

Rješenja i smjernice za bodovanje

U smjernicama je naveden samo jedan mogući način rješavanja, a treba priznati i bilo koji drugi ispravan postupak. Boduju se i drugi zapisi ako su u skladu s odabranim referentnim sustavom i napisanim jednadžbama u mjernim jedinicama po slobodnom izboru. Ako su preskočene trivijalne linije koje se boduju, a jednadžbe u nastavku su dobre, priznaju se bodovi kao da je sve napisano. Ne boduju se formule u kojima je upisan kriv iznos neke fizičke veličine. Dodjeljuju se samo cjelobrojni bodovi.

1. zadatak (10 bodova)

Do  $t_1 = 120$  s vlak prelazi put  $\Delta x_1 = 3.6$  km = 3600 m gibajući se jednoliko brzinom

[1 bod]  $v_1 = \Delta x_1 / t_1 = 30$  m/s.

Od  $t_1$  do  $t_2 = 150$  s jednoliko usporavajući do  $v_2 = 0$  m/s, vlak prelazi put

[1 bod]  $\Delta x_2 = v_1(t_2 - t_1)/2 = 450$  m.

[1 bod] Od  $t_2$  do  $t_3 = 210$  s vlak miruje pa je  $\Delta x_3 = 0$  m,  $v_3 = v_2 = 0$  m/s.

Od  $t_3$  do  $t_4 = 230$  s vlak jednoliko ubrzavajući prelazi  $\Delta x_4 = 200$  m i postiže brzinu

[1 bod]  $v_4 = (2\Delta x_4)/(t_4 - t_3) = 20$  m/s.

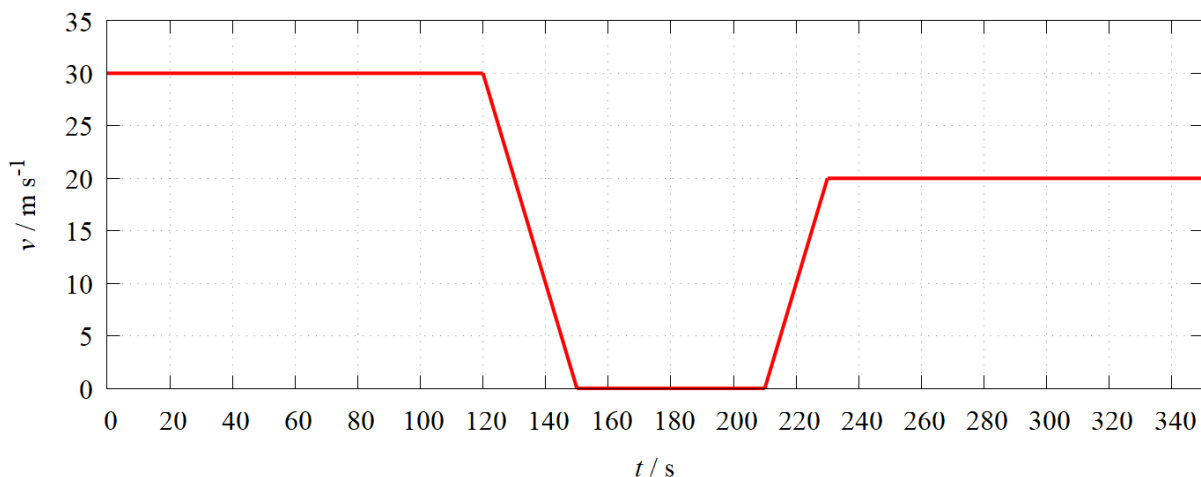
Od  $t_4$  do  $t_5 = 350$  s gibajući se jednoliko brzinom  $v_5 = 20$  m/s, vlak prelazi put

[1 bod]  $\Delta x_5 = v_5(t_5 - t_4) = (20 \text{ m/s}) \cdot (120 \text{ s}) = 2400$  m.

