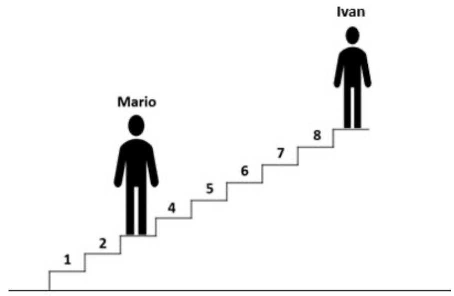
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

4. razred – rješenja

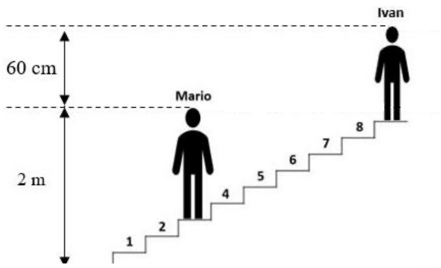
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Mario stoji na trećoj stepenici (brojeći od dna stepeništa) i tada je njegova visina zajedno sa stepenicama jednaka 2 m. Ivan, koji je 30 cm niži od Marija, stoji na devetoj stepenici (brojeći od dna stepeništa) i tada je njegova visina zajedno sa stepenicama jednaka 2 m i 60 cm. Koliko je visok Mario, a koliko je visok Ivan ako su sve stepenice iste visine?

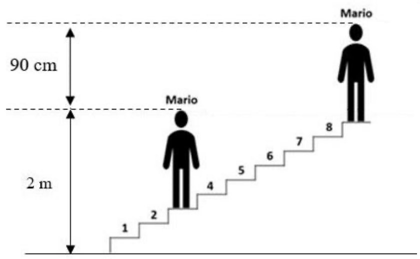


Rješenje.

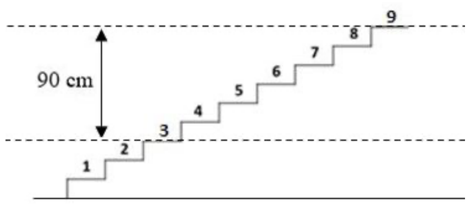
Razlika u visinama Marija i Ivana sad je 60 cm. 1 BOD



Kad bi Mario stajao na Ivanovom mjestu, tj. na devetoj stepenici, razlika bi bila za 30 cm veća jer je Mario 30 cm viši od Ivana. 2 BODA



To znači da je visina šest stepenica koje su između treće i devete stepenice jednaka 90 cm. 2 BODA



Svaka stepenica visoka je 90 cm : 6 = 15 cm. 1 BOD

Mario stoji na trećoj stepenici pa je njegova visina za $3 \cdot 15$ cm manja od 2 m, to jest od 200 cm, 2 BODA

što znači da je Marijeva visina 200 – 45 = 155 cm. 1 BOD

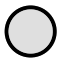
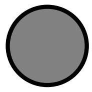
Ivan je za 30 cm niži od Marija pa mu je visina 155 – 30 = 125 cm. 1 BOD

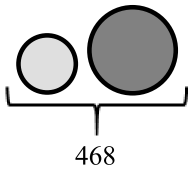
Napomena. Umjesto situacije kada bi Mario bio na Ivanovom mjestu, može se promatrati situaciju kada bi Ivan bio na Marijevom mjestu, tj. na trećoj stepenici, a zadatak se boduje analogno.

…...…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

2. Tvornica proizvodi bicikle i romobile. U siječnju je proizvela ukupno 468 vozila. Sljedeći je mjesec proizvedeno dva puta više bicikala i šest puta više romobila nego u siječnju, tako da je u veljači ukupno proizvedeno 2024 tih vozila. Koliko je bicikala, a koliko romobila proizvedeno u siječnju?

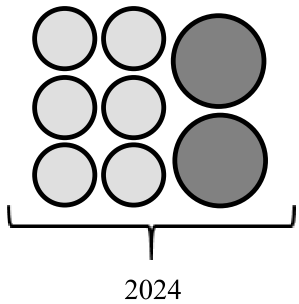
Prvo rješenje.

