajedničkom hipotenuzom te kako je $|SA| = |SE| = r$, po S-S-K poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su trokuti ABS i BES sukladni.

Stoga je $|BE| = a$.

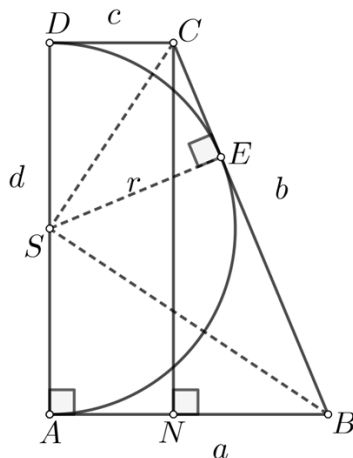
2 boda

Analogno, kako su trokuti SEC i SCD pravokutni sa zajedničkom hipotenuzom te kako je $|SD| = |SE| = r$, po S-S-K poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su i trokuti SEC i SCD sukladni.

Stoga je $|CE| = c$.

2 boda

Nadopunimo skicu spuštanjem visine iz vrha C na osnovicu a trapeza $ABCD$.



Primijenimo li Pitagorin poučak na pravokutni trokut BCN dobivamo da je duljina visine trapeza:

$$|CN| = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ cm.}$$

2 boda

Konačno, površina je trapeza:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |CN| = \frac{9+4}{2} \cdot 12 = 78 \text{ cm}^2.$$

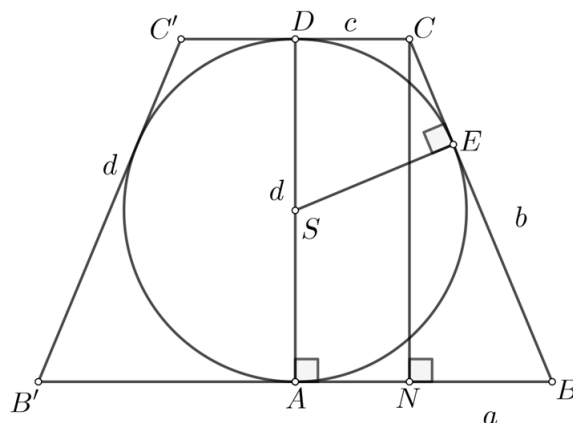
2 boda

Napomena: Ako učenik uoči da su navedeni trokuti sukladni po poučku SSK, a nije obrazložio (zajednička hipotenuza, polumjer i kut nasuprot hipotenuze), dodijeliti sve pripadajuće bodove.

Drugo rješenje.

Ako zadani trapez $ABCD$ osnosimetrično preslikamo s obzirom na os koja sadržava promjer kružnice, dobit ćemo jednakokračan trapez $B'BCC'$.

2 boda



Budući da je novonastali trapez opisan zadanoj kružnici, zaključujemo da je $B'BCC'$ tangencijalni četverokut. 2 boda

Prema svojstvu tangencijalnoga četverokuta vrijedi da je:

$$|BB'| + |CC'| = |BC| + |B'C'|, \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno

$$18 + 8 = 2|BC|.$$

Odatle je $|BC| = 13 \text{ cm}$. 1 bod

Tada je visina trapeza spuštena iz vrha C jednaka:

$$|CN| = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ cm}. \quad 2 \text{ boda}$$

Površina zadanoga trapeza jednaka je:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |CN| = \frac{9 + 4}{2} \cdot 12 = 78 \text{ cm}^2. \quad 2 \text{ boda}$$

Zadatak B-2.5.

U pravokutniku $ABCD$ na stranici \overline{AB} označeno je n točaka, a na svakoj od stranica \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} po pet točaka. Ukupan broj svih trokuta kojima su vrhovi određeni označenim točkama iznosi 2150. Odredi broj n ako vrhovi pravokutnika nisu među označenim točkama.

Prvo rješenje.

Načine povezivanja odabranih točaka u trokut možemo podijeliti na pet slučajeva.

Prvi slučaj.

Jedan vrh trokuta nalazi se na stranici \overline{AB} , a preostala dva vrha svaki na jednoj od stranica \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} .

Vrh trokuta na stranici \overline{AB} možemo odabrati na n načina, dvije od preostale tri stranice na kojima se nalazi po jedan vrh trokuta možemo odabrati na 3 načina, dok točku na svakoj od tih stranica možemo odabrati na 5 načina.

Broj je tako dobivenih trokuta $n \cdot 3 \cdot 5^2 = 75n$. 2 boda

Drugi slučaj.

Jedan vrh trokuta na stranici \overline{AB} , a preostala dva vrha na jednoj od preostalih triju stranica pravokutnika.

Vrh trokuta na stranici \overline{AB} možemo odabrati na n načina, stranicu na kojoj se nalaze dva vrha možemo odabrati na 3 načina, a dvije točke na toj stranici možemo odabrati na $\frac{5 \cdot 4}{2}$ načina.

Broj je tako dobivenih trokuta $n \cdot 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 30n$. 2 boda

Treći slučaj.

Na stranici \overline{AB} nalaze se dva vrha trokuta, dok je treći vrh na jednoj od preostale tri stranice pravokutnika.

Dva vrha trokuta koji se nalaze na stranici \overline{AB} možemo odabrati na $\frac{n(n-1)}{2}$ načina, stranicu na kojoj se nalazi treći vrh možemo odabrati na 3 načina, dok točku na odabranoj stranici možemo odabrati na 5 načina.

