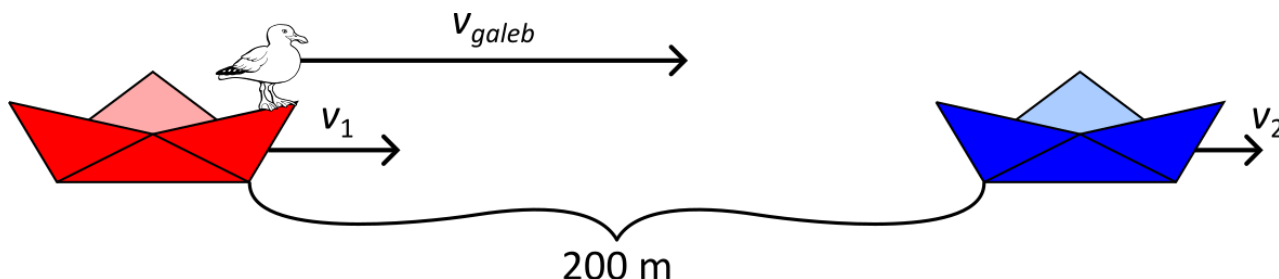


1. zadatak (20 bodova)

a) Na skici se treba jasno vidjeti da se sporiji trajekt (plavi) nalazi 200 m ispred bržeg trajekta (crveni) i da je smjer gibanja od bržeg prema sporijem. Vektore brzina treba nacrtati u zadanom omjeru (barem približno). **(1 bod)**



b) Postavimo ishodište koordinatnog sustava u početni položaj bržeg trajekta. Označimo početnu udaljenost dva trajekta s $x_0 = 200$ m. Zadani su odnosi brzina:

$$v_2 \equiv v,$$

$$v_1 = 2v_2 = 2v,$$

$$v_{galeb} = 6v_2 = 6v.$$

Jednadžbe gibanja za brži i sporiji trajekt su:

$$x_1(t) = v_1 t = 2vt, \text{ (1 bod)}$$

$$x_2(t) = x_0 + v_2 t = x_0 + vt. \text{ (1 bod)}$$

Na kraju gibanja njihova međusobna udaljenost jednaka je nuli. Možemo izračunati ukupno vrijeme gibanja t' :

$$x_1(t') = x_2(t'),$$

$$2vt' = x_0 + vt',$$

$$t' = \frac{x_0}{v} = \frac{200 \text{ m}}{v}. \text{ (2 boda)}$$

Galeb se također giba u vremenu t' brzinom stalnog iznosa. To znači da će u tom vremenu prijeći ukupan put:

$$s_{galeb} = v_{galeb} t' = 6v \cdot \frac{x_0}{v} = 6x_0 = 1200 \text{ m}. \text{ (2 boda)}$$

c) Ovisnost položaja oba trajekta u vremenu prikazana je na slici. (1 bod za svaki graf, skale i oznake na osima moraju biti točne, ukupno: **2 boda**)

d) Galeb počinje svoje gibanje s bržeg trajekta prema sporijem.

1. promjena smjera gibanja galeba. Galeb prvi put mijenja smjer gibanja u trenutku kada doleti do sporijeg trajekta.

Odredimo taj trenutak:

$$x_{galeb}(t) = v_{galeb} t = 6vt,$$

$$x_{galeb}(t_1) = x_2(t_1),$$

$$6vt_1 = x_0 + vt_1,$$

$$t_1 = \frac{1}{5} \frac{x_0}{v} = \frac{1}{5} t' = \frac{40 \text{ m}}{v}. \text{ (1 bod)}$$

Galeb se u trenutku t_1 nalazi na položaju:

$$x_1 = 6vt_1 = 6v \cdot \frac{1}{5} \frac{x_0}{v} = \frac{6}{5} x_0 = 1.2x_0 = 240 \text{ m}. \text{ (1 bod)}$$

i prešao je put $s_1 = x_1 = 240$ m.