Ako je  broj proizvedenih romobila, a  broj proizvedenih bicikala u siječnju, onda vrijedi

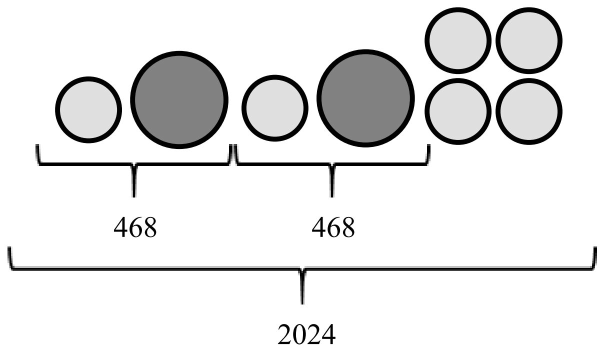


1 BOD

U veljači vrijedi



1 BOD



2 BODA

$2024 - 2 \cdot 468 = 1088$ 2 BODA

To znači da je proizvedenih romobila u siječnju $1088 : 4 = 272$, a 2 BODA

broj proizvedenih bicikala u siječnju $468 - 272 = 196$. 2 BODA

Napomena. Umjesto crtežima učenici mogu do rješenja doći opisivanjem navedenih koraka ili algebarskim zapisom pomoću jednadžbi, a bodovanje se vrši analogno prijedlogu.
…....………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje. Ako je u siječnju bio proizveden isti broj bicikala i romobila, tj. po 234, onda bi u veljači bilo proizvedeno $2 \cdot 234 + 6 \cdot 234 = 1872$ vozila. 1 BOD

Budući da je u veljači proizvedeno 2024 vozila, tj. $2024 - 1872 = 152$ vozila više, zaključujemo da je u siječnju proizvedeno više romobila nego bicikala. 2 BODA

Ako za 1 smanjimo broj bicikala, te povećamo broj romobila za 1, u veljači ćemo smanjiti broj bicikala za 2, a broj romobila povećati za 6. Dakle, ukupan broj vozila proizvedenih u veljači se poveća za 4. 3 BODA

Budući da želimo da se broj vozila u veljači poveća za 152, broj bicikala proizvedenih u siječnju treba smanjiti za $152 : 4 = 38$. 2 BODA

U siječnju je proizvedeno $234 - 38 = 196$ bicikala, te $234 + 38 = 272$ romobila. 2 BODA

Napomena. Analogno se boduju rješenja koja kreću od bilo koje druge raspodjele bicikala i romobila proizvedenih u siječnju.
…....……………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje. Ako je u siječnju bio proizveden isti broj bicikala i romobila, tj. po 234, onda bi u veljači bilo proizvedeno $2 \cdot 234 + 6 \cdot 234 = 1872$ vozila. 1 BOD
Budući da je u veljači proizvedeno 2024 vozila, a vrijedi $2024 > 1872$, zaključujemo da je u siječnju proizvedeno više romobila nego bicikala. 2 BODA

Krećemo od 234 bicikala i 234 romobila, uzastopno se približavamo rješenju povećavajući broj romobila, tako da je ukupan broj proizvedenih vozila u siječnju 468.

Broj bicikala u siječnju	Broj romobila u siječnju	Broj vozila u veljači
218	250	$2 \cdot 218 + 6 \cdot 250 = 1936$
198	270	$2 \cdot 198 + 6 \cdot 270 = 2016$
196	272	$2 \cdot 196 + 6 \cdot 272 = 2024$

Zaključujemo da se u veljači može proizvesti 2024 vozila ako je u siječnju proizvedeno 272 romobila i 196 bicikala. 6 BODOVA

Ako bismo dodatno povećali broj romobila u siječnju, ukupan broj vozila u veljači bi se također povećao, pa ne postoje druga rješenja. 1 BOD

Napomena 1. Broj pokušaja u tablici prije zapisivanja rješenja ne mora nužno biti četiri. Učenik može već u prvom smanjivanju broja bicikala i povećavanju broja romobila doći do rješenja. Ili, ako učenik ne kreće od istog broja bicikala i romobila, mora primjerima pokazati kako promjena u broju pojedinih vozila utječe na ukupan broj proizvedenih vozila u veljači te metodom uzastopnog približavanja dolazi do rješenja. Takvi se pristupi jednako boduju kao i u prijedlogu. No, ako ne obrazloži zašto je to jedino rješenje treba dobiti 9 BODOVA.