Broj je tako dobivenih trokuta $\frac{n(n-1)}{2} \cdot 3 \cdot 5 = \frac{15}{2}n \cdot (n-1)$. 2 boda

Četvrti slučaj.

Na svakoj od stranica \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} nalazi se po jedan vrh.

Na svakoj od tih stranica vrh možemo odabrati na 5 načina.

Broj je tako dobivenih trokuta $5^3 = 125$. 1 bod

Peti slučaj.

Na jednoj od stranica \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} nalaze se dva vrha trokuta, a na jednoj od njih jedan vrh.

Stranicu na kojoj se nalaze dva vrha možemo odabrati na 3 načina, a vrhove na toj stranici možemo odabrati na $\frac{5 \cdot 4}{2}$ načina.

Preostalu stranicu na kojoj se nalazi treći vrh možemo odabrati na 2 načina, a vrh na toj stranici na 5 načina.

Broj je tako dobivenih trokuta $3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 300$. 1 bod

Zbrojimo li broj trokuta po navedenim slučajevima slijedi

$$75n + 30n + \frac{15}{2} \cdot n \cdot (n-1) + 125 + 300 = 2150,$$

dakle sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$n^2 + 13n - 230 = 0$$

1 bod

čija su rješenja 10 i -23 .

Kako je n broj točaka na stranici \overline{AB} , zaključujemo $n = 10$. 1 bod

Drugo rješenje.

Ukupno je označeno $n + 15$ točaka. Od njih biramo tri koje će biti vrhovi trokuta.

Bilo koje tri točke možemo odabrati na

$$(n+15)(n+15-1)(n+15-2)$$

načina, ali taj broj moramo podijeliti s brojem njihovih međusobnih rasporeda (bez obzira na poredak).

Međusobnih rasporeda triju točaka ima $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. 2 boda

Dakle, tri vrha trokuta od $n + 15$ točaka možemo odabrati na

$$\frac{(n + 15)(n + 14)(n + 13)}{6}$$

načina.

1 bod

Od toga broja moramo oduzeti odabire triju točaka koje se nalaze na istoj stranici pravokutnika.

Tako na stranici \overline{AB} tri točke možemo odabrati na

$$\frac{n(n - 1)(n - 2)}{6}$$

načina.

1 bod

Na svakoj od stranica \overline{BC} , \overline{CD} i \overline{AD} tri točke možemo odabrati na

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$

načina.

1 bod

Tada je ukupan broj odabira triju vrhova trokuta jednak:

$$\frac{(n + 15)(n + 14)(n + 13)}{6} - \frac{n(n - 1)(n - 2)}{6} - 3 \cdot 10.$$

2 boda

Stoga je traženi broj rješenje jednadžbe:

$$\frac{(n + 15)(n + 14)(n + 13)}{6} - \frac{n(n - 1)(n - 2)}{6} - 30 = 2150.$$

1 bod

Nakon množenja jednadžbe sa 6 i sređivanja imamo redom:

$$(n^2 + 29n + 210)(n + 13) - n \cdot (n^2 - 3n + 2) - 180 = 12900$$

$$n^3 + 42n^2 + 587n + 2730 - n^3 + 3n^2 - 2n - 180 = 12900$$

$$45n^2 + 585n - 10350 = 0$$

$$n^2 + 13n - 230 = 0$$

1 bod

Traženi broj n pozitivno je rješenje ove jednadžbe, broj $n = 10$.

1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Koji je najveći četveroznamenasti prirodni broj koji se može zapisati koristeći se svim znamenkama brojeva A , B , C ako je

$$A = \sqrt[4]{5^3 \sqrt{2025}} \cdot \sqrt[3]{3^4 \sqrt{2025}} \cdot \sqrt[3]{5^4 \sqrt{5}},$$

$$B = \log \left(\frac{2^{\sqrt{\log_2 2025}}}{2025^{\sqrt{\log_{2025} 2}}} \right),$$

$$C = 2025^{\log(\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ)}?$$

Rješenje.

Izračunajmo vrijednosti brojeva A , B i C .

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[4]{5^3 \sqrt{2025}} \cdot \sqrt[3]{3^4 \sqrt{2025}} \cdot \sqrt[3]{5^4 \sqrt{5}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3 \cdot 2025}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4 \cdot 2025}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{5^4 \cdot 5}} = \\ &= \sqrt[12]{5^3 \cdot 2025} \cdot \sqrt[12]{3^4 \cdot 2025} \cdot \sqrt[12]{5^5} = \sqrt[12]{5^8 \cdot 3^4 \cdot 2025^2} = \sqrt[12]{5^8 \cdot 3^4 \cdot (5^2 \cdot 3^4)^2} = \\ &= \sqrt[12]{5^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 3^8} = \sqrt[12]{5^{12} \cdot 3^{12}} = 5 \cdot 3 = 15. \end{aligned}$$

3 boda

$$\begin{aligned} B &= \log \frac{2^{\sqrt{\log_2 2025}}}{2025^{\sqrt{\log_{2025} 2}}} = \log 2^{\sqrt{\log_2 2025}} - \log 2025^{\sqrt{\log_{2025} 2}} = & 1 \text{ bod} \\ &= \sqrt{\log_2 2025} \cdot \log 2 - \sqrt{\log_{2025} 2} \cdot \log 2025 = & 1 \text{ bod} \\ &= \sqrt{\frac{\log 2025}{\log 2} \cdot \log^2 2} - \sqrt{\frac{\log 2}{\log 2025} \cdot \log^2 2025} = & 1 \text{ bod} \\ &= \sqrt{\log 2025 \cdot \log 2} - \sqrt{\log 2 \cdot \log 2025} = 0. & 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 2025^{\log(\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ)} = 2025^{\log(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)} = & 1 \text{ bod} \\ &= 2025^{\log 1} = 2025^0 = 1. & 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

Traženi je četveroznamenasti broj 5110.

