

**Rješenja za državno natjecanje iz astronomije u školskoj godini 2023./2024. za
2. razred srednje**

15	
----	--

1. Udaljenost je između središta dvaju zvijezda $10 R$. Polumjer je manje zvijezde $R = 7 * 10^8$ km, a masa $M = 2 * 10^{30}$ kg. Polumjer je veće zvijezde dvostruko veći od polumjera manje zvijezde, a masa veće zvijezde 16 je puta veća od mase manje zvijezde.

A) Na kojoj se udaljenosti x od središta manje zvijezde se gravitacijske sile veće i manje zvijezde izjednačavaju?

Na udaljenosti x od središta manje zvijezde gravitacijske sile veće i manje zvijezde izjednačavaju tako da vrijedi:

$$G \frac{Mm}{x^2} = G \frac{16Mm}{(10R-x)^2} \quad (2 \text{ bod})$$

$$x = 2R \quad (1 \text{ bod})$$

$$x = 2 * 7 * 10^8 \text{ km}$$

$$x = 14 * 10^8 \text{ km} \quad (1 \text{ bod})$$

B) Napiši i do kraja sredi izraz za ukupnu energiju tvari mase m koja miruje na udaljenosti x od središta manje zvijezde te izraz za ukupnu energiju tvari mase m i brzine v koja se nalazi na površini veće zvijezde.

Ukupna energija tvari dok je na većoj zvijezdi:

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - G \frac{16Mm}{2R} - G \frac{Mm}{10R-2R} \quad (2 \text{ bod})$$

$$E_0 = \frac{mv^2}{2} - G \frac{65Mm}{8R} \quad (1 \text{ bod})$$

Ukupna energija tvari mase m kad se nalazi na udaljenosti x od manje zvijezde:

$$E_1 = 0 - G \frac{16Mm}{10R-2R} - G \frac{Mm}{2R} \quad (2 \text{ bod})$$

$$E_1 = - G \frac{20Mm}{8R}$$

$$E_1 = - G \frac{5Mm}{2R} \quad (1 \text{ bod})$$

C) Kolika je minimalna brzina v kojom treba izbaciti tvar mase m s površine veće zvijezde da bi dosegla do površine manje zvijezde? Zanimari gibanje zvijezda u odnosu na njihovo zajedničko središte mase. $G = 6,6743 * 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Zakon očuvanja energije:

$$E_0 = E_1 \quad (2 \text{ bod})$$

$$\frac{mv^2}{2} = G \frac{65Mm}{8R} - G \frac{20Mm}{8R} = G \frac{45Mm}{8R} \quad (1 \text{ bod})$$

$$v = \sqrt{\frac{45GM}{4R}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$v = \sqrt{\frac{45 \cdot 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{4 \cdot 7 \cdot 10^{11} \text{ m}}} = 46317,5 \text{ m/s} \quad (1 \text{ bod})$$

10	
----	--

2. Zvijezda u donjoj kulminaciji ima visinu $h_d = 20^\circ$, a u gornjoj kulminaciji $h_g = 50^\circ$. Kolika je deklinacija ove zvijezde? Na kojoj se geografskoj širini nalazi opažač?

A) Zadatak riješi uz pretpostavku da je zvijezda u trenutku gornje kulminacije južno od zenita

Kombiniramo jednačbe za zenitnu udaljenost (visinu) u gornjoj i donjoj kulminaciji uz pretpostavku gornje kulminacije južno od zenita

$$90^\circ - h_g = \rho - \delta \quad (1 \text{ bod})$$

$$90^\circ - h_d = 180^\circ - (\rho + \delta) \quad (1 \text{ bod})$$

$$40^\circ = \rho - \delta$$

$$-110^\circ = -\rho - \delta$$

$$75^\circ = \rho \quad (1 \text{ bod})$$

$$35^\circ = \delta \quad (1 \text{ bod})$$

B) Zadatak riješi uz pretpostavku da je zvijezda u trenutku gornje kulminacije sjeverno od zenita.

$$90^\circ - h_g = \delta - \rho \quad (1 \text{ bod})$$

$$90^\circ - h_d = 180^\circ - (\rho + \delta) \quad (1 \text{ bod})$$

$$40^\circ = \delta - \rho$$

$$110^\circ = \rho + \delta$$

$$75^\circ = \delta \quad (1 \text{ bod})$$

$$35^\circ = \rho \quad (1 \text{ bod})$$

C) Koliki je satni kut H i koliko iznosi zvjezdano vrijeme s kad je zvijezda u gornjoj i donjoj kulminaciji uz pretpostavku da je rektascenzija α .

