

Županijsko natjecanje iz fizike, 2024.

Rješenja i smjernice za bodovanje – 3. skupina

1. zadatak (10 bodova)

Treba prepoznati da je prsten s nabojem koji se giba identičan strujnoj petlji. **(1 bod)**
Magnetsko polje je u centru strujne petlje dano izrazom $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, gdje je $R = \frac{D}{2}$ radijus petlje. **(1 bod)**

Linearna gustoća je dana s ukupnim nabojem po duljini. Kako je duljina prstena $2\pi r$, tada možemo pisati $\lambda = Q/(2\pi r)$. Iz dane linearne gustoće i preko brzine naboja v možemo izraziti struju: **(2 boda)**

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\lambda \Delta x}{\Delta t} = \lambda v$$

Tada vrijedi:

(1 bod)

$$B(t) = \frac{\mu_0 \lambda}{2R} v(t) = B_0 \sin \omega t$$

Možemo izraziti brzinu:

(1 bod)

$$v(t) = \frac{2B_0 R}{\mu_0 \lambda} \sin \omega t$$

Kako je ovaj izraz za brzinu isti kao i kod harmoničkog oscilatora, zaključujemo da gibanje naboja predstavlja harmonički oscilator. Za harmonički oscilator vrijedi da je veza pomaka i brzine trigonometrijska. Kada je brzina najveća u pozitivnom smjeru, h.o. se nalazi u ravnotežnom položaju, i ide prema pozitivnom smjeru. Ako je $v(t) = x_0 \omega \sin \omega t$, mora biti $x(t) = -x_0 \cos \omega t$. **(2 boda)**

Pišemo, uz ponovnu zamjenu $D = 2R$:

(2 boda)

$$x(t) = -\frac{B_0 D}{\mu_0 \omega \lambda} \cos \omega t$$

Napomena: vrijednost amplitude $x(t)$ će biti negativna, zbog negativnog naboja elektrona koji se ovdje krije u λ . Priznaje se ukoliko se taj minus izvadi iz konstante u nekom trenu izvoda, ali mora biti jasno gdje!

2. zadatak (10 bodova)

U petlji oblika romba inducira se napon po pravilu:

$$U_{emf} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{A} \cdot \vec{B})}{\Delta t}$$

Skalarni umnožak površine i magnetskog polja je najveći ako magnetske silnice padaju okomito na površinu, što znači da je petlja tako postavljena da je skalarni umnožak polovina maksimalnog: **(2 boda)**

$$\Phi = AB \cos \varphi = \frac{1}{2} AB$$

Površina romba dana je s $A = a^2 \sin \alpha$, a uz dani kut je: $A = \frac{1}{2}a^2$. (1 bod)

Magnetsko polje zavojnice dano je s $B = \mu_0 n I$, gdje je n broj namotaja po jedinici duljine. (1 bod)

Kada ugasimo struju, magnetsko polje unutar zavojnice, a time i magnetski tok išćežnu. Struja koja se inducira u petlji I_{emf} pritom se može izraziti kao: (1 bod)

$$U_{emf} = I_{emf} R = \frac{a^2 \Delta B}{4 \Delta t}$$

S obzirom da ne znamo kako se gasilo magnetsko polje, ne možemo doći do direktnog izraza za struju, ali možemo prepoznati da se naboj koji je protekao petljom može povezati sa induciranom strujom kao: (2 boda)

$$I_{emf} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{a^2 \Delta B}{4 R \Delta t}$$

Pokratom veličine Δt dobijemo konačno: (1 bod)

$$\Delta Q = \frac{a^2 \mu_0 n I}{4 R} = 7.854 \cdot 10^{-6}$$

Tu smo naravno prepoznali da je ΔB zapravo $\mu_0 n \Delta I$, te da je ukupna promjena struje u zavojnici $\Delta I = I - 0 = I$. (2 boda)

Jedan bod se dodjeljuje svima koji nisu samo *izbrisali* Δ iz izraza, već obrazložili zašto to čine.

