

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2023/2024

Srednje škole 4. grupa

## Rješenja i upute za bodovanje

**VAŽNO:** Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drukčijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

### 1. zadatak (16 bodova)

a.) U najgorem slučaju kada je frekvencija koju promatramo 10 THz, a temperatura zvijezde 10 000 K vrijedi  $hf/k_B T = 0.04799$ , pa možemo uz malu pogrešku koristiti:

$$P(f) = \frac{8R^2\pi^2 h}{c^2} \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{k_B T}\right) - 1} \approx \frac{8R^2\pi^2 k_B T}{c^2} f^2. \quad [2 \text{ boda}] \quad (1)$$

Ukupna snaga zračenja na intervalu od  $f_1$  do  $f_2$  je tada:

$$P([f_1, f_2]) = \frac{8R^2\pi^2 k_B T}{3c^2} (f_2^3 - f_1^3). \quad [2 \text{ boda}] \quad (2)$$

Ukupna snaga zračenja na svim frekvencijama:

$$P_{uk} = S\sigma T^4 = 4R^2\pi\sigma T^4. \quad [1 \text{ bod}] \quad (3)$$

Iz uvjeta zadatka slijedi  $P([f_1, f_2]) = \eta P_{uk}$ ,  $\eta = 2 \times 10^{-7}$ . Sređivanjem dobivamo:

$$T = \sqrt[3]{\frac{2\pi k_B}{3\eta\sigma c^2} (f_2^3 - f_1^3)} = 30\,417.50 \text{ K} \quad [2 \text{ boda}] \quad (4)$$

b.) Prvo trebamo pronaći koje dvije vodikove linije se nalaze u danom intervalu. Znamo da je energija emitiranih fotona prijelazom iz  $m$ -te u  $n$ -tu razinu dana sa:

$$E^{nm} = E_0 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad E_0 = 13.60569312 \text{ eV}. \quad [1 \text{ bod}] \quad (5)$$

U ovom slučaju pogodnije nam je izračunati frekvencije u [THz]. Dakle, trebamo prvo energiju izraziti u [J], a zatim podijeliti sa  $h$  (jer vrijedi  $E = hf$ ). Slijedi:

$$f^{nm} = 3289.84195 \text{ THz} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad [1 \text{ bod}] \quad (6)$$

Spektar možemo podijeliti u serije  $n = 1, n = 2, n = 3$ , itd. Broj  $m$  mora zadovoljavati  $m > n$ . Nije teško uočiti da je najmanja frekvencija u određenoj seriji  $n = k$  ona za koju je  $m = k + 1$ .

Ako izračunamo najmanje frekvencije u prve dvije serije, tj. ako gledamo  $(n, m) = (1, 2), (2, 3)$  dobit ćemo vrijednost veću od gornje granice traženog intervala. Dakle, možemo zaključiti da se svi prijelazi u prve dvije serije javljaju izvan granica zadanog intervala. Uzimanjem  $n = 3$  i  $m = 4$  dobivamo manju vrijednost od donje granice intervala:

$$f^{34} = 3289.84195 \text{ THz} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \right) = 159.92287 \text{ THz} \quad (7)$$

Dakle, postoji mogućnost da tražene linije pripadaju  $n = 3$  seriji.

Računanjem za  $(n, m) = (3, 5)$  i  $(n, m) = (3, 6)$  dobivamo:

$$f^{35} = 3289.84195 \text{ THz} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right) = 233.94432 \text{ THz}, \quad (8)$$

$$f^{36} = 3289.84195 \text{ THz} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{36} \right) = 274.15350 \text{ THz}. \quad [4 \text{ boda}] \quad (9)$$

Ostale linije u  $n = 3$  seriji javljaju se na frekvencijama višim od gornje granice intervala, a za serije  $n > 3$  frekvencije su niže od donje granice intervala, tj. imamo točno dvije linije u zadanom intervalu. Razlika dobivenih frekvencija iznosi  $\Delta f = 40.20918 \text{ THz}$ . Opažanje pomaka u razlici se može pripisati Dopplerovom efektu. Slijedi:

$$\Delta f_{exp} = \Delta f \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}. \quad [1 \text{ bod}] \quad (10)$$

Preuređivanjem dobivamo:

$$v = \frac{\Delta f_{exp}^2 - \Delta f^2}{\Delta f_{exp}^2 + \Delta f^2} c \approx 106 \text{ km s}^{-1} \quad [2 \text{ boda}] \quad (11)$$

Ovo su tipične relativne brzine u odnosu na zvijezde na krajevima galaksije.