1 bod

Napomena: Bilo koji pravilan način određivanja točne vrijednosti broja A vrijedi 3 boda. Za svaku računsku pogrešku oduzeti 1 bod.

Zadatak B-3.2.

Odredi zbroj rješenja jednadžbe $(2 + \sqrt{3})^{\cos x} + (2 - \sqrt{3})^{\cos x} = 4$ na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi \rangle$.

Rješenje.

Primijetimo da je $(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$, odnosno $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

1 bod

Stoga zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(2 + \sqrt{3})^{\cos x} + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{\cos x}} = 4.$$

Supstitucijom $t = (2 + \sqrt{3})^{\cos x}$ jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 4t + 1 = 0.$$

2 boda

Njezina su rješenja $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

1 bod

U prvome je slučaju $(2 + \sqrt{3})^{\cos x} = 2 + \sqrt{3}$, pa je

$$\cos x = 1,$$

1 bod

odnosno $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1 bod

U drugom je slučaju $(2 + \sqrt{3})^{\cos x} = 2 - \sqrt{3}$, pa je

$$\cos x = -1,$$

1 bod

odnosno $x = (2k - 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1 bod

Uočimo da su sva rješenja polazne jednadžbe oblika $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi \rangle$ rješenja su -2π , $-\pi$, 0 , π , 2π , 3π .

1 bod

Njihov zbroj iznosi 3π .

1 bod

Napomena: Učenik ne treba zapisati opća rješenja trigonometrijskih jednadžba. Ako za svaku jednadžbu u oba promatrana slučaja ispiše rješenja na traženom intervalu treba mu dodijeliti sve bodove predviđene za ta rješenja (ukupno 3 boda).

Učenik može polaznu jednadžbu pomnožiti ili s $(2 + \sqrt{3})^{\cos x}$ ili s $(2 - \sqrt{3})^{\cos x}$ i na taj način doći do kvadratne jednadžbe. U tome slučaju treba mu dodijeliti sve bodove predviđene za tu kvadratnu jednadžbu (3 boda).

Zadatak B-3.3.

Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva m i n za koje je temeljni period funkcije

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left| 3 \cdot \sin \frac{x}{m^2} \right| - 5 \cdot \cos \frac{2x}{n^2} \text{ jednak } 2025\pi.$$

Rješenje.

Funkcija f zbroj je periodičnih funkcija $f_1(x) = \left| 3 \cdot \sin \frac{x}{m^2} \right|$ i $f_2(x) = -5 \cdot \cos \frac{2x}{m^2}$. Njezin je temeljni period jednak najmanjemu pozitivnom realnom broju koji je period obiju tih funkcija, tj. najmanjemu zajedničkom višekratniku njihovih perioda u slučaju da takav broj postoji.

1 bod

Odredimo temeljni period svake od tih funkcija.

Temeljni period funkcije $g(x) = 3 \sin \frac{x}{m^2}$ jednak je $\frac{2\pi}{\frac{1}{m^2}} = 2m^2\pi$.

1 bod

Tada je temeljni period funkcije $f_1(x) = \left| 3 \cdot \sin \frac{x}{m^2} \right|$ jednak polovini temeljnoga perioda funkcije g , odnosno $P_1 = m^2\pi$.

1 bod

Funkcija $f_2(x) = -5 \cdot \cos \frac{2x}{n^2}$ ima temeljni period $P_2 = \frac{2\pi}{\frac{2}{n^2}} = n^2\pi$.

1 bod

Kako je najmanji zajednički višekratnik perioda funkcija f_1 i f_2 broj $V(m^2\pi, n^2\pi) = 2025\pi$, zaključujemo da je $V(m^2, n^2) = 2025 = 3^4 \cdot 5^2$.

1 bod

Tada je $m^2, n^2 \in \{1, 9, 25, 81, 225, 2025\}$ jer su to jedini djelitelji broja 2025 koji su potpuni kvadrati.

1 bod

Budući da vrijedi $D(m^2, n^2) \cdot V(m^2, n^2) = m^2 \cdot n^2$, a $V(m^2, n^2) = 2025$, 2025 mora biti djelitelj umnoška brojeva m^2 i n^2 .

1 bod

Stoga imamo sljedeće mogućnosti:

$$(m^2, n^2) \in \{(1, 2025), (2025, 1), (9, 2025), (2025, 9), (25, 2025), (2025, 25), \\ (81, 2025), (2025, 81), (225, 2025), (2025, 225), (2025, 2025), \\ (25, 81), (81, 25), (81, 225), (225, 81)\}.$$

Kako su m i n prirodni brojevi, traženi su uređeni parovi:

$$(m, n) \in \{(1, 45), (45, 1), (3, 45), (45, 3), (5, 45), (45, 5), (9, 45), (45, 9), \\ (15, 45), (45, 15), (45, 45), (5, 9), (9, 5), (9, 15), (15, 9)\}.$$

(ukupno 15 uređenih parova).