Napomena 2. Učenik koji samo zapiše točno rješenje bez ikakvih komentara i primjera te ne obrazloži zašto je to jedino rješenje može dobiti najviše 6 BODOVA.
…....……………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

3. Na koliko različitih načina četiri prijateljice Ankica, Gorana, Ivana i Melita mogu međusobno podijeliti 11 jednakih fritula tako da svaka dobije barem dvije? Fritule se ne smije rezati na manje dijelove.

Prvo rješenje.
Kako svaka prijateljica dobiva najmanje dvije fritule, broj fritula koji ostaje nakon te podjele je $11 - 4 \cdot 2 = 3$. 1 BOD

Te tri preostale fritule možemo rasporediti tako da ih dobiva jedna prijateljica, da ih podijele dvije prijateljice ili ih dijele tri prijateljice.

1) Tri prijateljice dobiju po 2 fritule, a jedna od njih $2 + 3 = 5$ fritula. 1 BOD

To mogu napraviti na četiri različita načina:

Ankica	Gorana	Ivana	Melita
5	2	2	2
2	5	2	2
2	2	5	2
2	2	2	5

1 BOD

2) Dvije prijateljice dobiju po dvije fritule, jedna dobije $2 + 1 = 3$ fritule, a jedna dobije $2 + 2 = 4$ fritule. 1 BOD

To mogu napraviti na dvanaest različitih načina:

Ankica	Gorana	Ivana	Melita
2	2	3	4
2	2	4	3
2	3	2	4
2	3	4	2
2	4	2	3
2	4	3	2
3	2	2	4
3	2	4	2
3	4	2	2
4	2	2	3
4	2	3	2
4	3	2	2

3 BODA

3) Jedna prijateljica dobiva dvije fritule, a ostale tri po $2 + 1 = 3$ fritule. 1 BOD

Takvu podjelu mogu napraviti na četiri različita načina.

Ankica	Gorana	Ivana	Melita
3	3	3	2
3	3	2	3
3	2	3	3
2	3	3	3

1 BOD

Ukupno ima 4 + 12 + 4 = 20 različitih načina koji zadovoljavaju uvjete zadatka. 1 BOD

Napomena: Za svake četiri točno zapisane podjele dobije se 1 bod. To znači da ukoliko učenik ispiše sve mogućnosti i navede da ih je 20, ali ne zapiše obrazloženje zašto ih nema više, najviše dobije 6 BODOVA.

…………………………………………………………………..…….... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Kako svaka prijateljica dobiva najmanje dvije fritule, broj fritula koji ostaje nakon te podjele je $11 - 4 \cdot 2 = 3$. 1 BOD

Te tri preostale fritule možemo rasporediti tako da ih dobiva jedna prijateljica, da ih podijele dvije prijateljice ili ih dijele tri prijateljice.

1) Jednu prijateljicu koja dobiva tri dodatne fritule možemo odabrati na četiri različita načina pa za takvu podjelu fritula imamo četiri različite mogućnosti. 2 BODA

2) Ako te tri fritule dijele dvije prijateljice, onda jedna od njih ima tri, a druga četiri fritule. Preostale dvije prijateljice imaju po dvije fritule. 1 BOD

Najprije odaberimo jednu od njih koja dobiva četiri fritule i nju možemo izabrati na četiri različita načina. 1 BOD

Potom odabiremo drugu (od preostale tri) koja dobiva tri fritule i nju možemo izabrati na tri različita načina. 1 BOD

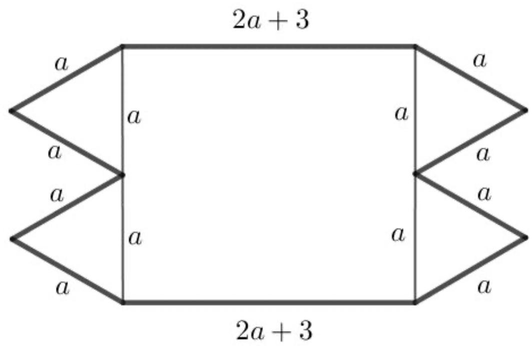
Preostale dvije prijateljice ne biramo jer obje dobiju po dvije fritule. U ovom slučaju imamo ukupno $4 \cdot 3 = 12$ različitih načina. 1 BOD