2. promjena smjera gibanja galeba. Galeb leti od sporijeg do bržeg trajekta i zatim opet mijenja smjer. Jednadžba gibanja galeba za ovaj period ($t_1 \leq t \leq t_2$) je:

$$x_{galeb}(t) = x_1 - 6v(t - t_1).$$

U trenutku druge promjene smjera t_2 galeb se nalazi na istom položaju kao brži trajekt:

$$x_{galeb}(t_2) = x_1(t_2),$$

$$x_1 - 6v(t_2 - t_1) = 2vt_2,$$

$$8vt_2 = x_1 + 6vt_1,$$

$$t_2 = \frac{1}{8} \frac{x_1}{v} + \frac{3}{4} t_1 = \frac{3}{20} \frac{x_0}{v} + \frac{3}{20} \frac{x_0}{v} = \frac{3}{10} \frac{x_0}{v} = \frac{3}{10} t' = \frac{60 \text{ m}}{v}. \text{ (1 bod)}$$

Galeb se u trenutku t_2 nalazi na položaju:

$$x_2 = x_1 - 6v(t_2 - t_1) = x_1 - 6v \left(\frac{3}{10} \frac{x_0}{v} - \frac{1}{5} \frac{x_0}{v} \right) = \frac{6}{5} x_0 - \frac{3}{5} x_0 = \frac{3}{5} x_0 = 0.6x_0 = 120 \text{ m. (1 bod)}$$

i prešao je put $s_2 = |x_2 - x_1| = 120 \text{ m}$.

3. promjena smjera gibanja galeba. Galeb leti od bržeg prema sporijem trajektu. Jednadžba gibanja galeba za ovaj period ($t_2 \leq t \leq t_3$) je:

$$x_{galeb}(t) = x_2 + 6v(t - t_2).$$

U trenutku treće promjene smjera t_3 galeb se nalazi na istom položaju kao sporiji trajekt:

$$x_{galeb}(t_3) = x_2(t_3),$$

$$x_2 + 6v(t_3 - t_2) = x_0 + vt_3,$$

$$5vt_3 = x_0 - x_2 + 6vt_2,$$

$$t_3 = \frac{1}{5} \frac{x_0}{v} - \frac{1}{5} \frac{x_2}{v} + \frac{6}{5} t_2 = \frac{1}{5} \frac{x_0}{v} - \frac{3}{25} \frac{x_0}{v} + \frac{9}{25} \frac{x_0}{v} = \frac{11}{25} \frac{x_0}{v} = \frac{11}{25} t' = \frac{88 \text{ m}}{v}. \text{ (1 bod)}$$

Galeb se u trenutku t_3 nalazi na položaju:

$$x_3 = x_2 + 6v(t_3 - t_2) = x_2 + 6v \left(\frac{11}{25} \frac{x_0}{v} - \frac{3}{10} \frac{x_0}{v} \right) = \frac{3}{5} x_0 + \frac{21}{25} x_0 = \frac{36}{25} x_0 = 1.44x_0 = 288 \text{ m. (1 bod)}$$

i prešao je put $s_3 = |x_3 - x_2| = 168 \text{ m}$.

4. promjena smjera gibanja galeba. Galeb se giba od sporijeg prema bržem trajektu. Jednadžba gibanja galeba za ovaj period ($t_3 \leq t \leq t_4$) je:

$$x_{galeb}(t) = x_3 - 6v(t - t_3).$$

U trenutku četvrte promjene smjera t_4 galeb se nalazi na istom položaju kao brži trajekt:

$$x_{galeb}(t_4) = x_1(t_4),$$

$$x_3 - 6v(t_4 - t_3) = 2vt_4,$$

$$8vt_4 = x_3 + 6vt_3,$$

$$t_4 = \frac{1}{8} \frac{x_3}{v} + \frac{3}{4} t_3 = \frac{9}{50} \frac{x_0}{v} + \frac{33}{100} \frac{x_0}{v} = \frac{51}{100} \frac{x_0}{v} = \frac{51}{100} t' = \frac{102 \text{ m}}{v}. \text{ (1 bod)}$$