3 boda

Napomena: U posljednjemu je koraku moguće dobiti **1 bod** ako učenik navede najmanje 6 uređenih parova koji slijede iz prethodnog koraka, a **2 boda** ako navede bar 12 točnih uređenih parova.

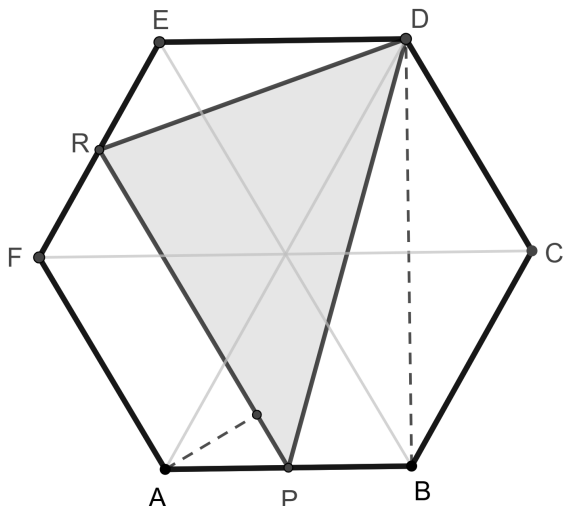
Ako nigdje nije vidljivo da učenik određuje najmanji zajednički višekratnik perioda dviju funkcija, odnosno brojeva m^2 , n^2 , i nije odredio skup svih mogućih m^2 i n^2 , onda može dobiti **4 boda** za određivanje perioda funkcija $f_1(x)$ i $f_2(x)$ i još **1 bod** za ispitivanje nekih mogućih slučajeva i **1 bod** za određivanje najmanje 6 točnih uređenih parova (m, n) (ukupno najviše **6 bodova**).

Ako učenik zaboravi podijeliti temeljni period funkcije apsolutne vrijednosti s 2, određivat će najmanji zajednički višekratnik od $2m^2\pi$ i $n^2\pi$ koji bi trebao biti 2025π , što je nemoguće jer je $2m^2$ sigurno paran broj. U tome slučaju učenik može dobiti najviše **6 bodova** (ako je uočio da je riječ o apsolutnoj vrijednosti, da traži najmanji zajednički višekratnik brojeva $2m^2$ i n^2 te ako je i napisao zaključak da ne postoje takvi prirodni brojevi jer 2025 nije paran, a $2m^2$ je paran broj).

Zadatak B-3.4.

Neka je $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ pravilna uspravna šesterostrana prizma u kojoj je točka P polovište brida \overline{AB} , a točka R polovište brida \overline{EF} . U kojemu su omjeru obujam piramide $DRPE'$ i obujam zadane prizme?

Rješenje.



Skicirajmo bazu prizme, pravilni šesterokut $ABCDEF$ i označimo točke P i R . Označimo duljinu osnovnog brida prizme $|AB| = a$ i sa h duljinu visine prizme i piramide. Tada je površina baze prizme

$$B = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}. \quad 1 \text{ bod}$$

Površina baze piramide jednaka je površini trokuta DRP i može se izračunati kao razlika površine baze prizme i zbroja površina trapeza $APRF$, četverokuta $BCDP$ i trokuta DER .

Četverokut $APRF$ jednakokrani je trapez (jer je \overline{PR} srednjica trapeza $ABEF$ i stoga je $PR \parallel AF$ i duljine $|PR| = \frac{3}{2}a$) čija je visina jednaka visini jednakokraničnoga trokuta duljine stranice $|AP| = \frac{a}{2}$, pa je njegova površina jednaka

$$P_{APRF} = \frac{a + |PR|}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a + \frac{3}{2}a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5}{16} a^2 \sqrt{3}. \quad 2 \text{ boda}$$

Četverokut $BCDP$ može se podijeliti na jednakokrani trokut BCD i pravokutni trokut BDP . Unutrašnji su kutovi jednakokraničnoga trokuta BCD 120° , 30° i 30° , pa je njegova površina jednaka površini jednakokraničnoga trokuta čija je stranica duljine a , tj. $P_{BCD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Površina pravokutnoga trokuta BDP jednaka je $P_{BDP} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Stoga je površina $P_{BCDP} = P_{BCD} + P_{BDP} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. 2 boda

Površina trokuta DER jednaka je $P_{DER} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$. 1 bod

Konačno, površina baze piramide, odnosno površina trokuta DRP , jednaka je

$$\begin{aligned} P_{DRP} &= B - (P_{APRF} + P_{BCDP} + P_{DER}) = \\ &= \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} - \left(\frac{5}{16} a^2 \sqrt{3} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} \right) = \frac{9}{16} a^2 \sqrt{3}. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Obujam piramide $DRPE'$ jednak je

$$V_{\text{piramida}} = \frac{1}{3} \cdot P_{DRP} \cdot h = \frac{3}{16} a^2 \sqrt{3} h. \quad 1 \text{ bod}$$

Obujam prizme jednak je $V_{\text{prizma}} = B \cdot h = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}h$.