3) Ako te tri fritule podijele tri prijateljice, onda četvrta dobiva dvije.
Tu jednu koja dobiva dvije fritule možemo odabrati na četiri različita načina pa i tu imamo četiri mogućnosti. 2 BODA
Ukupno ima 4 + 4 + 12 = 20 različita načina. 1 BOD

…………………………………………………………………..…….... UKUPNO 10 BODOVA

4. Lea je nacrtala pravokutnik kojemu je jedna stranica dulja od druge za 3 cm. Nakon toga je nad obje kraće stranice pravokutnika nacrtala po dva jednakostranična trokuta takva da su im stranice jednako duge, kao na slici. Ako je opseg dobivenog lika 78 cm, koliki je opseg pravokutnika?

Rješenje.
Neka je stranica jednakostraničnog trokuta duljine a izraženo u centimetrima.



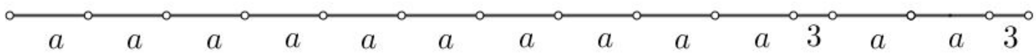
Tada je duljina kraće stranice pravokutnika $a + a = 2a$.

Onda je duljina dulje stranice pravokutnika $2a + 3$.

3 BODA

Opseg lika na slici jednak je duljini njegova ruba, to jest zbroju duljina njegovih stranica.

Osam dužina kojima je lik omeđen stranice su jednakostraničnih trokuta i duljina im je a. Preostale dvije dužine kojima je lik omeđen dulje su stranice pravokutnika i duljina im je $2a + 3$. Rub tog lika može se presložiti u dužinu na sljedeći način:



To znači da je opseg tog lika $12a + 6$. 2 BODA

Sada vrijedi:

$12a + 6 = 78$

$12a = 72$

$a = 6$ cm. 2 BODA

Kraća stranica pravokutnika ima duljinu $6 + 6 = 12$ cm, a dulja $12 + 3 = 15$ cm. 1 BOD

Opseg pravokutnika je $2 \cdot (12 + 15) = 2 \cdot 27 = 54$ cm. 2 BODA

………………………………………………………………………..……..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Pas Ari promatra buhe koje s istog mjesta skaču ravno prema njemu. Neke su buhe veće, a neke manje. Kad veća buha napravi 7 jednakih skokova, do Arija joj nedostaje 3 cm. Kad manja buha napravi 10 jednakih skokova, do Arija joj nedostaje 1 cm. Duljina svakog skoka u centimetrima prirodni je broj. Ako su na početku buhe od Arija udaljene više od 2 m, kolika je najmanja moguća duljina skoka manjih buha?

Prvo rješenje.
Buhe se nalaze na mjestu koje je od Arija udaljeno više od 2 m = 200 cm. 1 BOD
Odredimo koji sve brojevi mogu biti udaljenosti manjih buha od Arija, odnosno udaljenosti većih buha od Arija.

Udaljenost manjih buha od Arija je broj koji dobijemo tako da višekratniku broja 10 dodamo broj 1 (tj. broj koji daje ostatak 1 pri dijeljenju s 10). 1 BOD
Budući da je 200 višekratnik broja 10, sljedeći su višekratnici 210, 220, 230, 240, 250, …
Udaljenosti većih buha od Arija mogu biti brojevi: 201, 211, 221, 231, 241, 251, ... 2 BODA
Udaljenost većih buha od Arija je broj koji dobijemo tako da višekratniku broja 7 dodamo broj 3 (tj. koji daje ostatak 3 pri dijeljenju sa 7). 1 BOD
200 : 7 = 28 i ostatak 4
Prvi višekratnik broja 7 veći od 200 je 203, a sljedeći su 210, 217, 224, 231, 238, 245, …
Udaljenosti većih buha od Arija mogu biti brojevi: 206, 213, 220, 227, 234, 241, 248, ...
2 BODA
Kako buhe skaču s istoga mjesta, tražimo najmanji broj koji može biti i udaljenost manjih i udaljenost većih buha od Arija. 1 BOD
To je broj 241, pa duljina skoka manjih buha iznosi
(241 – 1) : 10 = 24 cm 2 BODA
……………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Buhe su od Arija udaljene više od 2 m = 200 cm. 1 BOD

200 : 7 = 28 i ostatak 4.

