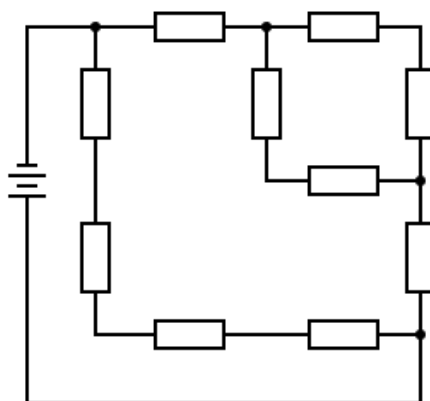


Rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadatka. Ako učenici riješe zadatak drugačiji način, a fizikalno pravilan način, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

Zadatak 1. (ukupno bodova: 20)

Zbog simetrije problema, krajevi žice koja stoji dijagonalno će biti na istom potencijalu (naponu) te stoga kroz nju struja ne teče. U tom slučaju možemo dati spoj zamijeniti ekvivalentnom shemom na kojoj smo maknuli dijagonalnu žicu i pripadajući otpornik (**4 boda**).



Neka je otpor pojedinog otpornika R . Tada je mali kvadrat paralelni spoj po dva serijski spojena otpornika

$$\frac{1}{R_{\text{mali}}} = \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R+R}$$

$$R_{\text{mali}} = R. \quad \text{(1 bod)}$$

Ukupni otpor gornje grane je rezultat serijskog spoja malog kvadrata i dva otpornika

$$R_{\text{gore}} = R_{\text{mali}} + R + R = 3R.$$

Na donjoj grani, na neprekinutim stranicama većeg kvadrata, imamo serijski spoj 4 otpornika pa je otpor te grane jednak

$$R_{\text{dolje}} = R + R + R + R = 4R. \quad \text{(1 bod)}$$

Ukupni otpor je rezultat paralelnog spoja dvije grane

$$R_{\text{sklop}} = \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{4R} \right)^{-1} = \frac{12}{7}R,$$

što nam daje i traženi omjer koji iznosi 12/7 **(1 bod)**.

Kako bi odredili koji otpornik prvi pregori moramo odrediti na kojem je od njih električna snaga najveća. U ovom ćemo rješenju promatrati pad napona na otpornicima, odnosno tražiti maksimum za $P = UI = U^2/R$, koristeći naputak da su svi otpori približno jednaki zaključujemo da je dovoljno naći otpornik s najvećim padom napona **(1 bod)**.

Kako je spoj gornje i donje grane paralelan, ukupni pad napona na otpornicima u svakoj grani mora biti jednak 240 V. Obzirom da je otpor malog kvadrata jednak otporu otpornika gornja grana je sastavljena od 3 komponente identičnog otpora, gdje je donja grana sastavljena od 4, pa je jasno da otpornici na gornjoj grani imaju veći pad napona. Dodatno, kako mali kvadrat uključuje serijski spoj njegovi otpornici imaju manji pad napona od drugih otpornika iz gornje grane. Sveukupno, možemo zaključiti da će preostala dva otpornika iz gornje grane prvi pregorjeti **(2 boda)**, a pad napona na njima je jednak

$$\Delta U = \frac{1}{3}U_{\text{uk}} = 80\text{V}. \quad \textbf{(1 bod)}$$

Ukupna toplina koju otpornik može primiti prije kvara je

$$\Delta Q = C\Delta T = 300\text{J}. \quad \textbf{(1 bod)}$$

Ona je jednaka ukupnoj električnoj snazi koja se razvijala na otporniku u vremenu do kvara, a ako uzmemo u obzir da je pad napona na njemu konstantan, vrijedi

$$P_{\text{el}} = UI = \frac{\Delta E}{\Delta t}, \quad \textbf{(1 bod)}$$

$$\Delta E = UI\Delta t = U \frac{\Delta q}{\Delta t} \Delta t = U\Delta q, \quad \textbf{(2 boda)}$$

$$\Delta q = \frac{\Delta E}{U} = \frac{\Delta Q}{U} = 3.75\text{C}. \quad \textbf{(1 bod)}$$

Zakon toplinskog širenja možemo primijeniti na otpor otpornika

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{r^2 \pi}, \quad \textbf{(1 bod)}$$

$$R(T) = \rho \frac{l_0(1 + \alpha\Delta T)}{r_0^2(1 + \alpha\Delta T)^2 \pi} = \rho \frac{l_0}{r_0^2(1 + \alpha\Delta T) \pi}. \quad \textbf{(1 bod)}$$