1 bod

Traženi omjer obujma piramide i prizme jest

$$\frac{V_{\text{piramida}}}{V_{\text{prizma}}} = \frac{\frac{3}{16}a^2\sqrt{3}h}{\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}h} = \frac{1}{8}.$$

1 bod

Napomena: Učenik ne mora posebno računati obujmove prizme i piramide. Budući da imaju iste visine, može zaključiti da je obujam piramide jednak trećini obujma prizme s istom bazom DRP . Stoga je dovoljno izračunati omjer površina trokuta DRP i šesterokuta $ABCDEF$ i podijeliti s tri.

Osim na prikazani način, učenik može i na druge načine izračunati površinu trokuta DRP i taj račun, ako je potpuno točan, nosi **6 bodova** (na primjer može izračunati $|PR| = \frac{3}{2}a$, $|RD| = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $|DP| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, svaka ta udaljenost po **1 bod** plus računanje površine Heronovom formulom ili kojom drugom metodom **3 boda**).

Zadatak B-3.5.

Martin je na rasprodaji potrošio 972 € kupivši ukupno 42 videoigre za svoju tek otvorenu igraonicu videoigara na igraćim konzolama 1 i 2. Sve su videoigre za igraču konzolu 1 imale identičnu cijenu, koja je izražena u eurima prirodni broj. Videoigre za igraču konzolu 2 prodavale su se po 6 € nižoj cijeni od cijene videoigara za igraču konzolu 1. Koliko je videoigara za igraču konzolu 1 mogao kupiti Martin i po kojoj cijeni ako se zna da je kupio više videoigara za igraču konzolu 2?

Prvo rješenje.

Uvedimo oznake:

m = broj kupljenih videoigara za igraču konzolu 1

n = broj kupljenih videoigara za igraču konzolu 2

c = cijena po kojoj su se prodavale videoigre za igraču konzolu 1

$c - 6$ = cijena po kojoj su se prodavale videoigre za igraču konzolu 2

Prema uvjetima u zadatku vrijedi da je $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m < n$ i $c \in \mathbb{N}$, $c > 6$.

1 bod

Ukupan broj kupljenih videoigara kao i cijena koja je za njih plaćena modelira se sustavom jednačba

$$m + n = 42 \quad (1) \quad 1 \text{ bod}$$

$$m \cdot c + n \cdot (c - 6) = 972. \quad (2) \quad 1 \text{ bod}$$

Iz jednačbe (2) redom slijedi:

$$mc + nc - 6n = 972$$

$$(m + n)c - 6n = 972$$

$$42c - 6n = 972 \quad / : 6$$

$$7c - n = 162, \quad \text{odnosno} \quad 7c = 162 + n.$$

1 bod

Zaključujemo da $162 + n$ mora biti višekratnik broja 7. 1 bod
 Budući da je $m < n$ i $42 = m + n < 2n$ slijedi da je $n > 21$, odnosno $22 \leq n \leq 42$.
 Sada se lako provjeri da je $162 + n$ višekratnik broja 7 jedino za brojeve $n \in \{27, 34, 41\}$. 2 boda
 Iz sustava jednačja (1) i (2) imamo sljedeće mogućnosti:

$$\begin{array}{ll} \text{za } n = 27 \Rightarrow m = 15 \Rightarrow c = 27, & 1 \text{ bod} \\ \text{za } n = 34 \Rightarrow m = 8 \Rightarrow c = 28, & 1 \text{ bod} \\ \text{za } n = 41 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow c = 29. & 1 \text{ bod} \end{array}$$

Dakle, Martin je za igraću konzolu 1 kupio ili 15 videoigara po cijeni 27 € za komad ili 8 videoigara po cijeni od 28 € za komad ili samo 1 videoigru po cijeni 29 € za komad.

Drugo rješenje.

Uvodimo iste oznake kao i u prvome rješenju postavljajući identične uvjete $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m < n$ i $c \in \mathbb{N}$, $c > 6$. 1 bod
 Također kao i u prvome rješenju matematički model sustav je jednačja

$$\begin{array}{ll} m + n = 42 & (3) \quad 1 \text{ bod} \\ m \cdot c + n \cdot (c - 6) = 972. & (4) \quad 1 \text{ bod} \end{array}$$

Sređivanjem jednačja (4) redom slijedi

$$\begin{array}{ll} m \cdot c + (42 - m) \cdot (c - 6) = 972 & \\ mc + 42c - 252 - mc + 6m = 972 & \\ 42c + 6m = 1224 & \quad / : 6 \\ 7c + m = 204 & \quad \text{odnosno, } 7c = 204 - m. \end{array} \quad 1 \text{ bod}$$

Zaključujemo $204 - m$ mora biti višekratnik broja 7. 1 bod
 Budući da je $m < n$ i $42 = m + n > 2m$ slijedi da je $m < 21$, odnosno $0 \leq m \leq 20$.
 Sada se lako provjeri da je $204 - m$ višekratnik broja 7 jedino za brojeve $m \in \{1, 8, 15\}$. 2 boda
 Iz sustava jednačja (3) i (4) imamo sljedeće mogućnosti:

$$\begin{array}{ll} \text{za } m = 15 \Rightarrow c = 27, & 1 \text{ bod} \\ \text{za } m = 8 \Rightarrow c = 28, & 1 \text{ bod} \\ \text{za } m = 1 \Rightarrow c = 29. & 1 \text{ bod} \end{array}$$

Dakle, Martin je za igraću konzolu 1 kupio ili 15 videoigara po cijeni 27 € za komad ili 8 videoigara po cijeni od 28€ za komad ili samo 1 videoigru po cijeni 29 € za komad.