$7 \cdot 28 + 3 = 199$ što je manje od 200 pa je najmanja moguća duljina skoka većih buha 29 cm.
2 BODA

Neka je duljina skoka većih buha v, a duljina skoka manjih m izraženo u centimetrima.

Udaljenost buha od Arija $7 \cdot v + 3$. 1 BOD

Izračunajmo moguće udaljenosti za $v > 28$.

Kako je udaljenost buha od Arija jednaka i $10 \cdot m + 1$, dobivene udaljenosti umanjimo za 1 i razliku podijelimo s 10.

Tražena duljina skoka manjih buha m je prvi u nizu količnika bez ostatka pri dijeljenju s 10.

<table>
<tr><td>$v = 29$</td><td>$7 \cdot 29 + 3 = 206$
$206 - 1 = 205$
205 nije višekratnik broja 10.</td><td>$v = 30$</td><td>$7 \cdot 30 + 3 = 213$
$213 - 1 = 212$
212 nije višekratnik broja 10.</td><td>$v = 31$</td><td>$7 \cdot 31 + 3 = 220$
$220 - 1 = 219$
219 nije višekratnik broja 10.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 BOD</td><td colspan="2">1 BOD</td><td colspan="2">1 BOD</td></tr>
<tr><td>$v = 32$</td><td>$7 \cdot 32 + 3 = 227$
$227 - 1 = 226$
226 nije višekratnik broja 10.</td><td>$v = 33$</td><td>$7 \cdot 33 + 3 = 234$
$234 - 1 = 233$
233 nije višekratnik broja 10.</td><td>$v = 34$</td><td>$7 \cdot 34 + 3 = 241$
$241 - 1 = 240$
$240 : 10 = 24$
m = 24 cm</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 BOD</td><td colspan="2">1 BOD</td><td colspan="2">1 BOD</td></tr>
</table>

Napomena: Ako učenici ne obrazlože zašto kreću od broja 29, moraju ispitati sve mogućnosti za vrijednost v od 1 do 28 i za to dobivaju 2 BODA.
….……………………….…….…………….……………………….……….…..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Andrija je tijekom tri dana čitao knjigu. Dok je čitao, brzina mu je čitanja bila stalna. Prvoga dana je proveo $\frac{1}{32}$ dana čitajući, a svaki sljedeći dan trećinu vremena manje nego prethodnoga dana. Koliki dio knjige, izražen u postotcima, Andrija još treba pročitati ako mu za čitanje cijele knjige treba 1 sat i 40 minuta?

Rješenje.
1 dan ima 24 sata ili $24 \cdot 60 = 1440$ minuta. 1 BOD
Andrija je prvoga dana proveo čitajući $\frac{1}{32}$ dana, odnosno $1440 : 32 = 45$ minuta. 1 BOD
Jedna trećina od 45 je 15, pa je drugoga dana proveo čitajući $45 - 15 = 30$ minuta. 2 BODA
Jedna trećina od 30 je 10, pa je trećega dana proveo čitajući $30 - 10 = 20$ minuta. 2 BODA
Tijekom tri dana Andrija je proveo čitajući ukupno $45 + 30 + 20 = 95$ minuta. 1 BOD
Andriji je za čitanje cijele knjige potrebno 1 sat i 40 minuta, odnosno, $60 + 40 = 100$ minuta.
1 BOD
Kako bi pročitao cijelu knjigu, treba čitati još $100 - 95 = 5$ minuta. 1 BOD
Izraženo postotkom, to je $\frac{5}{100} = 5\ \%$. 1 BOD
Andrija treba pročitati još 5 % knjige.
………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

2. Zbroj svih četveroznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih s 45 kojima je znamenka desetica tri puta veća od znamenke stotica umanji za zbroj svih troznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih s 18 kojima je znamenka stotica najveći prosti jednoznamenkasti broj.