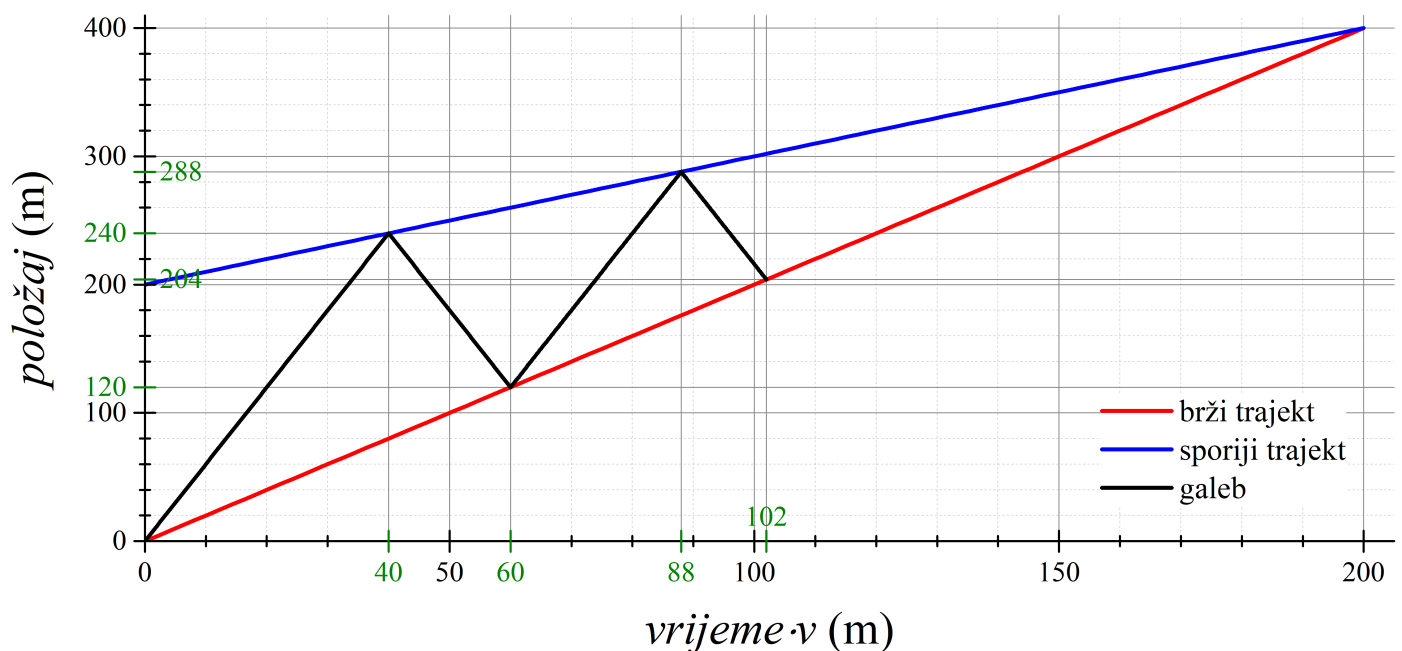
Galeb se u trenutku t_4 nalazi na položaju:

$$x_4 = x_3 - 6v(t_4 - t_3) = x_3 - 6v \left(\frac{51}{100} \frac{x_0}{v} - \frac{11}{25} \frac{x_0}{v} \right) = \frac{36}{25} x_0 - \frac{21}{50} x_0 = \frac{51}{50} x_0 = 1.02x_0 = 204 \text{ m. (1 bod)}$$

i prešao je put $s_4 = |x_4 - x_3| = 84 \text{ m}$.

Ukupan prijeđeni put galeba do trenutka četvrte promjene smjera je: $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 612 \text{ m. (1 bod)}$

Ovisnost položaja galeba o vremenu prikazana je na grafu. **(2 boda)**



2. zadatak (17 bodova)

Sve sile koje djeluju na oba tijela prikazane su na slici.

Zadatak se može riješiti na dva načina: primjenjujući zakon očuvanja energije ili primjenjujući 2. Newtonov zakon.

1. način: zakon očuvanja energije

Promatramo prvi dio gibanja od početnog trenutka do trenutka pucanja užeta koje spaja dva tijela. U tom periodu oba tijela prijeđu put $d = 2$ m uz kosinu. Rad sile F jednaka je promjeni energije sustava:

$$W = m_1 g \Delta h + m_2 g \Delta h + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + W_{TR1} + W_{TR2}, \quad (2 \text{ boda})$$

gdje je Δh promjena visine tijela 1 i 2, v je brzina tijela 1 i 2 na kraju promatranog perioda, W_{TR1} i W_{TR2} je rad sile trenja na tijela 1 i 2.

Promjenu visine izrazimo pomoću puta prijeđenog po kosini d :

$$\frac{\Delta h}{d} = \frac{h}{l} = \frac{3}{5} \Rightarrow \Delta h = 0.6d. \quad (1 \text{ bod})$$

Brzina v jednaka je:

$$v = \sqrt{2ad}, \quad (1 \text{ bod})$$

gdje je a ubrzanje sustava.