[1 bod] Prosječna brzina vlaka iznosi  $\bar{v} = (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \Delta x_5)/t_5$

[1 bod]  $\bar{v} = (6650 \text{ m})/(350 \text{ s}) = 19$  m/s.

Na sljedećem grafu prikazana je



[1 bod] ovisnost brzine vlaka u vremenu od 0 do 150 s i

[1 bod] ovisnost brzine vlaka u vremenu od 150 do 350 s te

[1 bod] te su istaknute oznake prikazanih veličina u odabranim mjernim jedinicama.

## 2. zadatak (10 bodova)

Ivan i Marija pretrče istu udaljenost  $x = 200$  m za isto vrijeme  $t = 33.0$  s tako da jednoliko ubrzavaju akceleracijama redom  $a_I$  i  $a_M$  tijekom početnih vremenskih intervala  $\Delta t_I$  i  $\Delta t_M$  prelazeći put  $x_{I1}$  i  $x_{M1}$  dok preostalo vrijeme  $t - \Delta t_I$  i  $t - \Delta t_M$  trče jednoliko maksimalnim brzinama redom

[1 bod]  $v_I = a_I \Delta t_I$  (1)

[1 bod]  $v_M = a_M \Delta t_M$  (2)

prelazeći preostali dio puta  $x_{I2}$  i  $x_{M2}$  pa ukupne prijeđene puteve možemo zapisati kao

[1 bod]  $x = x_{I1} + x_{I2}$

[1 bod]  $x = x_{M1} + x_{M2}$

[1 bod]  $x = 0.5 \cdot a_I \cdot \Delta t_I^2 + v_I \cdot (t - \Delta t_I) = 0.5 \cdot a_I \cdot \Delta t_I^2 + a_I \cdot \Delta t_I \cdot (t - \Delta t_I)$

[1 bod]  $x = 0.5 \cdot a_M \cdot \Delta t_M^2 + v_M \cdot (t - \Delta t_M) = 0.5 \cdot a_M \cdot \Delta t_M^2 + a_M \cdot \Delta t_M \cdot (t - \Delta t_M)$

iz čega možemo izračunati akceleracije (boduju se rezultati točni do na barem 2 decimale)

[1 bod]  $a_I = x / [0.5 \cdot \Delta t_I^2 + \Delta t_I \cdot (t - \Delta t_I)] \approx 1.202 \text{ m/s}^2$

[1 bod]  $a_M = x / [0.5 \cdot \Delta t_M^2 + \Delta t_M \cdot (t - \Delta t_M)] \approx 1.476 \text{ m/s}^2$

pa iz (1) i (2) slijede maksimalne brzine (boduju se rezultati točni do na barem 2 decimale)