## 2. zadatak (17 bodova)

Svako od dva zrcala efektivno stvara novi virtualni izvor zračenja čija pozicija se dobije refleksijom realnog izvora preko ravnina zrcala kao što je prikazano na donjoj skici. [2 boda].

Ta dva virtualna izvora stvaraju interferencijsku sliku na zastoru. Dakle, trebamo odrediti udaljenost  $d$ , i horizontalnu udaljenost virtualnih izvora do zastora kako bi mogli odrediti razmake susjednih maksimuma. Vrijedi:

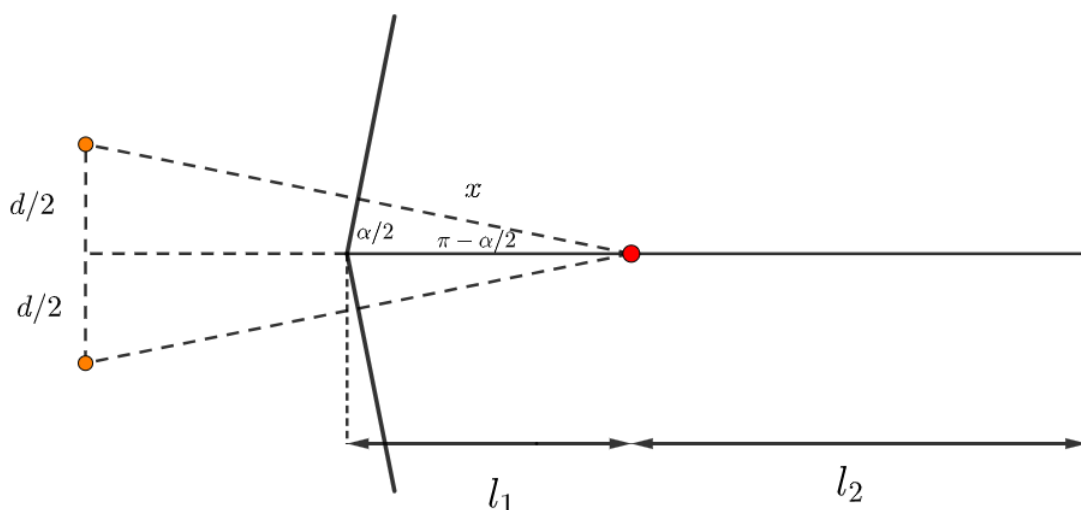
$$x = l_1 \sin(\alpha/2), \quad l'_1 = 2x \cos(\pi - \alpha/2) \Rightarrow l'_1 = 2l_1 \sin^2(\alpha/2), \quad (12)$$

gdje je  $l'_1$  horizontalna udaljenost virtualnih od realnog izvora. Dakle, udaljenost virtualnih izvora do zastora je:

$$L = l'_1 + l_2 = 2l_1 \sin^2(\alpha/2) + l_2 \approx 3.3 \text{ m}. \quad [2 \text{ boda}] \quad (13)$$

Za udaljenost virtualnih izvora vrijedi:

$$d/2 = 2x \sin(\pi - \alpha/2) \Rightarrow d = 2l_1 \sin \alpha = 2.618 \times 10^{-3} \text{ m}. \quad [2 \text{ boda}] \quad (14)$$



Očito je udaljenost virtualnih izvora puno manja od udaljenosti virtualnih izvora do zastora, pa možemo koristiti standardni uvjet za konstruktivnu interferenciju dviju pukotina:

$$d \sin \theta_n = n\lambda, \quad \sin \theta \approx s_n/L, \quad [1 \text{ bod}] \quad (15)$$

gdje je  $s_n$  pozicija  $n$ -tog maksimuma na zastoru. Slijedi da je udaljenost uzastopnih maksimuma jednaka:

$$\Delta s = s_{n+1} - s_n = \lambda L/d = 7.966 \times 10^{-4} \text{ m} \approx 0.8 \text{ mm} \quad [2 \text{ boda}] \quad (16)$$