Sile trenja na tijelo 1 i 2 jednake su:

$$F_{TR1,2} = \mu N_{1,2}, \quad (1 \text{ bod})$$

$$F_{TR1,2} = \mu F_{gy1,2}, \quad (1 \text{ bod})$$

$$F_{TR1,2} = \mu \frac{k}{l} m_{1,2} g = 0.8 \mu m_{1,2} g. \quad (1 \text{ bod})$$

Iznos sile F izračunamo iz zadanog rada i prijeđenog puta:

$$W = Fd \Rightarrow F = \frac{W}{d} = 49 \text{ N}. \quad (2 \text{ boda})$$

Uvrštavanjem u početnu jednačbu dobije se:

$$Fd = 0.6(m_1 + m_2)gd + (m_1 + m_2)ad + 0.8\mu(m_1 + m_2)gd,$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - 0.6g - 0.8\mu g.$$

$$a = \frac{49 \text{ N}}{5 \text{ kg}} - (0.6 + 0.8 \cdot 0.23) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1.96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (2 \text{ boda})$$

Nakon pucanja užeta tijelo 2 giba se početnom brzinom v prema gore dok se ne zaustavi. Tijelo se giba jednoliko usporeno i prelazi put prema vrhu kosine d_2 . Zakon očuvanja energije za ovaj period gibanja je:

$$\frac{1}{2} m_2 v^2 = m_2 g \Delta h_2 + W_{TR2}, \quad (1 \text{ bod})$$

$$\frac{1}{2} m_2 2ad = m_2 g 0.6d_2 + 0.8\mu m_2 g d_2, \quad (1 \text{ bod})$$

$$d_2 = \frac{ad}{(0.6 + \mu 0.8)g} = 0.5 \text{ m}. \quad (1 \text{ bod})$$

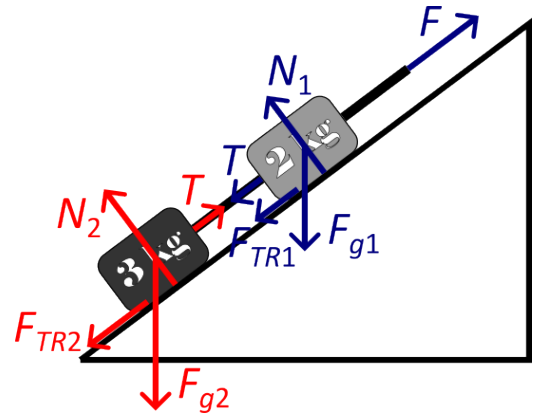
U sljedećem periodu gibanja tijelo se giba jednoliko ubrzano niz kosinu. Dok ne stigne u početni položaj prelazi put $d + d_2 = 2.5$ m. Možemo napisati zakon očuvanja energije:

$$m_2 g(\Delta h + \Delta h_2) = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + W_{TR2}, \quad (1 \text{ bod})$$

$$m_2 g 0.6(d + d_2) = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + 0.8\mu m_2 g(d + d_2). \quad (1 \text{ bod})$$

Slijedi da je brzina tijela 2 u trenutku povratka u početnu točku jednaka:

$$v_2 = \sqrt{2(0.6 - 0.8\mu)(d + d_2)g} = 4.56 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1 \text{ bod})$$



2. način: Newtonovi zakoni gibanja

Promatramo prvi dio gibanja od početnog trenutka do trenutka pucanja užeta koje spaja dva tijela. Drugi Newtonov zakon za oba tijela po komponentama paralelno (x smjer) i okomito (y smjer) na kosinu glasi:

$$m_1 a = F - T - F_{g1x} - F_{TR1}, \text{ (1 bod)}$$

$$0 = N - F_{gy},$$

$$m_2 a = T - F_{g2x} - F_{TR2}, \text{ (1 bod)}$$

$$0 = N - F_{g2y}.$$

Komponente sila odredimo pomoću sličnosti trokuta:

$$\frac{F_{gx1,2}}{F_{g1,2}} = \frac{h}{l} = \frac{3}{5} = 0.6, \text{ (1 bod)}$$

$$\frac{F_{gy1,2}}{F_{g1,2}} = \frac{k}{l} = \frac{4}{5} = 0.8. \text{ (1 bod)}$$