Rješenje.
Broj je djeljiv sa 45 ako je djeljiv s 9 i 5. Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, a s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5. 1 BOD
Kako je znamenka desetica tri puta veća od znamenke stotica, moguće su sljedeće kombinacije tih dviju znamenaka:
znamenka stotica 0, znamenka desetica 0
znamenka stotica 1, znamenka desetica 3
znamenka stotica 2, znamenka desetica 6
znamenka stotica 3, znamenka desetica 9 1 BOD
Znamenka jedinica traženih četveroznamenkastih brojeva može biti 0 ili 5.
Ako je znamenka jedinica 0, tada (zbog pravila o djeljivosti s 9) imamo sljedeća rješenja:
9000, 5130, 1260 i 6390. 1 BOD
Ako je znamenka jedinica 5, tada (zbog pravila o djeljivosti s 9) imamo sljedeća rješenja:
4005, 9135, 5265 i 1395. 1 BOD

Zbroj svih četveroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju traženo svojstvo iznosi:
$9000 + 5130 + 1260 + 6390 + 4005 + 9135 + 5265 + 1395 = 41580.$ 1 BOD

Broj je djeljiv s 18 ako je djeljiv s 9 i 2. Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, a s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Kako je znamenka stotica najveći jednoznamenkasti prosti broj, znamenka stotica je 7. 1 BOD
Zbog pravila o djeljivosti s 9 i 2 imamo sljedeća rješenja:
720, 702, 792, 774, 756 i 738. 1 BOD
Zbroj svih troznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju traženo svojstvo iznosi:
$720 + 702 + 792 + 774 + 756 + 738 = 4482.$ 1 BOD

Tražena razlika je $41580 - 4482 = 37098.$ 1 BOD
…....……………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Ako je učenik kod određivanja četveroznamekastih brojeva propustio uočiti da znamenke desetica i stotica mogu biti obje nula tj. izostavio je brojeve 9000 i 4005, zbroj je 28575, razlika 24093, zadatak bodovati s najviše 7 BODOVA.

3. Pet kutija imaju različite mase. Ako za svake dvije kutije izračunamo zbroj njihovih masa u kilogramima, dobivamo sljedećih 10 brojeva: 114, 85, 122, 74, 133, 118, 147, 99, 107 i 93. Kolika je masa svake od pet kutija?

Rješenje.
Neka su mase kutija a, b, c, d i e pri čemu je $a < b < c < d < e$.

Kada zbrajamo po dvije kutije, dobijemo ukupno 10 zbrojeva:

$a + b, a + c, a + d, a + e, b + c, b + d, b + e, c + d, c + e, d + e.$

Uočimo da se svaki broj pojavljuje u točno 4 zbroja.

Stoga je zbroj svih 10 zbrojeva $4 \cdot (a + b + c + d + e)$ 1 BOD

Zbroj svih deset zadanih brojeva iznosi

$114 + 85 + 122 + 74 + 133 + 118 + 147 + 99 + 107 + 93 = 1092.$ 1 BOD

Izjednačavanjem dobivenih zbrojeva imamo:

$4 \cdot (a + b + c + d + e) = 1092$

$a + b + c + d + e = 1092 : 4$

$a + b + c + d + e = 273.$

Dakle, zbroj svih 5 masa je 273 kg. 1 BOD

Najmanji zbroj dobijemo kada zbrojimo dva najmanja broja, a to su a i b. Najveći zbroj dobijemo kada zbrojimo dva najveća broja, a to su d i e. Dakle, najveće dvije mase imaju zbroj $d + e = 147$ kg, a najmanje dvije $a + b = 74$ kg. 1 BOD

Zbrajanjem jednakosti dobivamo $a + b + d + e = 221$, a kako je $a + b + c + d + e = 273$ slijedi da je $c = 273 - 221 = 52$. 1 BOD

Drugi po veličini zbroj dobijemo kada zbrojimo najmanji i treći po veličini, a to su a i c pa je $a + c = 85$ iz čega slijedi $a = 85 - 52 = 33$. 2 BODA