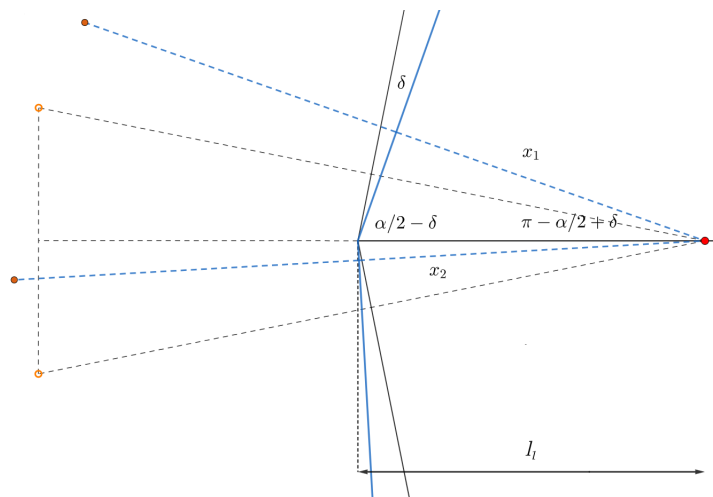
b.) Ako zrcala zarotiramo mijenjamo pozicije virtualnih izvora (kao što je prikazano na donjoj skici). Označimo li horizontalne udaljenosti virtualnih izvora do realnog izvora sa  $a_1$  i  $a_2$ , a vertikalne pomake sa  $y_1$  i  $y_2$  dobivamo:

$$a_1 = 2l_1 \sin^2(\alpha/2 - \delta) = 0.2999814949 \text{ m} \quad [1 \text{ bod}] \quad (17)$$

$$a_2 = 2l_1 \sin^2(\alpha/2 + \delta) = 0.2999997715 \text{ m} \quad [1 \text{ bod}] \quad (18)$$

$$y_1 = l_1 \sin(\alpha - 2\delta) = 2.356097597 \times 10^{-3} \text{ m} \quad [1 \text{ bod}] \quad (19)$$

$$y_2 = l_1 \sin(\alpha + 2\delta) = 2.617992549 \times 10^{-4} \text{ m} \quad [1 \text{ bod}] \quad (20)$$



Pozicija središnjeg maksimuma na zastoru je ona koja je jednako udaljena od virtualnih izvora [2 boda]. Očito će onda pomak na zastoru biti prema dolje, i ako ga označimo sa  $\Delta$  vrijedi:

$$(y_1 + \Delta)^2 + (a_1 + l_2)^2 = (y_2 - \Delta)^2 + (a_2 + l_2)^2, \quad (21)$$

iz čega slijedi:

$$\Delta = \frac{(a_2 + l_2)^2 - (a_1 + l_2)^2 + y_2^2 - y_1^2}{2(y_1 + y_2)} = 2.2 \text{ cm} \quad [2 \text{ boda}] \quad (22)$$

### 3. zadatak (18 bodova)

a.) Možemo primjetiti da je kinetička energija protona puno manja od njegove energije mirovanja ( $6 \text{ keV} \ll 938 \text{ MeV}$ ), pa količinu gibanja protona možemo odrediti nerelativistički:

$$p_p = \sqrt{2m_p E_{kp}} = 3.35548 \times 10^6 \text{ eV}/c. \quad [2 \text{ boda}] \quad (23)$$

b.) Korisno je odrediti ukupnu energiju koju bi neutrino mogao imati kada ostala dva produkta miruju:

$$E_{max} = E_{kp} + c^2(2m_p - m_d - m_e) = 426\,234.05 \text{ eV} \quad (24)$$

Tada bi njegova količina gibanja bila jednaka  $p_\nu = 4.2623 \times 10^5 \text{ eV}/c$ , tj. manja od količine gibanja protona, pa navedeni proces nije moguć. Dakle, neki dio energije treba otići i na jedan od ostala dva produkta, te je očito da se taj produkt mora gibati u istom smjeru kao i neutrino kako bi zakon količine gibanja mogao biti ispunjen. [2 boda] Označimo s  $m_1$  masu produkta koji se giba, a s  $m_2$  masu produkta koji miruje (te slično i ostale fizikalne veličine). Tada iz zakona očuvanja energije i količine gibanja vrijedi:

$$p_p = p_1 + p_\nu \Rightarrow p_1 = p_p - p_\nu, \quad [1 \text{ bod}] \quad (25)$$

$$\frac{p_p^2}{2m_p} + 2m_p c^2 = (m_1 + m_2)c^2 + \frac{p_1^2}{2m_1} + p_\nu c. \quad [2 \text{ boda}] \quad (26)$$