Kad je zvijezda u gornjoj kulminaciji satni kut $H = 0$ i tada vrijedi $s = \alpha$ (1 bod)

Kad je zvijezda u donjoj kulminaciji satni kut $H = 12$ i dana vrijedi $s = \alpha + 12$ (1 bod)

Napomena: priznati i alternativne načine rješavanja

3. A) Još 1884. godine H. Helmholtz razmatrao je gravitacijsku kontrakciju kao model izvora zvjezdane energije. U ovome modelu gravitacijska potencijalna energija prelazi u toplinu koja prouzrokuje sjaj zvijezda. Gravitacijsku potencijalnu energiju zvijezde možemo izračunati s pomoću sljedećega izraza: $\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}$, pri čemu je G gravitacijska konstanta, M masa zvijezde, a R radijus zvijezde. Veličina koja kvantificira količinu energije koju pojedina zvijezda gubi u jedinici vremena naziva se luminozitet ili snaga zračenja i izražava se u Wattima. Uz pretpostavku da je gravitacijska kontrakcija jedini izvor energije Sunca, koliki bi bio Sunčev maksimalni vijek izražen u godinama? $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, $M = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $R = 696\,340 \text{ km}$ i $L = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

$$E = \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}$$

$$E = \frac{3}{5} 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2} \frac{(1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg})^2}{696340000 \text{ m}}$$

$$E = 2,28 \cdot 10^{41} \text{ J} \quad (1 \text{ bod})$$

$$t = \frac{E}{L} \quad (2 \text{ bod})$$

$$t = \frac{2,28 \cdot 10^{41} \text{ J}}{3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$t = 1,9 \cdot 10^7 \text{ god} \quad (1 \text{ bod})$$

B) Drugi je model izvora zvjezdane energije baziran na termonuklearnim reakcijama – sintezi elementa tj. nuklearnoj fuziji. U jezgri Sunca se konstantno se odvija tzv. *p-p proces* u kojemu dolazi do izgaranja vodika u helij. U jednom od koraka *p-p procesa* odvija se sljedeća termonuklearna reakcija: ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2 {}^1\text{H}$. Izračunaj razliku u masi između produkata i reaktanata. Na temelju izračunane razlike u masi s pomoću $E = mc^2$ relacije izračunaj energiju oslobođenu u ovome koraku *p-p procesa*. Atomska masa izotopa vodika ${}^1\text{H}$ je 1,0073 Da, izotopa helija ${}^4\text{He}$ 4,0026 Da i izotopa helija ${}^3\text{He}$ 3,0160 Da. Jedan Dalton (Da) iznosi $1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

$$\Delta m = m_{\text{produkti}} - m_{\text{reaktanti}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\Delta m = (4,0026 \text{ Da} + 2 \cdot 1,0073 \text{ Da}) - (2 \cdot 3,0160 \text{ Da})$$

$$\Delta m = -0,15 \text{ Da}$$

$$\Delta m = -0,15 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\Delta m = -2,5 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \quad (1 \text{ bod})$$

$$E = 2,5 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2$$

$$E = 2,25 \cdot 10^{-12} \text{ J} \quad (1 \text{ bod})$$

C) Ako znamo da je u preostalim fazama *p-p procesa* oslobođena još polovica od energije izračunate u podzadatku B) i da na Suncu ima dovoljno vodika za približno $4,4 \cdot 10^{56}$ takvih *p-p procesa*, odredi predviđeni vijek Sunca na temelju ukupne oslobođene energije u *p-p procesu*?

$$E_{\text{uk}} = 4,4 \cdot 10^{56} \cdot (2,25 \cdot 10^{-12} \text{ J} + \frac{1}{2} \cdot 2,25 \cdot 10^{-12} \text{ J}) \quad (1 \text{ bod})$$

$$E_{\text{uk}} = 1,485 \cdot 10^{45} \text{ J} \quad (1 \text{ bod})$$

$$t = \frac{E_{\text{uk}}}{L} \quad (1 \text{ bod})$$

$$t = \frac{1,485 \cdot 10^{45} \text{ J}}{3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}}$$

$$t = 3.907894737 \cdot 10^{18} \text{ s}$$

$$t = 1,24 \cdot 10^{11} \text{ god}$$

(1 bod)

D) S obzirom na dobivene rezultate koji model, gravitacijsku kontrakciju ili nuklearnu fuziju smatraš realističnijim izvorom Sunčeve energije i zašto?

Model termonuklearnih reakcija/model nuklearne fuzije.

(1 bod)

Znamo da je Zemlja, pa i Sunce starije od 19 milijuna godina

(1 bod)

4. Komet se u afelu na stazi oko Sunca nalazi na udaljenosti od 30 AJ, a u perihelu na udaljenosti 2 AJ. Koliki je period obilaska kometa oko Sunca i kolika je površina iskazana u AJ^2 koju radij-vektor Sunce-komet opiše u jednoj godini (površina elipse dana je formulom $S=ab\pi$, gdje je a velika poluos elipse, a b mala poluos elipse).

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \quad (1 \text{ bod})$$

$$a = 16 \text{ AJ} \quad (1 \text{ bod})$$

Period iz trećeg Keplera:

$$T = \sqrt{a^3} \quad (1 \text{ bod})$$

$$T = 64 \text{ god} \quad (1 \text{ bod})$$

Linearni ekscentricitet:

$$c = a - r_p \quad (1 \text{ bod})$$

$$c = 14 \text{ AJ} \quad (1 \text{ bod})$$

Mala poluos:

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad (1 \text{ bod})$$

$$b = 7,75 \text{ AJ} \quad (1 \text{ bod})$$

Površina elipse:

$$S = ab\pi = 389,56 \text{ AJ}^2 \quad (1 \text{ bod})$$

$$S_{\text{god}} = S/T = 6,09 \text{ AJ}^2/\text{god} \quad (1 \text{ bod})$$