Treće rješenje.

Uvodimo iste oznake kao i u prvome rješenju postavljajući identične uvjete $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m < n$ i $c \in \mathbb{N}$, $c > 6$. 1 bod
 Također kao i u prvom rješenju matematički model sustav je jednačja

$$\begin{array}{ll} m + n = 42 & (5) \quad 1 \text{ bod} \\ m \cdot c + n \cdot (c - 6) = 972. & (6) \quad 1 \text{ bod} \end{array}$$

Riješimo li ovaj sustav jednadžbi po nepoznanicama m i n , dobit ćemo

$$m = -7c + 204 \quad \text{i} \quad n = 7c - 162. \quad (7) \quad 1 \text{ bod}$$

Prema uvjetu u zadatku $m \geq 0$ pa je

$$-7c + 204 \geq 0, \text{ odakle slijedi da je } c \leq 29. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz uvjeta da je $m < n$, slijedi da je

$$-7c + 204 < 7c - 162, \quad \text{odnosno} \quad c \geq 27. \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, $c \in \{27, 28, 29\}$.

1 bod

Tada iz (7) slijedi

$$\text{za } c = 27 \Rightarrow m = 15, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{za } c = 28 \Rightarrow m = 8, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{za } c = 29 \Rightarrow m = 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Dakle, Martin je za igraću konzolu 1 kupio ili 15 videoigara po cijeni 27 € za komad ili 8 videoigara po cijeni od 28 € za komad ili samo 1 videoigru po cijeni 29 € za komad.

Napomena: Ako učenik zadatak rješava isključivo metodom pogađanja, za svako pogodoeno rješenje dodijeliti po 1 bod, tj. pogađanjem rješenja može dobiti najviše 3 boda.

Ako učenik djelomično modelira jednadžbama, pa potom prijeđe na metodu pogađanja, dodijeliti za svako pogodoeno rješenje po 1 bod kao i one bodove koji mu po bodovnoj shemi pripadaju za pojedini zaključak koji je zapisao.

Da bi učenik dobio 1 bod za uvjete, ne mora nužno zapisati uvjet $c > 6$, niti je nužno da uvjete navodi na početku rješavanja. Dovoljno je da se tijekom rješavanja jasno koristi činjenicom da su dane veličine m , n , c cijeli brojevi (nenegativni) i da je $m < n$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

14. ožujka 2025.

AKO UČENIK IMA DRUKČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO TREBA I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Koliko ima kompleksnih brojeva z kojima su realni i imaginarni dio cijeli brojevi i za koje vrijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(z^2 + 1) &\geq 2(\operatorname{Im} z)^2 \\ |z - i| &< 3?\end{aligned}$$

Rješenje.

Neka je $z = x + yi$. Tada je

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \text{ i } z^2 + 1 = x^2 - y^2 + 1 + 2xyi. \quad 1 \text{ bod}$$

Tada nejednakost $\operatorname{Im}(z^2 + 1) \geq 2(\operatorname{Im} z)^2$ prelazi u $2xy \geq 2y^2$, odnosno $y^2 - xy \leq 0$. Iz $y(y - x) \leq 0$ slijede dvije mogućnosti 1 bod
1 bod

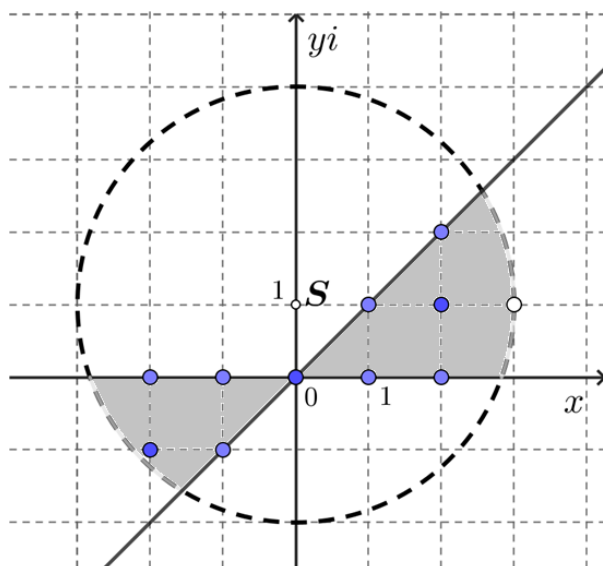
$$\begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq x \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x \end{cases}, \quad (\star)$$

što je u koordinatnome sustavu dio ravnine između osi x i pravca $y = x$. 2 boda

Druga nejednakost $|z - i| < 3$ za $z = x + yi$ prelazi u nejednadžbu $x^2 + (y - 1)^2 < 9$, što je u koordinatnome sustavu otvoreni krug sa središtem $S(0, 1)$ i polumjerom $r = 3$.

1 bod

Traženi skup točaka prikazan je na sljedećoj slici.



2 boda

Za točke (x, y) s cjelobrojnim koordinatama koje su unutar danoga kruga vrijedi $-3 < x < 3$, $-2 < y < 4$. Sa skice i direktnom provjerom uvjeta iz (\star) dobivamo 10 točaka s cjelobrojnim koordinatama koje pripadaju skiciranom skupu. Dakle, traženih kompleksnih brojeva ima 10.

