

Rješenja ispita za Državno natjecanje iz astronomije 2023./2024.

3. razred srednje škole

Zadatci (ukupno 50 bodova):

1. Zamislimo dvojni sustav u kojem se zvijezde nalaze na udaljenosti 19 a.j. i 57 a.j. od centra mase. Mase manje zvijezda je jednaka masi Sunca. Pretpostavimo da su putanje oko centra mase kružne.
- Koliko iznosi međusobna udaljenost zvijezda?
 - Odredi mase zvijezda ako masu Sunca dobijete iz podataka o Zemljinoj putanji.
 - Koliko iznosi period rotacije za dvojni sustav izražen u godinama?

	13
--	----

$$a = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} \quad T_z = 1 \text{ god} \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Rješenje:

$$r_1 = 19 \text{ aj}$$

$$r_2 = 57 \text{ aj}$$

$$M_2 = M_s$$

$$a = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$T_z = 1 \text{ god} = 365 \cdot 86\,400 \text{ s} = 31\,536\,000 \text{ s}$$

$$r = r_1 + r_2 = 19 \text{ aj} + 57 \text{ aj} = 76 \text{ aj} = 1,137 \cdot 10^{13} \text{ m}$$

1 bod

Uspoređujući izraze za gravitacijsku silu i opći zakon gravitacije možemo dobiti ubrzanje pojedine mase.

$$M_1 \cdot a_1 = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$$

$$a_1 = G \frac{M_2}{r^2}$$

$$M_2 \cdot a_2 = G \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2}$$

$$a_2 = G \frac{M_1}{r^2}$$

1 bod

Sada centripetalno ubrzanje pojedine mase možemo izjednačiti s prethodno dobiveni ubrzanjem.

$$a_{cp1} = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2} = G \frac{M_2}{r^2}$$

$$a_{cp2} = \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2} = G \frac{M_1}{r^2}$$

1 bod

Dijeljenjem dobivenih izraza

$$\frac{\frac{4\pi^2 r_1}{T^2}}{\frac{4\pi^2 r_2}{T^2}} = \frac{G \frac{M_2}{r^2}}{G \frac{M_1}{r^2}}$$

dobijemo

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{M_2}{M_1} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz toga slijedi

$$M_1 = M_2 \frac{r_2}{r_1} = M_s \frac{57 \text{ aj}}{19 \text{ aj}} = 3M_s \quad 1 \text{ bod}$$

Da bismo dobili masu Sunca moramo izjednačiti centripetalnu silu koja djeluje na Zemlju dok se giba oko Sunca s općim zakonom gravitacije za Sunce i Zemlju.

$$M_z \frac{4\pi^2 a}{T_z^2} = G \frac{M_z M_s}{a^2} \quad 1 \text{ bod}$$

Iz čega proizlazi

$$M_s = \frac{4\pi^2 a^3}{G T_z^2}$$

$$M_s = \frac{4\pi^2 (149,6 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot (31 \, 536 \, 000 \text{ s})^2} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad 1 \text{ bod}$$

$$M_2 = M_s = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad 1 \text{ bod}$$

$$M_1 = 3M_s = 3 \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 5,97 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad 1 \text{ bod}$$

Period rotacije ćemo dobiti kada prema trećem keplerovom zakonu za dvojne sustave zbrojimo prethodno izražena ubrzanja pojedinih masa.

$$a_{cp1} = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2} = G \frac{M_2}{r^2}$$

$$a_{cp2} = \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2} = G \frac{M_1}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2 r_1}{T^2} + \frac{4\pi^2 r_2}{T^2} = G \frac{M_2}{r^2} + G \frac{M_1}{r^2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} (r_1 + r_2) = \frac{G}{r^2} (M_1 + M_2)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(M_1 + M_2)}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(1,137 \cdot 10^{13} \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} (5,97 \cdot 10^{30} \text{ kg} + 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg})}} = 1,04 \cdot 10^{10} \text{ s} \quad 1 \text{ bod}$$

$$T = 331,34 \text{ god} \quad 1 \text{ bod}$$

Prihvataju se i alternativna rješenja koja vode do istog ili približnog rezultata.

2. Mars ima polumjer 3389 km i period rotacije 24 h 37 min 23 s i gravitacijsko ubrzanje na ekvatoru $3,711 \text{ m s}^{-2}$. Koliko iznosi ubrzanje slobodnog pada na polovima i na 47° sjeverne širine gdje je sletio Viking Lander 2. Zanimarite spljoštenost Marsa. Skiciraj dijagram sila ubrzanja na ekvatoru, 47° širine i na polu.

Rješenje:

$$r = 3389 \text{ km} = 3\,389\,000 \text{ m}$$

$$T = 24 \text{ h } 37 \text{ min } 23 \text{ s} = 88\,643 \text{ s}$$

$$g_{0^\circ} = 3,711 \text{ m s}^{-2}$$

$$\varphi = 47^\circ$$

$$a_\varphi = ?$$

$$a_{90^\circ} = ?$$

Težina tijela na φ širine jednaka je razlici gravitacijske sile i centrifugalne.

$$ma_\varphi = \frac{mGM}{r^2} - \frac{mv_\varphi^2}{r} \quad 1 \text{ bod}$$

$$a_\varphi = \frac{GM}{r^2} - \frac{v_\varphi^2}{r} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$a_\varphi = \frac{GM}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \cos\varphi \quad 1 \text{ bod}$$

Zbog zanemarivanja spljoštenosti Marsa gravitacijsko ubrzanje jednako je na svim širinama.