[1 bod]  $v_I = x / (t - 0.5 \Delta t_I) \approx 6.612 \text{ m/s}$

[1 bod]  $v_M = x / (t - 0.5 \Delta t_M) \approx 6.494 \text{ m/s}.$

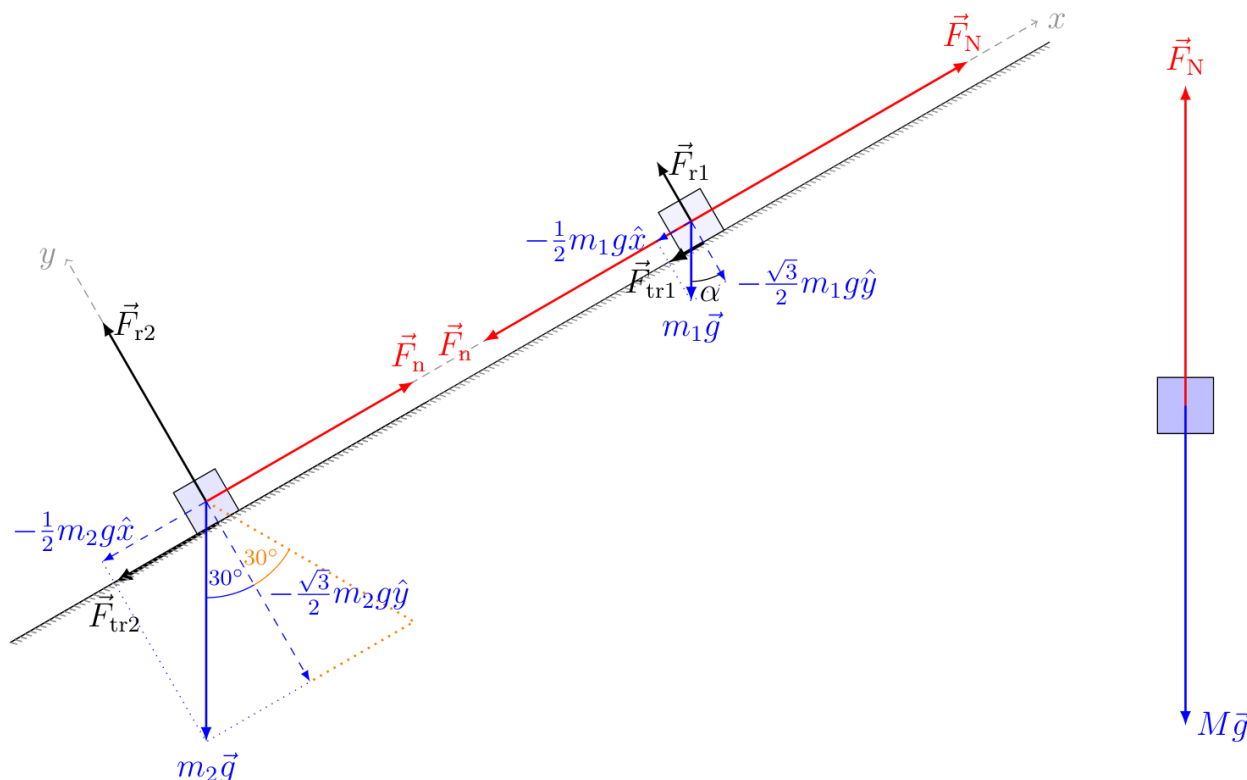
### 3. zadatak (10 bodova)

Promatramo granični slučaj maksimalne mase  $M$  pa analiziramo povlačenje užeta prema  $M$  što znači da su sile trenja orijentirane niz kosinu nagiba  $\alpha = 30^\circ$ . Na sljedećoj slici prikazani su dijagrami sila na blokove (boduju se za pojedino tijelo ako su pravilno orijentirane sile trenja, gravitacijska sila ili njezina komponenta u smjeru užeta, napetost niti; prikazane strelicama čije duljine ne moraju biti sumjerljive iznosima sila). Dakle,

[1 bod] sile na  $m_2$ ,

[1 bod] sile na  $m_1$ ,

[1 bod] sile na  $M$ .



Komponente gravitacijske sile mogu se izraziti iz jednakostraničnog/pravokutnog trokuta: duž kosine kao  $m_{1,2}g/2$  ili  $m_{1,2}g \sin 30^\circ$ , a okomita na kosinu kao  $m_{1,2}g\sqrt{3}/2$  ili  $m_{1,2}g \cos 30^\circ$ . Priznaju se svi bodovi u nizu ako su preskočene očite linije i napisana gotova jednačba, npr. odmah uračunato  $a = 0$  ili sile napetosti i reakcije podloge izražene napamet zbog ravnoteže. Primjenom II. Newtonova zakona na svako tijelo dobivamo sustav jednačbi:

[1 bod]  $Mg - F_N = Ma$ , (1)

[1 bod]  $F_N - F_n - F_{tr1} - m_1g/2 = m_1a$  ili  $F_N - F_n - F_{tr1} - m_1g \sin \alpha = m_1a$ , (2)

[1 bod]  $F_n - F_{tr2} - m_2g/2 = m_2a$  ili  $F_n - F_{tr2} - m_2g \sin \alpha = m_2a$  ili ... (3)

[1 bod] Sustav je u ravnoteži pa su reakcije podloge  $F_{r1,2}$  istog iznosa kao komponente gravitacijske sile okomite na kosinu  $F_{r1,2} = m_{1,2}g\sqrt{3}/2$  ili  $F_{r1,2} = m_{1,2}g \cos \alpha$ .