$a + b = 74$ pa je $b = 74 - 33 = 41$. 1 BOD

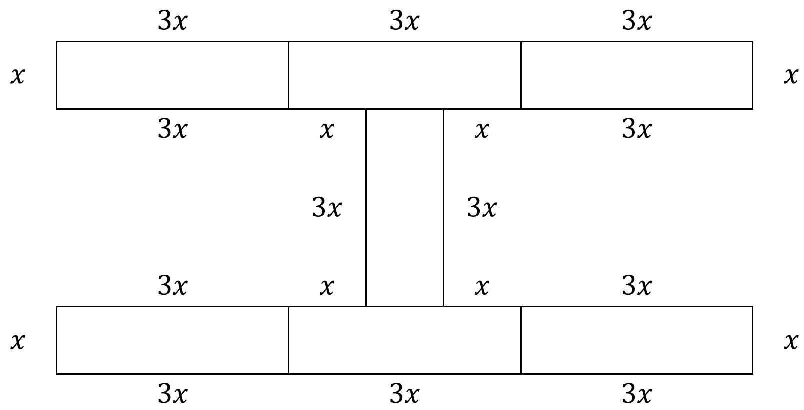
Predzadnji po veličini zbroj dobijemo kada zbrojimo najveći i treći po veličini, a to su c i e pa je $c + e = 133$ iz čega slijedi $e = 133 - 52 = 81$. 1 BOD

$d + e = 147$ pa je $d = 147 - 81 = 66$. 1 BOD

Mase kutija su: 33 kg, 41 kg, 52 kg, 66 kg i 81 kg.
…………………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

4. Sedam jednakih pravokutnih pločica složeno je kao na slici. Duljina jedne stranice pločice tri je puta veća od druge, a opseg je tako dobivenog lika 132 mm. Koliko se pravokutnika različitih opsega može složiti upotrebljavajući svih tih sedam pločica i koliko iznose njihovi opsezi?

Rješenje.
Duljine stranica pravokutne pločice označimo s x i $3x$. 1 BOD

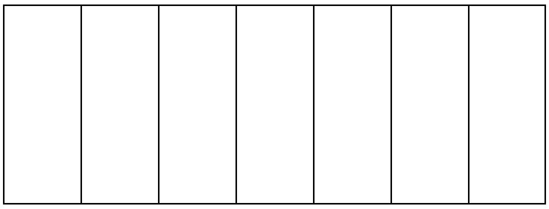


Sa slike imamo da je opseg lika $o = 12 \cdot 3x + 8x = 44x$. 1 BOD
$44x = 132$
$x = 132 : 44$
$x = 3$ 1 BOD
Duljine stranica pravokutne pločice su 3 mm i $3 \cdot 3 = 9$ mm. 1 BOD

1) Prvi pravokutnik

Pravokutnik ima stranice duljine 3 mm i $7 \cdot 9$ mm $= 63$ mm pa je njegov opseg
$o = 2(3 + 63) = 2 \cdot 66 = 132$ mm. 2 BODA

2) Drugi pravokutnik



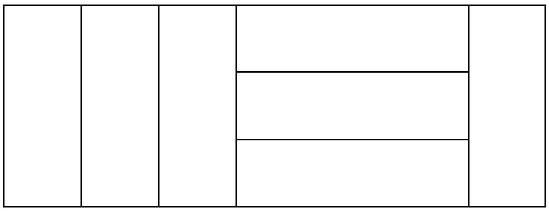
Pravokutnik ima stranice duljine 9 mm i $7 \cdot 3 = 21$ mm pa je njegov opseg
$o = 2(9 + 21) = 2 \cdot 30 = 60$ mm. 2 BODA

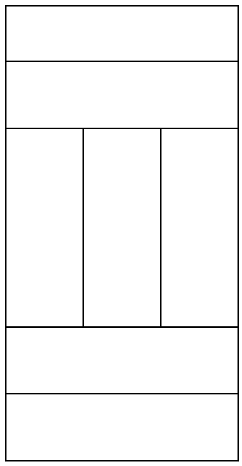
Svaka pločica sadrži 3 osnovna kvadrata (duljine stranica 3 mm) pa 7 pločica ima ukupno 21 osnovni kvadrat. Prvi pravokutnik ima 21 osnovni kvadrat u retku i 1 osnovni kvadrat u svakom stupcu. Drugi pravokutnik ima u svakom retku 7 osnovnih kvadrata, a u svakom stupcu 3. Svaki pravokutnik mora imati jednaki broj osnovnih kvadrata u svakom retku i stupcu. Kako 21 možemo u obliku umnoška napisati samo na dva različita načina ($21 = 1 \cdot 21$, $21 = 3 \cdot 7$) zaključujemo da postoje dva rješenja.

