

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE

6. ožujka 2024.

BODOVI*:

- POTPUNO TOČNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- POGREŠNO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAKS. BODOVA
1.		60
2.		36
3.		27
4.		36
UKUPNO		159

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

Zadatak 1.

Uobičajenim je istinitosnim vrijednostima istina “ \top ” i neistina “ \perp ” dodana vrijednost “ $1/2$ ”. Uporaba je nove vrijednosti prikazana u tablicama. Npr. ako je istinitosna vrijednost formule A jednaka $1/2$, a istinitosna vrijednost formule B jednaka \perp , onda je istinitosna vrijednost formule $A \rightarrow (A \vee B)$ jednaka \top .

		A	B	\wedge	\vee	\rightarrow
		\top	\top	\top	\top	\top
		\top	$1/2$	$1/2$	\top	$1/2$
		\top	\perp	\perp	\top	\perp
A	\neg	$1/2$	\top	$1/2$	\top	\top
\top	\perp	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	\top
$1/2$	$1/2$	$1/2$	\perp	\perp	$1/2$	$1/2$
\perp	\top	\perp	\top	\perp	\top	\top
		\perp	$1/2$	\perp	$1/2$	\top
		\perp	\perp	\perp	\perp	\top

Za navedene je formule potrebno odrediti valjanost u uobičajenom smislu logike sudova (logika sudova s dvjema istinitosnim vrijednostima) te valjanost u smislu opisanoga proširenja logike sudova. U drugome slučaju valjanost definiramo na analogan način: sud je valjan ako je u svim interpretacijama (tumačenjima), tj. svim dodjeljivanjima istinitosnih vrijednosti \top , $1/2$ i \perp atomarnim sudovima (propozicionalnim varijablama, jednostavnim iskazima), istinitosna vrijednost čitavoga suda jednaka \top . Za svaki iskaz i oba smisla valjanosti, ako je iskaz valjan u tome smislu valjanosti, potrebno je zaokružiti “Da”, u suprotnome “Ne”.

	Valjan u prvome smislu		Valjan u drugome smislu	
a) $(p \rightarrow (q \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Da	Ne	Da	Ne
b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee (q \rightarrow \neg p))$	Da	Ne	Da	Ne
c) $\neg(p \rightarrow \neg p) \vee \neg(\neg p \rightarrow p)$	Da	Ne	Da	Ne
d) $(\neg p \wedge p) \rightarrow q$	Da	Ne	Da	Ne
e) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$	Da	Ne	Da	Ne
f) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$	Da	Ne	Da	Ne
g) $\neg\neg p \rightarrow p$	Da	Ne	Da	Ne
h) $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$	Da	Ne	Da	Ne
i) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$	Da	Ne	Da	Ne
j) $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$	Da	Ne	Da	Ne

(20 \times 3 boda = 60 bodova)

Zadatak 2.

Potrebno je dovršiti danu dedukciju.

Postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji. Rješenja moraju biti u skladu s pravilima i konvencijama u prilogu (na posljednjim stranicama testa).

1	$(P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)$	pretp.
2		pretp.
3		pretp.
4		
5		
6		\neg i, 3–5
7		pretp.
8		
9		
10		pretp.
11		
12		
13		pretp.
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20	$P \vee (Q \rightarrow R)$	\neg i, 19

Bodovanje: Svaki potpuno točno ispunjen redak (zajedno s potpunim opravdanjem) nosi 2 boda, nepromijenjen 1 bod, inače 0 bodova.

(18×2 boda = 36 bodova)

Zadatak 3.

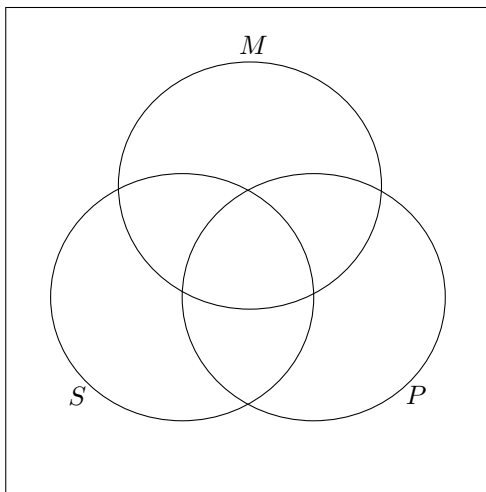
U maksimalan broj područja Vennova dijagrama potrebno je unijeti simbole (križiće ili sjenčanja), a da pritom interpretacija dobivenoga dijagrama slijedi iz dane formule. Vrijedi sljedeći (uobičajeni) prijevod:

- $Sx \dots$ x pripada domeni (opsegu) pojma S .
- $Mx \dots$ x pripada domeni pojma M .
- $Px \dots$ x pripada domeni pojma P .