Otpor zagrijanog otpornika je

$$R(T = 760^\circ\text{C}) = \frac{R(T = 20^\circ\text{C})}{1 + \alpha\Delta T}, \quad \textbf{(1 bod)}$$

Nakon pregaranja, jedina neprekinuta komponenta strujnog kruga je donja grana te traženi omjer

$$\frac{R_{\text{kon}}}{R(T = 20^\circ\text{C})} = \frac{4R(T = 760^\circ\text{C})}{R(T = 20^\circ\text{C})} = \frac{4}{1 + \alpha\Delta T} = 3.950, \quad \textbf{(1 bod)}$$

Zadatak 2. (ukupno bodova: 15)

Kako imamo izmjenu topline kroz klip u konačnom stanju će temperature lijeve i desne strane komore biti jednake (**2 boda**). Jednu jednadžbu koja povezuje tražene veličine možemo dobiti iz zakona očuvanja energije $E_{\text{poč}} = E_{\text{kon}}$ (**1 bod**)

$$E_{\text{poč}} = \frac{5}{2}n_LRT_L + \frac{3}{2}n_DRT_D, \quad (\text{1 bod})$$

$$E_{\text{kon}} = \frac{5}{2}n_LRT_k + \frac{3}{2}n_DRT_k + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2, \quad (\text{1 bod})$$

pri čemu je Δl elongacija opruge. Drugu jednadžbu dobivamo iz uvjeta da u konačnom stanju sustav miruje, odnosno da se sile na klip moraju poništiti

$$p_LS + k\Delta l = p_DS, \quad (\text{2 boda})$$

nadalje, možemo iskoristiti jednadžbu stanja idealnog plina kako bi eliminirali tlak

$$\frac{n_LRT_k}{d} + k\Delta l = \frac{n_DRT_k}{d}, \quad (\text{2 boda})$$

pri čemu je d duljina svakog od dijelova komore u konačnom stanju koja iznosi 0.18 m (**1 bod**). Sada imamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice kojega trebamo riješiti bilo kojom metodom kako bi dobili iznos konačne temperature. Raspisivanje vodi na kvadratnu jednadžbu

$$\frac{8}{3} \frac{Rn_L}{T_D} T_k^2 + \frac{1}{3T_D} (k\Delta l(\Delta l + 3d) - n_LR(5T_L + 3T_D)) T_k - k\Delta ld = 0. \quad (\text{3 boda})$$

Uvrštavanjem vrijednosti danih u tekstu zadatka i biranjem pozitivnog korijena kvadratne jednadžbe (po definiciji termodinamička temperatura ne može biti negativna) dobivamo $T_k = 462.4964$ K (**2 boda**).

Zadatak 3. (ukupno bodova: 18)

Postavimo koordinatni sustav tako da se x-y ravnina poklapa s ravninom gibanja čestice, pri čemu je apscisa položena na negativnu ploču kondenzatora, a ordinata usmjerena prema pozitivno nabijenoj ploči. U prvom slučaju, ako ploče kondenzatora nisu nabijene, čestica se giba jednoliko pravocrtno te iz informacije o prijađenom putu i proteklom vremenu do sudara zaključujemo: $v_0 = 5 \cdot 10^6$ m/s, $v_{x,0} = 4 \cdot 10^6$ m/s, $v_{y,0} = -3 \cdot 10^6$ m/s (**2 boda**).

Sljedeće, koristimo poznate relacije o kapacitetu kako bi dobili električno polje između ploča

$$C_{\text{pločasti}} = \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon_0 d, \quad (1 \text{ bod})$$

$$Q = CU = CEd, \quad (1 \text{ bod})$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 d^2}, \quad (2 \text{ boda})$$

pri čemu je C kapacitet (pločastog) kondenzatora, ϵ_0 permitivnost vakuumu, d duljina stranice kondenzatora, Q naboj na ploči, a E električno polje.