3. zadatak (6 bodova)

Strujni krug se dakle sastoji od serijski spojenih izvora, otpora r i R te zavojnice inuktiviteta L . Impedancija takvog strujnog kruga je: (1 bod)

$$Z = \sqrt{(r + R)^2 + (\omega L)^2}$$

Struja u strujnom krugu dana je s: (1 bod)

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{(r + R)^2 + (\omega L)^2}}$$

Rješimo po r : (1 bod)

$$r = \sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2 - (\omega L)^2} - R$$

Rješenje je $r = 93.26 \Omega$. (1 bod)

Kut koji zatvara struja sa naponom dan je kao: (1 bod)

$$\tan \varphi = -\frac{\omega L}{r + R}$$

Traženi kut $\varphi = -12.37^\circ$. (1 bod)

4. zadatak (14 bodova)

- (a) Prepoznamo LC titrajni krug gdje su (za $t > 0$) dva konenzatora spojena u seriju. (1 bod)

Izraz za frekvenciju je: (1 bod)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Izvrijednjeno: $f = 1.370$ kHz. (1 bod)

- (b), (c) Treba prepoznati što se događa u strujnom krugu. Jednom kada se s nabijenim kondenzatorom zatvori strujni krug struja će poteći kroz zavojnicu do drugog, praznog kondenzatora. Bez zavojnice struja bi prestala teći kada bi se naponi na konenzatorima izjednačili, no uloga zavojnice je induktivna, pa će tada zavojnica nastaviti *gurati* struju usprkos jednakim naponima.

S obzirom da uzimamo da je strujni krug idealan i bez gubitaka, iz simetrije strujnog kruga možemo zaključiti da će na pola perioda titranja ($t = T/2$) drugi kondenzator biti potpuno nabijen. (1 bod)

Zbog očuvanja energije u krugu naboj na njemu će biti jednak kao kod prvog kondenzatora na početku (U). (2 boda)

Struja u krugu će tada biti nula, a prvi kondenzator će biti prazan.

Nakon toga počinje pražnjenje drugog i punjenje prvog kondenzatora. Važno je primjetiti da napon na kondenzatorima neće nikada biti negativan zbog toga! (1 bod)

Možemo pisati napone na njima kao: (1 bod)

$$U_L = \frac{U}{2} (1 + \cos \omega t)$$
$$U_R = \frac{U}{2} (1 - \cos \omega t)$$

Energija magnetskog polja zavojnice je maksimalna kada je struja maksimalna, a zbog simetrije to je u vremenu $t = T/4$. (2 boda)

Tada je, iz gore priloženog opisa, naboj na oba kondenzatora jednak $U_C = \frac{U}{2}$, (1 bod)
pa je ukupna energija u $t = 0$ i u $t = T/4$: (2 boda)

$$E_{uk} = \frac{1}{2}CU^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}C \left(\frac{U}{2}\right)^2 + E_{ind}$$

Dakle, energija u trenutku $T/4$ u magnetskom polju je $E_{ind} = \frac{1}{4}CU^2 = 1.44$ mJ. (1 bod)

5. zadatak (10 bodova)

Koristeći pretpostavku da se baterija puni konstantnom brzinom možemo izračunati kolikim smo nabojem napunili bateriju: (1 bod)

$$Q = I_{DC} * t$$

Punjenjem baterije preko izvora izmjenične struje struja nije konstantna, no možemo primjetiti da je naboj uvijek dan kao umnožak struje i vremena, što na grafu struje u vremenu predstavlja površinu ispod krivulje. **(2 boda)**

Budući da nam je dano u zadatku da površina ispod pola sinusa iznosi $A = 2$, možemo izračunati izraz za površinu, tj. naboj $Q(T)$ unutar jednog perioda. Moramo paziti na jedinice jer je $A = 2$ bezdimenzionalna matematička veličina. Da bi došli i mi sa našim $I(t)$ grafom do bezdimenzionalne veličine, moramo apscisu podijeliti s amplitudom I_A a ordinatu s $2\pi/T$ (jer u matematičkom grafu je period 2π). Iz toga možemo saznati koliko bi iznosila naša "dimenzionalna" površina: **(2 boda)**

$$Q_T = 4 \cdot I_A \cdot \frac{T}{2\pi} = \frac{2I_A T}{\pi}$$

gdje je $I_A = \sqrt{2}I_{eff}$ amplituda struje i T period oscilacija. Da bismo našli ukupno vrijeme potrebno da se baterija napuni jednakim nabojem (τ) pišemo: **(2 boda)**

$$\frac{Q}{Q_T} = \frac{\tau}{T}$$

Konačni izraz je:

(2 boda)

$$\tau = \frac{\pi I_{DC}}{2\sqrt{2}I_{DC}} t = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} t$$

Trebati će $\tau = 1.11$ h, tj. 66.64 minute.

(1 bod)