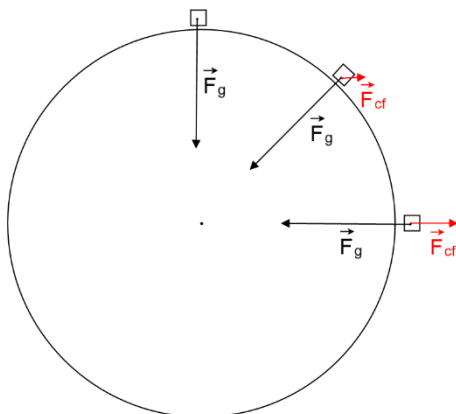
$$a_\varphi = g_{0^\circ} - \frac{4\pi^2 r}{T^2} \cos\varphi \quad 1 \text{ bod}$$

Kako na polu nema utjecaja centrifugalnog ubrzanja ubrzanje slobodnog pada jednako je gravitacijskom ubrzanju.

$$a_{90^\circ} = g_{0^\circ} = 3,711 \text{ m s}^{-2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$a_\varphi = a_{90^\circ} - \frac{4\pi^2 r}{T^2} \cos\varphi \quad 1 \text{ bod}$$

$$a_\varphi = 3,711 \text{ m s}^{-2} - \frac{4\pi^2 \cdot 3\,389\,000 \text{ m}}{(88\,643 \text{ s})^2} \cos 47^\circ = 3,699 \text{ m s}^{-2} \quad 1 \text{ bod}$$