2 boda

Napomena: Učenik može i bez geometrijskog prikaza traženog skupa kompleksnih brojeva doći do rješenja. Nakon navođenja svih uvjeta za x i y može direktnom provjerom tih uvjeta ispisati sve tražene uređene parove cijelih brojeva. U tome slučaju treba dodijeliti sve predviđene bodove ako je jasno da je proveden postupak provjere uvjeta.

Napomena: Zadatak se može riješiti i koristeći se trigonometrijskim zapisom kompleksnoga broja $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Prva se nejednadžba tada svodi na nejednadžbu $r^2 \sin(2\varphi) \geq 2r^2 \sin^2 \varphi$ (2 boda), iz koje slijedi:

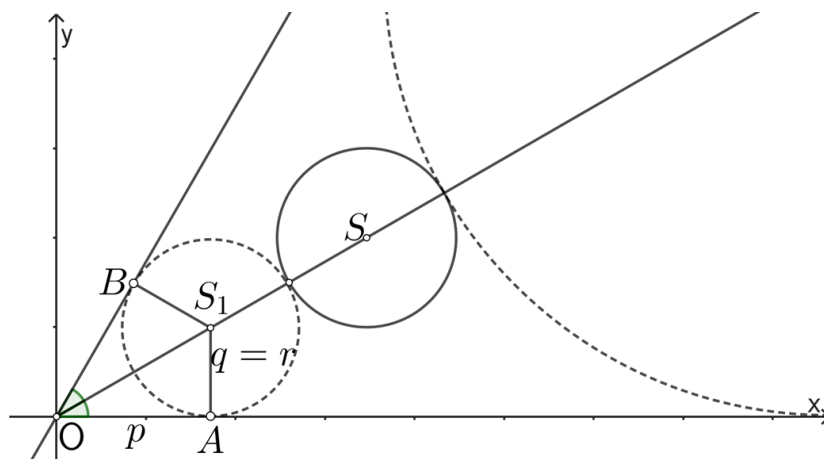
$$\begin{cases} \sin \varphi \geq 0 \\ \cos \varphi \geq \sin \varphi \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} \sin \varphi \leq 0 \\ \cos \varphi \leq \sin \varphi \end{cases} \quad (1 \text{ bod}), \quad (\star)$$

Rješavanjem tih sustava nejednadžbi za argument se dobiva $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$. Pripadni kompleksni brojevi z su dakle u Gaussovoj ravnini između osi x i pravca $y = x$ (2 boda). Druga nejednadžba u Gaussovoj ravnini ponovno određuje otvoreni krug polumjera $r = 3$ sa središtem u točki $S(0, 1)$ (1 bod). Daljnji postupak i bodovanje isto je kao u navedenom rješenju.

Zadatak B-4.2.

Odredi koordinate središta i polumjer kružnice koja dira os x , pravac s jednadžbom $y = \sqrt{3}x$ i kružnicu s jednadžbom $(x - 10\sqrt{3})^2 + (y - 10)^2 = 25$.

Rješenje.



Skica

Neka tražena kružnica k ima središte u točki $S(p, q)$ i polumjer r . Budući da kružnica k dira zadani pravac i os x , njezino je središte od zadanoga pravca i osi x udaljeno za r te se nalazi na simetrali kuta $\varphi = \angle AOB$ koji zadani pravac zatvara s pozitivnim smjerom osi x .

1 bod

Kako je $\tan \varphi = \sqrt{3}$, $\varphi = 60^\circ$, slijedi da je $\tan \frac{\varphi}{2} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{q}{p}$. (\star).

2 boda

Zbog uvjeta da kružnica k dira zadanu kružnicu $(x - 10\sqrt{3})^2 + (y - 10)^2 = 25$ vrijedi da je $|S_1S| = r + 5$, odnosno $(10\sqrt{3} - p)^2 + (10 - q)^2 = (r + 5)^2$.

2 boda

Kako je $q = r$ i zbog (\star) je $p = \sqrt{3}q$, prethodna jednakost prelazi u jednadžbu s jednom nepoznanicom. Slijedi redom:

$$\begin{aligned} (10\sqrt{3} - \sqrt{3}q)^2 + (10 - q)^2 &= (q + 5)^2 \\ 4(10 - q)^2 &= (q + 5)^2. \end{aligned}$$

1 bod

Tada je $2(10 - q) = q + 5$ ili $2(10 - q) = -q - 5$, odnosno $q_1 = 5$ i $q_2 = 25$.

2 boda

Tada je $p_1 = 5\sqrt{3}$ i $p_2 = 25\sqrt{3}$. Dakle, tražena kružnica može imati središte u točki $S_1(5\sqrt{3}, 5)$ i polumjer $r_1 = 5$ ili u točki $S_2(25\sqrt{3}, 25)$ i polumjer $r_2 = 25$.

2 boda

Zadatak B-4.3.

Brojevi a_1, a_2, a_3, \dots čine aritmetički niz, pri čemu je $a_1 \neq a_2$. Tri člana istoga niza, a_2, a_5 i a_9 , čine geometrijski niz tim redoslijedom. Odredi najmanje moguće pozitivne cijele brojeve k i l za koje i brojevi a_3, a_k, a_l također čine geometrijski niz tim redoslijedom.

Rješenje.