[1 bod] Tada sile trenja iznose  $F_{tr1,2} = \mu_s F_{r1,2} = \mu_s m_{1,2}g\sqrt{3}/2$  ili  $F_{tr1,2} = \mu_s m_{1,2}g \cos \alpha$ . (4)

[1 bod] Zanima nas ravnotežno stanje ( $a = 0$ ) pa uvrštavanjem (4) u (1), (2), (3) dobivamo:

$$F_N = Mg, \quad (5)$$

$$F_N = F_n + \mu_s m_1 g \sqrt{3}/2 + m_1 g/2, \quad (6)$$

$$F_n = \mu_s m_2 g \sqrt{3}/2 + m_2 g/2. \quad (7)$$

Uvrštavanjem (5) i (7) u (6), uz zadani odnos  $m_2 = 3m_1$ , dobivamo iznos maksimalne mase

$$M = \mu_s m_1 \sqrt{3}/2 + m_1/2 + \mu_s m_2 \sqrt{3}/2 + m_2/2 = 4m_1(\mu_s \sqrt{3}/2 + 1/2)$$

[1 bod]  $M = 4 \cdot 1 \text{ kg} \cdot (1/\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2 + 1/2) = 4 \text{ kg}.$

#### 4. zadatak (10 bodova)

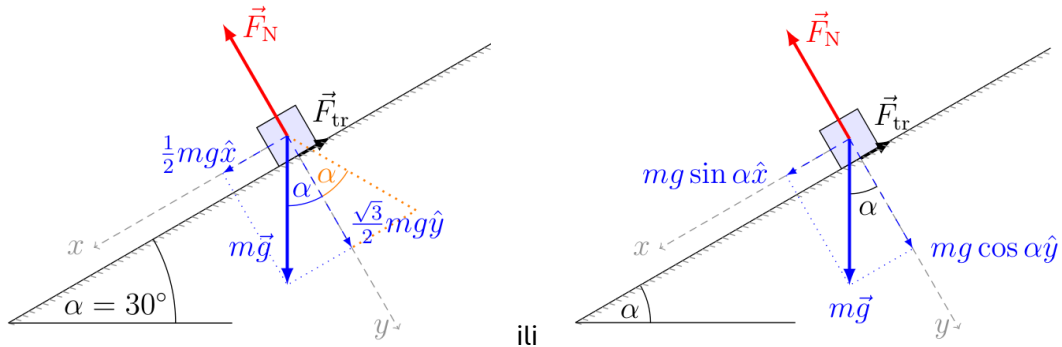
Modeliramo skijaša kao tijelo mase  $m$  koje kreće iz mirovanja  $v_0 = 0$  m/s iz početnog položaja  $x_0 = 0$  m te na koje djeluju sile prikazane na sljedećoj slici (boduju se pravilne orijentacije sile reprezentirane strelicama, dok duljine strelica ne moraju biti sumjerljive iznosima sila):

[1 bod] sila trenja  $\vec{F}_{\text{tr}}$  (uz kosinu),

[1 bod] reakcija podloge  $\vec{F}_N$  (okomito na kosinu),

[1 bod] gravitacijska sila  $m\vec{g}$  (prema tlu)

koju rastavljamo na komponentu okomitu i paralelnu kosini (niz kosinu).