Uvrštavanjem (25) u (26) dolazimo do:

$$\left(\frac{1}{2m_1}\right)p_\nu^2 + \left(c - \frac{p_p}{m_1}\right)p_\nu + \left[\frac{p_p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_p}\right) + (m_1 + m_2 - 2m_p)c^2\right] = 0. \quad (27)$$

Vrijedi  $E_\nu = p_\nu c$ , pa slijedi:

$$\left(\frac{1}{2m_1c^2}\right)E_\nu^2 + \left(1 - \frac{p_p}{m_1c}\right)E_\nu + \left[\frac{p_p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_p}\right) + (m_1 + m_2 - 2m_p)c^2\right] = 0. \quad [\mathbf{3 \text{ boda}}] \quad (28)$$

Isprobavanjem  $m_1 = m_e$  i  $m_2 = m_d$  može se vidjeti da nema rješenja, tj. deuterij se mora gibati, a pozitron mirovati.

Uvrštavanjem  $m_1 = m_d$  i  $m_2 = m_e$  i rješavanjem jednadžbe dobivamo:

$$E_\nu = 423.943 \text{ keV}. \quad [\mathbf{2 \text{ boda}}] \quad (29)$$

c.) Kinetička energija deuterija je razlika ukupne dostupne energije  $E_{max}$  i energije neutrina  $E_\nu$ . Dakle, slijedi:

$$E_{kd} = E_{max} - E_\nu = 2.291 \text{ keV}. \quad [\mathbf{1 \text{ bod}}] \quad (30)$$

Uspoređujući vrijednost s energijom mirovanja deuterija ( $\approx 1876 \text{ MeV}$ ) vidimo da je bilo opravdano koristiti nerelativističke izraze.  $[\mathbf{1 \text{ bod}}]$ . Brzina iznosi:

$$v = \sqrt{\frac{2E_{kd}}{m_d}} = 1.563 \times 10^{-3}c = 4.686 \times 10^5 \text{ m s}^{-1} \quad [\mathbf{2 \text{ boda}}] \quad (31)$$

d.) Kada je brzina elektrona veća od  $c/n$  kinetička energija mora biti veća od kritične vrijednosti koja je dana sa:

$$E_k = m_e c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} - 1 \right) = 264.063 \text{ keV}. \quad [\mathbf{2 \text{ boda}}] \quad (32)$$

Dakle, energija neutrina mora biti veća od  $264.063 \text{ keV}$ .

#### 4. zadatak (19 bodova)

a.) Razlika optičkih puteva dviju zraka je jednostavno  $\Delta x = d(n_1 - n_2)$ , pa je razlika u fazi  $\delta$ :

$$\delta = \frac{2\pi d(n_1 - n_2)}{\lambda} \quad [2 \text{ boda}] \quad (33)$$

b.) Kada svjetlost upada na dvolomac zračenje možemo opisati električnim poljem kao:

$$\vec{E} = E_0 \sin(\omega t) \hat{n}, \quad I_0 = E_0^2 \quad (34)$$

gdje je  $\hat{n}$  jedinični vektor u smjeru koji zatvara kut  $\alpha$  sa optičkom osi dvolomca. Električno polje možemo rastaviti na komponentu okomitu na optičku os dvolomca te komponentu paralelnu s optičkom osi dvolomca. Nakon prolaska kroz dvolomac između te dvije zrake se javlja razlika u fazi  $\delta$ , pa slijedi da je nakon prolaska kroz dvolomac električno polje dano sa (do na proizvoljni fazni faktor koji je nebitan za krajnji intenzitet):

$$\vec{E} = E_0 [\cos \alpha \sin(\omega t + \delta) \hat{y} + \sin \alpha \sin(\omega t) \hat{x}]. \quad [3 \text{ boda}] \quad (35)$$

Zatim upadom na polarizator preživljavaju samo komponente paralelne s osi polarizacije polarizatora. Slijedi:

$$\vec{E} = E_0 [\cos \alpha \cos \beta \sin(\omega t + \delta) + \sin \alpha \sin \beta \sin(\omega t)] \hat{n}', \quad (36)$$

gdje je  $\hat{n}'$  jedinični vektor u smjeru koji zatvara kut  $\beta$  sa optičkom osi dvolomca [2 boda].