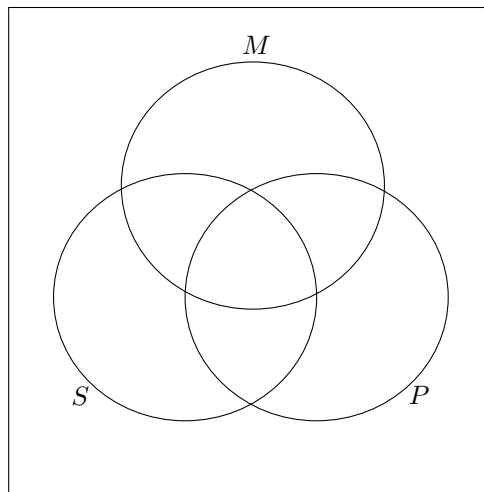
Informacije o relacijama koje odgovaraju (binarnim) relacijskim simbolima R i Q ne ucrtavamo na Vennove dijagrame. To radimo samo za unarne relacijske simbole S , M i P , koji predstavljaju neke pojmove, kao što je i uobičajeno (Vennovi dijagrami prikazuju neke informacije o odnosima pojmova, ne i o odnosima binarnih relacija).

Napomena: Nije dopušteno koristiti se simbolom crte koji se katkad koristi za oznaku nepraznosti unije područja. Križići također ne smiju prelaziti granice područja.

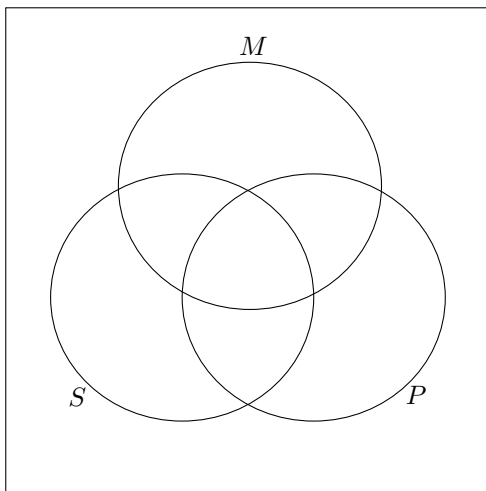
a) $\forall x((Sx \rightarrow Px) \rightarrow (Mx \rightarrow Px))$



b) $\forall x\forall y((Sx \rightarrow Py) \rightarrow (Mx \rightarrow Py))$



c) $\neg\forall x\forall y\forall z(Rxy \rightarrow (Ryz \rightarrow Qxz)) \wedge$
 $\wedge \forall x\forall y(Rxy \rightarrow (Sx \wedge \neg Mx \wedge Py)) \wedge$
 $\wedge \forall x\forall y(((Px \vee Sy \vee \neg My) \wedge (Sx \wedge \neg Mx \wedge Py)) \rightarrow Qxy)$



Bodovanje: Svaki potpuno točno ispunjen dijagram nosi 9 bodova, nepromijenjen 3 boda, inače 0 bodova.

(3×9 boda = 27 bodova)

Zadatak 4.

U ovome zadatku treba odrediti jesu li formule valjane (**V**), zadovoljive/ispunjive (**Z**), nevaljane/oborive (**O**) ili kontradikcije (**K**). Potrebno je zaokružiti **sva svojstva** koja vrijede (ne samo ona koja “najbolje opisuju” formulu).

Napomena: U ovom zadatku pretpostavljamo da se relacijski simbol “=” može interpretirati samo kao relacija identiteta (kao što se uobičajeno taj simbol i čita, no u logici se katkad dopuštaju i drukčije interpretacije).

- | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| a) $\exists x \forall y (x = y \rightarrow Px) \leftrightarrow \exists x Px$ | V Z O K |
| b) $\forall x \exists y (Fxy \wedge \forall z (Fxz \rightarrow z = y))$ | V Z O K |
| c) $\forall x \exists y (Fxy \wedge \forall z (Fxz \rightarrow z = y)) \wedge \exists x \exists y \exists z (Fxy \wedge Fxz)$ | V Z O K |
| d) $\forall x \exists y (Fxy \wedge \forall z (Fxz \rightarrow z = y)) \rightarrow \exists x \exists y \exists z (Fxy \wedge Fxz)$ | V Z O K |
| e) $\neg \exists x \exists y \exists z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$ | V Z O K |
| f) $\forall x (\exists y Rxy \rightarrow Rxx) \wedge \neg \exists x \exists y \exists z ((Rxy \wedge Ryz) \wedge Rxz)$ | V Z O K |
| g) $(\forall x \exists y \exists z (Px \rightarrow (x = y \vee x = z))) \wedge \exists x \forall y x = y \rightarrow \forall x Px$ | V Z O K |
| h) $\forall x \exists y \forall z (Rxyz \vee Rxzy) \rightarrow \forall x \exists y \exists z (Rxyy \wedge Ryzx)$ | V Z O K |
| i) $\forall x \forall y \forall z ((x = y \leftrightarrow \neg x = z) \rightarrow Rxz) \rightarrow \forall x (Rxx \vee \exists y \neg x = y)$ | V Z O K |
| j) $\forall x \neg Px \rightarrow \forall x (\neg \exists y Rxy \rightarrow \forall y (Rxy \rightarrow Py))$ | V Z O K |
| k) $(\forall x Ax \rightarrow \exists x Bx) \rightarrow \exists x (Ax \rightarrow Bx)$ | V Z O K |
| l) $\forall x \exists y (\neg Fy \rightarrow ((Gxy \rightarrow Gyx) \rightarrow \neg Fx))$ | V Z O K |

(12×3 boda = 36 bodova)

PRILOG: Dopusštena pravila prirodne dedukcije

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje s jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što povlači da dokaz mora započeti podizvodom.
- Opravdanja se sastoje od triju podataka: simbol veznika, slovo u ili i (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Ta tri podatka mogu biti odijeljena razmakom, zarezom, kosom crtom ili kako drukčije. Poredak tih triju podatka proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteracija (opetovanje) ne sadržava slovo u ili i.
- Kod nekih je pravila poredak premisa o kojima ovise proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak rednoga broja k mogao se pojaviti prije retka rednoga broja j , a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati $\wedge u, j, k$ ili $\wedge u, k, j$. U sva četiri slučaja, pravilo zovemo $\wedge u$.
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.
- Svaka pojava veznika, osim glavnoga veznika, mora imati vlastite zgrade: $A \wedge (B \wedge C)$ i $(A \wedge B) \wedge C$ pravilni su zapisi, no $A \wedge B \wedge C$ nije.

Uvođenje konjunkcije. *

j		A	
		\vdots	
k		B	
		\vdots	
		$A \wedge B$	$\wedge u, j, k$

Uvođenje disjunkcije.

j		A		j		B	
		\vdots				\vdots	
		$A \vee B$	$\vee u, j$			$A \vee B$	$\vee u, j$

Uvođenje kondicionala.

j			A	pretp.
			\vdots	
k			B	
			$A \rightarrow B$	$\rightarrow u, j-k$

Uvođenje bikondicionala.

j			A	pretp.
			\vdots	
k			B	
m			B	pretp.
			\vdots	
n			A	
			$A \leftrightarrow B$	$\leftrightarrow u, j-k, m-n$

Uvođenje kontradikcije. *

j		A	
		\vdots	
k		$\neg A$	
		\vdots	
		\perp	$\perp u, j, k$

Uvođenje negacije.

j			A	pretp.
			\vdots	
k			\perp	
			$\neg A$	$\neg u, j-k$

Isključenje konjunkcije.

j		$A \wedge B$		j		$A \wedge B$	
		\vdots				\vdots	
		A	$\wedge i, j$			B	$\wedge i, j$

Isključenje disjunkcije.

e		$A \vee B$	
		\vdots	
j		A	pretp.
		\vdots	
k		C	
m		B	pretp.
		\vdots	
n		C	
		C	$\vee i, e, j-k, m-n$

Isključenje kondicionala. *

j		$A \rightarrow B$	
		\vdots	
k		A	
		\vdots	
		B	$\rightarrow i, j, k$

Isključenje bikondicionala. *

j		$A \leftrightarrow B$		j		$A \leftrightarrow B$	
		\vdots				\vdots	
k		A		k		B	
		\vdots				\vdots	
		B	$\leftrightarrow i, j, k$			A	$\leftrightarrow i, j, k$

Isključenje kontradikcije.

j		\perp	
		\vdots	
		A	$\perp i, j$

Isključenje negacije.

j		$\neg \neg A$	
		\vdots	
		A	$\neg i, j$

Reiteracija (opetovanje).

j		A	
		\vdots	
		A	re., j (ili op., j)