Tijekom prve sekunde,  $\Delta t_1 = 1$  s, tijelo jednoliko ubrzavajući postiže brzinu

[1 bod]  $v_1 = v_0 + a\Delta t_1 = a\Delta t_1$  (1)

koja je početna za gibanje od 1. do 3. sekunde tijekom  $\Delta t_{3,1} = 3 \text{ s} - 1 \text{ s} = 2 \text{ s}$  (napomena: ako se drugačije interpretira  $\Delta t_{3,1}$ , tj. početak/kraj 1. ili 3. sekunde, a postupak rješavanja je ispravan, treba priznati bodove u nastavku) kada tijelo prelazi udaljenost  $x_3 - x_1 = 19.55$  m,

[1 bod]  $x_3 - x_1 = v_1 \cdot \Delta t_{3,1} + 0.5 \cdot a \cdot (\Delta t_{3,1})^2 = a \cdot \Delta t_1 \cdot \Delta t_{3,1} + 0.5 \cdot a \cdot (\Delta t_{3,1})^2$   
iz čega slijedi ubrzanje

[1 bod]  $a = (x_3 - x_1) / [\Delta t_1 \cdot \Delta t_{3,1} + 0.5 \cdot (\Delta t_{3,1})^2] \approx 4.888 \text{ m/s}^2$ .

Tijelo gibajući se jednoliko ubrzano tijekom prvih  $t_6 = 6$  s prijeđe

[1 bod]  $x_6 = x_0 + v_0 \cdot t_6 + 0.5 \cdot a \cdot t_6^2 = 0.5 \cdot a \cdot t_6^2 \approx 87.98 \text{ m}$ .

Tijelo ostaje na kosini pa su istog iznosa sila reakcije podloge i komponenta gravitacijske sile okomita na kosinu, koju možemo izraziti preko visine jednakokraničnoga trokuta prikazanoga na gornjoj lijevoj slici  $F_N = mg\sqrt{3}/2$  ili koristeći se definicijom trigonometrijske funkcije  $\cos \alpha$  na pravokutnome trokutu na desnoj slici (priležeća kateta / hipotenuza  $mg$ )  $F_N = mg \cos \alpha$ . Slično, komponentu gravitacijske sile niz kosinu možemo izraziti kao polovicu stranice izdvojenoga jednakokraničnoga trokuta  $mg/2$ , odnosno kao  $mg \sin \alpha$ . Tada sila trenja iznosi

[1 bod]  $F_{\text{tr}} = \mu F_N = \mu mg\sqrt{3}/2$ .

Ukupna sila jednaka zbroju sila u smjeru gibanja, odnosno prema II. Newtonovu zakonu imamo

[1 bod]  $ma = mg/2 - \mu mg\sqrt{3}/2$

iz čega možemo izračunati koeficijent trenja

[1 bod]  $\mu = (g/2 - a) / (g\sqrt{3}/2) \approx 0.002$ .

### 5. zadatak (10 bodova)

[1 bod] U prvom slučaju kuglicu ispuštamo s visine  $h_1 = 4905 \text{ mm} = 4.905 \text{ m}$  dok u drugom slučaju kuglicu želimo ispustiti s visine  $h_2$  tako da udari o tlo pet puta većom brzinom  $v_2$  nego u prvom slučaju,

[1 bod]  $v_2 = 5v_1$ . (1)

Kuglica slobodno pada pa kvadrati brzina pri udaru o tlo iznose

[1 bod]  $v_1^2 = 2gh_1$  i

[1 bod]  $v_2^2 = 2gh_2$

[1 bod] što uvrštavanjem u kvadriranu jednadžbu (1) daje

[1 bod]  $2gh_2 = 25(2gh_1)$

iz koje nakon dijeljenja s  $(2g)$  slijedi da kuglicu treba ispustiti s visine

[1 bod]  $h_2 = 25 h_1 = 122.625 \text{ m}$ .

Vremena slobodnog pada iznose:

[1 bod]  $t_1 = \sqrt{2h_1/g} = 1 \text{ s}$ ,

[1 bod]  $t_2 = \sqrt{2h_2/g} = 5 \text{ s}$ .

te se odnose kao  $t_2/t_1 = \sqrt{h_2/h_1}$ , tj.

[1 bod]  $t_2 = 5t_1$  (boduje se samo egzaktn rezultat).