Raspisivanjem dobivamo:

$$\vec{E} = E_0 [(\cos \alpha \cos \beta \cos \delta + \sin \alpha \sin \beta) \sin(\omega t) + \cos \alpha \cos \beta \sin \delta \cos(\omega t)] \hat{n}' \quad [1 \text{ bod}] \quad (37)$$

Kako bi odredili intenzitet treba odrediti amplitudu električnog polja. Vidimo da imamo sumu  $\cos(\omega t)$  i  $\sin(\omega t)$  različitih amplituda. Vrijedi:

$$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega t) \right) \quad (38)$$

Ako definiramo npr.  $\sin \phi = A/\sqrt{A^2 + B^2}$ , onda je  $B/\sqrt{A^2 + B^2} = \cos \phi$ , pa slijedi:

$$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \phi). \quad [3 \text{ boda}] \quad (39)$$

Napokon slijedi:

$$I = E_0^2 [(\cos \alpha \cos \beta \cos \delta + \sin \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta \sin \delta)^2]. \quad (40)$$

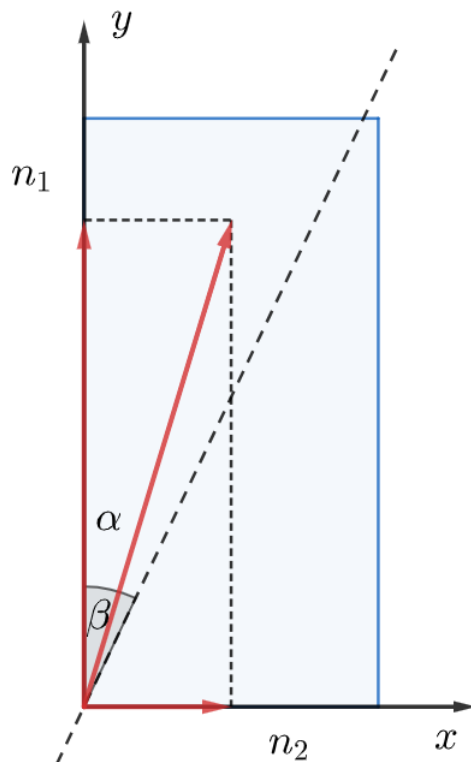
Sređivanjem izraza dobivamo:

$$I = I_0 (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cos \delta). \quad [2 \text{ boda}] \quad (41)$$

c.) Cilj nam je odabrati takve  $\alpha$  i  $\delta$  da je intenzitet neovisan o  $\beta$ . Očito je to nemoguće kad je svjetlost linearno polarizirana nakon prolaska kroz dvolomac. Također, intenzitet ne bi ovisio o  $\beta$  kada bi zračenje nakon prolaska kroz dvolomac bilo nepolarizirano, no i to je očito nemoguće.

Jedino moguće rješenje je ono kada je svjetlost kružno polarizirana nakon prolaska kroz dvolomac. To možemo postići kada je  $\delta = (2k + 1)\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  i  $\alpha = \pi/4$ . [3 boda] Tada je intenzitet jednostavno:

$$I = I_0/2 = 25 \text{ W m}^{-2}. \quad [1 \text{ bod}] \quad (42)$$



Debljina dvolomca preuređivanjem (32) iznosi:

$$d = \frac{\lambda \delta}{2\pi(n_1 - n_2)}. \quad (43)$$

Kako je  $n_1 < n_2$  minimalna debljina se dobije za  $\delta = -\pi/2$  i iznosi:

$$d = \frac{\lambda}{4(n_2 - n_1)} = 0.208 \text{ mm.} \quad [\mathbf{2 \text{ boda}}] \quad (44)$$