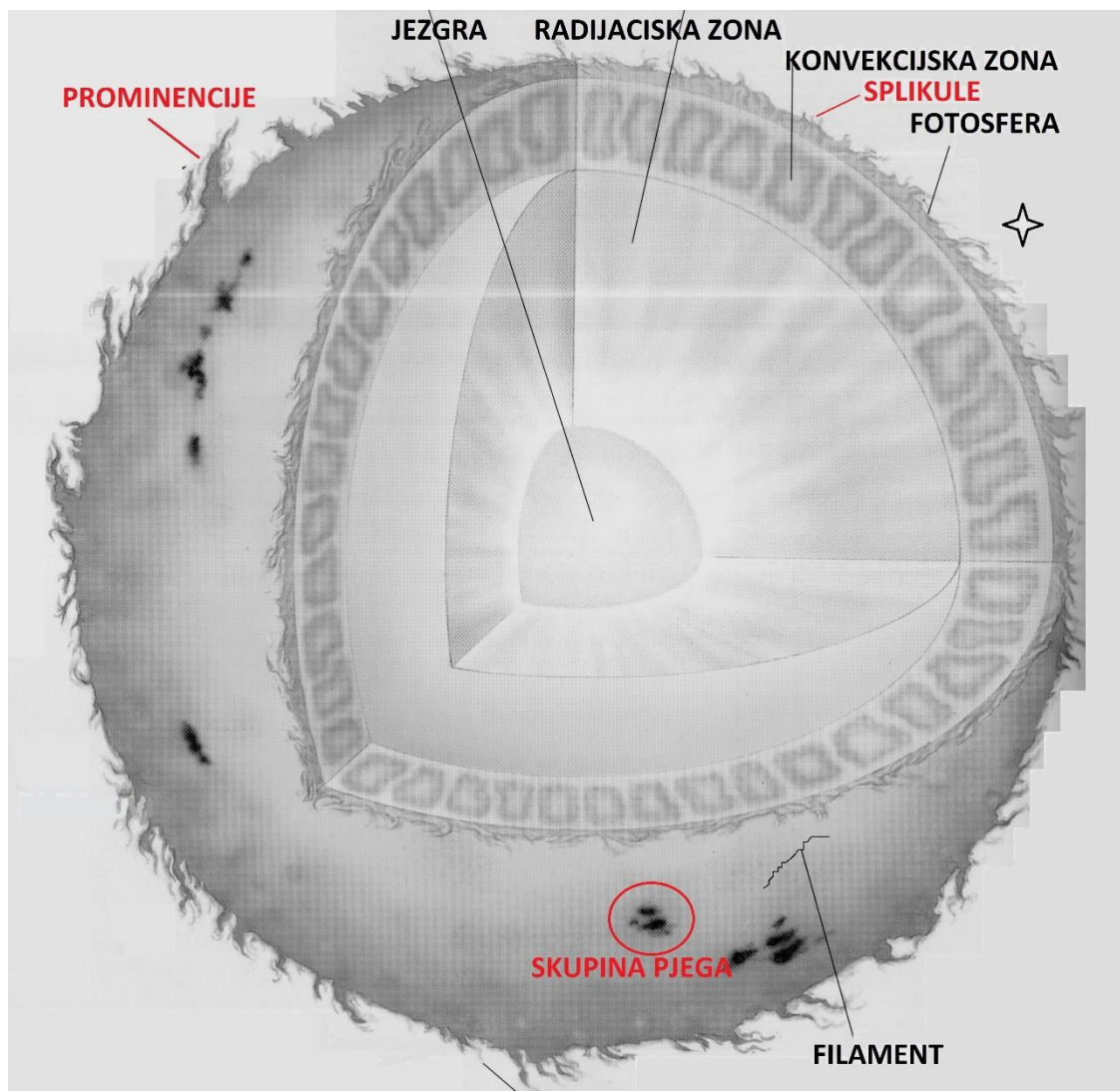


Skica za pojedini položaj je 2 boda (jedan bod za ispravno usmjerenu gravitacijsku silu, jedan bod za ispravno usmjerenu centrifugalnu silu).

Ukupno 6 bodova.

Prihvataju se i alternativna rješenja koja vode do istog ili približnog rezultata.

3. Na slici na predviđena mjesta upiši jezgra, radijacijska zona, konvekcijska zona, fotosfera.
Na slici označi i imenuj spikule, prominenciju, skupinu pjega.
Na sliku ucrtaj i imenuj filamente.



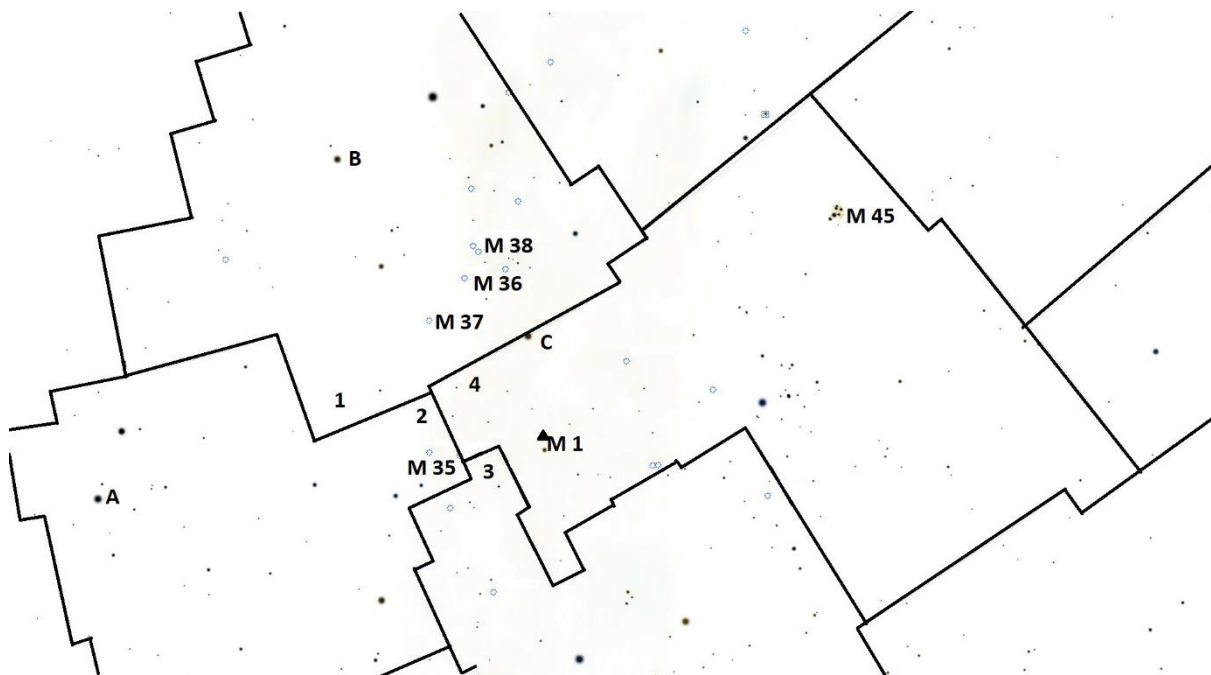
Ucrtavanje i imenovanje filameta dva boda. Filament može biti bilo gdje na površini kao nepravilna crta.

Ispravno označavanje spikule (spikule su znatno niže od prominencija), grupe pjega i prominencije po jedan bod, ukupno 3 boda. Za grupu pjega može biti bilo koja skupina pjega.

Upisivanje na ispravna mjesta jezgra, radijacijska zona, konvekcijska zona i fotosfera po jedan i pol bod, ukupno 6 boda.

4. Na priloženoj karti neba po potrebu ucrtaj objekt i označi Meissierovom oznakom M 1, M 35, M 36, M 37, M 38 i M 45. Desno pokraj zvijezde Poluks stavi oznaku A, pokraj Melkalinan oznaku B, pokraj Alnath oznaku C. Dolje navedenim brojevima pridruži imena zvijezda koja su označena na karti neba.

13



- 1 – KOČIJAŠ
2 – BLIZANCI
3 – BIK
4 – ORION

Svaki ispravno riješeni pojam po 1 bod. Ukupno 13 bodova