Sile trenja na tijelo 1 i 2 jednake su:

$$F_{TR1,2} = \mu N_{1,2}, \text{ (1 bod)}$$

$$F_{TR1,2} = \mu F_{gy1,2}, \text{ (1 bod)}$$

$$F_{TR1,2} = \mu \frac{k}{l} m_{1,2} g = 0.8 \mu m_{1,2} g.$$

Iznos sile F izračunamo iz zadanog rada i prijađenog puta:

$$W = Fd \Rightarrow F = \frac{W}{d} = 49 \text{ N. (2 boda)}$$

Zbrajanjem prve i treće jednadžbe dobijemo:

$$(m_1 + m_2)a = F - 0.6(m_1 + m_2)g - 0.8\mu(m_1 + m_2)g,$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - (0.6 + 0.8\mu)g.$$

$$a = \frac{49 \text{ N}}{5 \text{ kg}} - (0.6 + 0.8 \cdot 0.23) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1.96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \text{ (2 boda)}$$

Nakon pucanja užeta tijelo 2 giba se početnom brzinom v prema gore dok se ne zaustavi. Tijelo se giba jednoliko usporeno i prelazi put prema vrhu kosine d_2 . Drugi Newtonov zakon za to gibanje glasi (pozitivan smjer x osi je smjer početne brzine tijela 2 tj. prema vrhu kosine):

$$m_2 a_2 = -F_{g2x} - F_{TR2}, \text{ (1 bod)}$$

$$m_2 a_2 = -0.6m_2 g - 0.8\mu m_2 g,$$

$$a_2 = -(0.6 + 0.8\mu)g = -(0.6 + 0.8 \cdot 0.23) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -7.84 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \text{ (1 bod)}$$

Do zaustavljanja tijelo 2 prelazi put:

$$d_2 = \frac{v^2}{2|a_2|},$$

Gdje je v brzina oba tijela u trenutku pucanja užeta:

$$v = \sqrt{2ad}, \text{ (1 bod)}$$

Slijedi da je udaljenost d_2 jednaka:

$$d_2 = \frac{ad}{|a_2|} = 0.5 \text{ m. (1 bod)}$$

U sljedećem periodu gibanja tijelo se giba jednoliko ubrzano niz kosinu. Dok ne stigne u početni položaj prelazi put $d + d_2 = 2.5 \text{ m}$. Drugi Newtonov zakon za ovaj period gibanja je (pozitivan smjer x osi je smjer gibanja tijela 2 tj. prema dnu kosine):

$$m_2 a'_2 = F_{g2x} - F_{TR2}, \text{ (1 bod)}$$

$$m_2 a'_2 = 0.6m_2 g - 0.8\mu m_2 g,$$

$$a'_2 = (0.6 - 0.8\mu)g = (0.6 - 0.8 \cdot 0.23) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4.16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \text{ (1 bod)}$$

Brzina tijela 2 u trenutku povratka u početnu točku jednaka je:

$$v_2 = \sqrt{2a'_2(d + d_2)} = 4.56 \text{ m. (1 bod)}$$

3. zadatak (16 bodova)

Zadatak se može riješiti u sustavu kugle ili u laboratorijskom sustavu. Prikazano rješenje je u sustavu kugle. Na slici su prikazane sile koje djeluju na kuglu. Za stalnu frekvenciju vrtnje kugle su na stalnoj visini i vrijede sljedeće jednačbe:

$$T_x = F_{cf}, \text{ (2 boda)}$$

$$T_y = F_g. \text{ (2 boda)}$$

Komponente sile T su:

$$\frac{T_x}{T} = \frac{r}{l} \Rightarrow T_x = T \frac{r}{l}, \text{ (1 bod)}$$

$$\frac{T_y}{T} = \frac{h}{l} \Rightarrow T_y = T \frac{h}{l}. \text{ (1 bod)}$$

Centrifugalna sila je

$$F_{cf} = \frac{Mv^2}{r}, \text{ (1 bod)}$$

gdje je $v = 2\pi r f$. (1 bod) Uvrštavanjem u prve dvije jednačbe dobije se:

$$T \frac{r}{l} = \frac{M4r^2\pi^2 f^2}{r},$$

$$T \frac{h}{l} = Mg.$$

Iz druge jednačbe izrazimo T i uvrstimo u prvu jednačbu:

$$\frac{Mgr}{h} = M4r\pi^2 f^2.$$

Slijedi da je frekvencija vrtnje osovine:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}. \text{ (4 boda)}$$

Za maksimalnu frekvenciju vrtnje osovine kut između šipke i osovine je 60° . Slijedi da je visina h minimalna i iznosi:

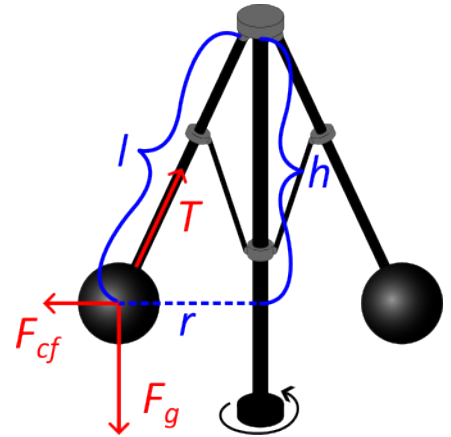
$$\frac{h_{min}}{l} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_{min} = \frac{1}{2}l = 6 \text{ cm. (1 bod)}$$

Slijedi da je maksimalna frekvencija:

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h_{min}}} = 2.035 \text{ s}^{-1}. \text{ (1 bod)}$$

Maksimalna visina prstena je $h_{max} = h_{min} + \Delta h = 8 \text{ cm. (1 bod)}$ Minimalna frekvencija je:

$$f_{min} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h_{max}}} = 1.762 \text{ s}^{-1}. \text{ (1 bod)}$$



4. zadatak (17 bodova)

a) Za rotaciju la oko Jupitera vrijedi 2. Newtonov zakon za kružno gibanje:

$$m_{Io} a_{cp} = F_{gravitacijska}, \text{ (1 bod)}$$

$$m_{Io} \frac{v^2}{r} = \frac{G m_{Io} m_{Jupiter}}{r^2}, \text{ (2 boda)}$$

Gdje je v brzina gibanja la oko Jupitera i r je polumjer gibanja la oko Jupitera. Za brzinu v uvrstimo izraz $v = \frac{2r\pi}{T_{Io}}$ (1 bod)

pa dobijemo:

$$\frac{4\pi^2 r}{T_{Io}^2} = \frac{G m_{Jupiter}}{r^2},$$

$$T_{Io} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G m_{Jupiter}}},$$

$$T_{Io} = 2\pi \sqrt{\frac{(421.6 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{(6.67428 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}) \cdot (317.8 \cdot 5.9722 \cdot 10^{24} \text{ kg})}} = 152821.5 \text{ s} = 42.45 \text{ h} = 1.769 \text{ dana.}$$

(4 boda)

b) Najprije trebamo izračunati period kruženja Jupitera oko Sunca. Slično kao u a) dijelu zadatka traženi period je jednak:

$$T_{Jupiter} = 2\pi \sqrt{\frac{r_{Sunce-Jupiter}^3}{G m_{Sunce}}},$$

$$T_{Jupiter} = 2\pi \sqrt{\frac{(778.5 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{(6.67428 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}) \cdot (1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg})}} = 4335.5 \text{ dana} = 11.87 \text{ godina. (2 boda)}$$

Za vrijeme jednog perioda la oko Jupitera relativna promjena kuta Zemlje u odnosu na Jupiter je:

$$\Delta\varphi = \varphi_{Zemlja} - \varphi_{Jupiter}. \text{ (1 bod)}$$

Uvrstimo da je prijeđeni kut u vremenu perioda loa jednak $\varphi = \omega T_{Io}$ (1 bod):

$$\Delta\varphi = \omega_{Zemlja} T_{Io} - \omega_{Jupiter} T_{Io},$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{T_{Zemlja}} - \frac{1}{T_{Jupiter}} \right) T_{Io},$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{365.25 \text{ dana}} - \frac{1}{4335.5 \text{ dana}} \right) \cdot 1.769 \text{ dana} = 0.02787 \text{ rad} = 1.5967^\circ = 1^\circ 35' 48''. \text{ (2 boda)}$$

Promjena je manja od 3° pa se promjena položaja Zemlje i Jupitera za vrijeme jednog perioda loa može zanemariti.

c) Kada se Zemlja nalazi na položaju najudaljenijem od Jupitera, svjetlost od loa do Zemlje prelazi veći put u odnosu na slučaj kada se Zemlja nalazi na položaju najbližem Jupiteru. Razlika puta svjetlosti u ta dva slučaja je $2r_{Sunce-Zemlja}$.

(1 bod) Vrijeme „kašnjenja“ pomrčine la jednako je vremenu potrebnom da svjetlost prijeđe navedenu razliku puta.

Slijedi da je brzina svjetlosti jednaka:

$$c = \frac{2r_{Sunce-Zemlja}}{22 \text{ min}} = \frac{2 \cdot 149.6 \cdot 10^9 \text{ m}}{22 \cdot 60 \text{ s}} = 2.267 \cdot 10^8 \text{ m/s. (2 boda)}$$