Kako je električno polje homogeno i paralelno s ordinatom gibanje u tom smjeru će biti jednoliko ubrzano s akceleracijom $|q|E/m$ (**1 bod**), dok će u smjeru apscise biti jednoliko. Sve skupa imamo

$$v_x = v_{x,0},$$

$$x(t) = v_{x,0}t, \quad (1 \text{ bod})$$

$$v_y = v_{y,0} + \frac{|q|}{m} \frac{Q}{\epsilon_0 d^2} t,$$

$$y(t) = \frac{d}{2} + v_{y,0}t + \frac{|q|}{m} \frac{Q}{\epsilon_0 d^2} \frac{t^2}{2}. \quad (1 \text{ bod})$$

Čestica jedva promašuje negativno nabijenu ploču, što znači da izlazi u točki $x = d = 6$ cm, $y = 0$ cm (**1 bod**). Ubacimo li to u prethodne relacije i riješimo sustav jednažbi dobivamo traženi omjer

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2\epsilon_0 d v_{x,0}^2}{Q} \left(\frac{|v_{y,0}|}{v_{x,0}} - \frac{1}{2} \right). \quad (3 \text{ boda})$$

Konačno, uvrstimo brojeve i izračunamo

$$\frac{|q|}{m} = 1.4166 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}. \quad (1 \text{ bod})$$

Korištenjem prethodno navedenih relacija lako dobivamo konačnu brzinu čestice

$$v_{x,\text{kon}} = v_{x,0},$$

$$v_{y,\text{kon}} = v_{y,0} + \frac{|q|}{m} \frac{Q}{\epsilon_0 d v_{x,0}} = v_{y,0} + v_{x,0} \left(\frac{2|v_{y,0}|}{v_{x,0}} - 1 \right) = |v_{y,0}| - v_{x,0}. \quad (2 \text{ boda})$$

Što nam daje traženi omjer

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{(|v_{y,0}| - v_{x,0})^2 - v_{y,0}^2}{v_{x,0}^2 + v_{y,0}^2} = \frac{v_{x,0}^2 - 2v_{x,0}|v_{y,0}|}{v_0^2} = -0.32. \quad (2 \text{ boda})$$

Zadatak 4. (ukupno bodova: 17)

Označimo spremnik s nižom rupom indeksom 1, a onaj s višom s 2. Tada po uvjetu zadatka imamo za domete mlazove $R_2 = \eta R_1$ **(1 bod)**. Kako se mlazovi ponašaju kao horizontalni hitci vrijedi

$$R = v_0 \sqrt{2\Delta h/g}. \quad \textbf{(1 bod)}$$

Koristeći poznate podatke možemo zaključiti

$$v_2 = \frac{\eta}{\sqrt{2}} v_1. \quad \textbf{(1 bod)}$$

Kako je tok neovisan o vremenu, možemo za svaki spremnik možemo napisati Bernoullijevu jednadžbu u početnom trenutku i sve iz njih izračunati

$$\rho g(h_0 - nd) + \frac{\rho}{2} g h_n + \frac{\rho v_{s,n}^2}{2} = \frac{\rho v_n^2}{2}, \quad \textbf{(2 boda)}$$

pri čemu je ρ gustoća, a h_0 visina fluida u donjem dijelu spremnika, d visina niže rupe, h_n visina rjeđeg fluida, $v_{s,n}$ brzina kojom se spušta razina gušćeg fluida te v_n^2 početna brzina mlaza.

Po uvjetu zadatka tok kroz rupe je jednak, što znači da možemo izjednačiti tok gušćeg fluida u cilindru, a kako su cilindri identični to znači da su brzine $v_{s,1}$ i $v_{s,2}$ jednake **(3 boda)**. Iskoristimo li tu informaciju, kombiniranjem s prethodno navedenim relacijama dolazimo do jednadžbe

$$\left(\frac{\eta^2}{2} - 1\right) v_1^2 = g((h_2 - h_1) - 2d), \quad \textbf{(2 bod)}$$

odnosno

$$v_1 = \sqrt{g} \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1) - 4d}{\eta^2 - 2}}. \quad \textbf{(1 bod)}$$

Ako je razina fluida u drugom spremniku viša, tada je brojnik razlomka pozitivan, pa i nazivnik mora isto biti pozitivan, to jest $\eta > \sqrt{2}$ **(2 boda)**. U suprotnom, ako je razina fluida u prvom spremniku viša, tada nazivnik mora biti negativan, što vodi na $0 < \eta < \sqrt{2}$ **(2 boda)**.

Za $\eta = 2$ imamo prvi slučaj te uvrštavanjem dobivamo $v_1 = 2.2147$ m/s **(1 bod)** te $v_2 = 3.1321$ m/s **(1 bod)**.

Fizikalne konstante:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2;$$

$$T_0 = -273,15^\circ\text{C}$$

$$R = 8.314 \text{ J/Kmol}.$$