Neka je prvi član aritmetičkoga niza a i neka je d njegova razlika. Tada je opći član toga niza jednak $a_n = a + (n - 1)d$. Za geometrijski niz a_2, a_5, a_9 vrijedi redom

$$\begin{aligned}(a + 4d)^2 &= (a + d)(a + 8d) & 2 \text{ boda} \\ a^2 + 8ad + 16d^2 &= a^2 + 9ad + 8d^2 \\ ad &= 8d^2. & 1 \text{ bod}\end{aligned}$$

Kako je prema uvjetima zadatka $d \neq 0$, slijedi da je $a = 8d$. 1 bod

Tada je opći član zadanoga niza jednak

$$a_n = 8d + (n - 1)d = (7 + n)d. \quad (\star) \quad 1 \text{ bod}$$

Za geometrijski niz a_3, a_k, a_l vrijedi $a_k^2 = a_3 \cdot a_l$, $3 < k < l$, pa primijenimo li (\star) , dobit ćemo 1 bod

$$\begin{aligned}(7 + k)^2 d^2 &= 10d(7 + l)d \\ (7 + k)^2 &= 10(7 + l).\end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Zaključujemo da $7 + k$ mora biti višekratnik od 10. 1 bod

Za $k = 3$ dolazimo do suprotnosti s uvjetom $3 < k < l$.

Za $k = 13$ slijedi $l = 33$, što zadovoljava uvjet zadatka. Stoga su traženi brojevi $k = 13$, $l = 33$. 1 bod

Zadatak B-4.4.

Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}}$$

Odredi $f(1) + f(2) + \dots + f(2025)$.

Rješenje.

Faktorizirajmo izraze pod korijenom u nazivniku zadane funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x + 1)^2} + \sqrt[3]{(x - 1)(x + 1)} + \sqrt[3]{(x - 1)^2}}. \quad 1 \text{ bod}$$

Proširivanjem razlomka s $\frac{\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}}{\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}}$ dobit ćemo u nazivniku razliku kubova:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}}{\left(\sqrt[3]{(x + 1)^2} + \sqrt[3]{(x - 1)(x + 1)} + \sqrt[3]{(x - 1)^2}\right) \left(\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}\right)} = \frac{\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}}{(x + 1) - (x - 1)}. \quad 2 \text{ boda}$$

Konačno, zadana funkcija ima sljedeći oblik:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \right) \quad 1 \text{ bod}$$

Uvrštavanjem redom brojeva 1, 2, ..., 2025 za x slijedi niz jednakosti:

$$\begin{aligned} 2f(1) &= \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{0} \\ 2f(2) &= \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{1} \\ 2f(4) &= \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \\ &\vdots \\ 2f(2023) &= \sqrt[3]{2024} - \sqrt[3]{2022} \\ 2f(2024) &= \sqrt[3]{2025} - \sqrt[3]{2023} \\ 2f(2025) &= \sqrt[3]{2026} - \sqrt[3]{2024} \end{aligned} \quad 3 \text{ boda}$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo

$$2(f(1) + f(2) + \dots + f(2025)) = \sqrt[3]{2026} + \sqrt[3]{2025} - \sqrt[3]{1}.$$

Stoga je traženi zbroj jednak

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2025) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{2026} + \sqrt[3]{2025} - 1). \quad 3 \text{ boda}$$

Zadatak B-4.5.

Riješi jednađbu $x^7 + 1 = (x + 1)^7$ u skupu kompleksnih brojeva.

Rješenje.

Ako desnu stranu zadane jednađbe raspišemo po binomnoj formuli, dobit ćemo

$$x^7 + 1 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Nakon toga ćemo zapisati jednađbu u pogodnijem obliku kako slijedi:

$$\begin{aligned} 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x &= 0 \quad / : 7 \\ x^6 + 3x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x &= 0 \\ x(x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 3x + 1) &= 0. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Zaključujemo da je jedno rješenje jednađbe $x_1 = 0$.

1 bod

Preostala ćemo rješenja dobiti rješavanjem simetrične jednađbe 5. stupnja

$$x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Ona se može napisati u obliku

$$(x^5 + x^4 + 2x^4) + (2x^3 + 3x^3 + 3x^2) + (2x^2 + 3x + 1) = 0,$$

iz čega slijedi da je

$$x^4(x+1) + 2x^3(x+1) + 3x^2(x+1) + (2x+1)(x+1) = 0,$$

odnosno

$$(x+1)(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) = 0. \quad 2 \text{ boda}$$

Tada je $x+1=0$ ili $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$. Iz $x+1=0$ slijedi drugo rješenje $x_2 = -1$. 1 bod

Preostaje još riješiti simetričnu jednadžbu četvrtoga stupnja $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$. Faktorizirajmo izraz s lijeve strane:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 &= (x^4 + x^2 + 1) + (2x^3 + 2x^2 + 2x) \\ &= (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) + 2x(x^2 + x + 1) \\ &= ((x^2 + 1)^2 - x^2) + 2x(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) + 2x(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x) = (x^2 + x + 1)^2. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Zaključujemo da su preostala rješenja jednaka $x_{3,4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_{5,6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 2 boda

Napomena: Učenik može doći do rješenja simetrične jednadžbe petoga stupnja $x_2 = -1$ na bilo koji način, drukčijim raspisom ili pogađanjem. Navođenje tog rješenja donosi **1 bod**, a točna faktorizacija polinoma **2 boda**.

Također, ako se simetrična jednadžba četvrtoga stupnja točno riješi na neki drugi način, postupak se isto boduje s **2 boda** plus **2 boda** za rješenja.