2 BODA

……………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Pravokutnik dimenzija 9 mm i 21 mm može se slaganjem pravokutnih pločica složiti na više različitih načina. Neki od načina slaganja prikazani su na slikama. Treba zaključiti da se radi o pravokutnicima jednakih dimenzija tj. opsega bez obzira na koji su način složeni.





5. Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva kojima su sve znamenke različite, a među kojima se znamenke 1 i 2 pojavljuju na susjednim dekadskim mjestima?

Rješenje.

Ako su znamenke 1 i 2 prve dvije znamenke, brojevi su oblika $\overline{12abc}$ ili $\overline{21abc}$. 1 BOD

Znamenku a možemo odabrati iz skupa $\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na 8 različitih načina, znamenku b na 7, a znamenku c na 6 pa imamo ukupno $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 672$ broja. 3 BODA

Ako su znamenke 1 i 2 na drugom i trećem mjestu, brojevi su oblika $\overline{d12ef}$ ili $\overline{d21ef}$. 1 BOD

Znamenku d možemo odabrati iz skupa $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na 7 različitih načina jer nula ne može biti prva, znamenku e također na 7 jer može biti i nula, a znamenku f na 6 pa imamo ukupno $2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 588$ brojeva. 3 BODA

Ako su znamenke 1 i 2 na trećem i četvrtom mjestu, odnosno na četvrtom i petom, također imamo 588 brojeva. 1 BOD

$672 + 3 \cdot 588 = 2436$

Ukupno ima 2436 brojeva. 1 BOD

…………………………………………………………………………………...... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

6. razred – rješenja

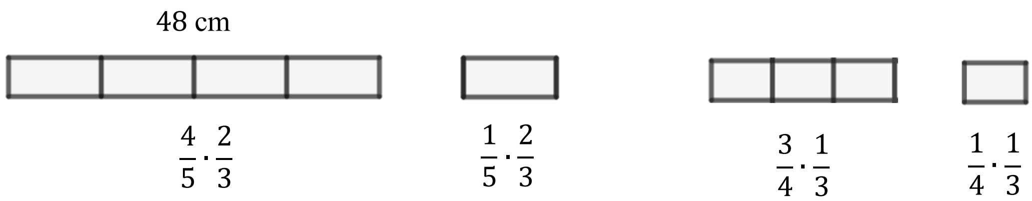
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Mesar jednu kobasicu reže na dijelove. Prvo je od cijele kobasice odsjekao njezinu trećinu. Dobivena dva dijela također je prerezao: od većega dijela odsjekao je njegovu petinu, a od manjega dijela odsjekao je njegovu četvrtinu. Kolika je duljina najmanjega dobivenoga dijela kobasice ako je duljina najvećeg dijela 48 cm?

Prvo rješenje.

Nakon prvog rezanja imamo dva dijela kobasice:

Nakon drugog rezanja imamo četiri dijela kobasice:



4 BODA (po 1 BOD za svaki dio)

Najveći dio čini $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$ cijele kobasice i ima duljinu 48 cm. 1 BOD

Duljina cijele kobasice iznosi $48:\frac{8}{15}=48\cdot\frac{15}{8}=90$ cm. 2 BODA

Najmanja dva dijela kobasice čine $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$ kobasice i $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ kobasice.

Vrijedi da je $\frac{2}{15}>\frac{1}{12}$ jer je $2\cdot 12>15\cdot 1$. 2 BODA

Najmanji dobiveni dio ima duljinu $\frac{1}{12}\cdot 90=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}=7.5$ cm. 1 BOD

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Dio kobasice dug 48 cm je četiri petine većeg dijela kobasice nakon prvog rezanja, te je 4 puta dulji od jedne petine tog većeg dijela. 2 BODA

Jedna petina većeg dijela je 48 cm : $4 = 12$ cm duljine. 2 BODA

Ukupna duljina većeg dijela nakon prvog rezanja je 48 cm $+ \ 12$ cm $=$ 60 cm. 1 BOD

Jedna trećina početne kobasice je dva puta kraća od većeg dijela nakon prvog rezanja. 2 BODA

Duljina kraćeg dijela nakon prvog rezanja je 60 cm $: \ 2 = 30$ cm. 1 BOD

Duljina najkraćeg dijela je jedna četvrtina od 30 cm, odnosno 30 cm : $4 = 7.5$ cm. 1 BOD

To je najmanji dio jer je sljedeći po veličini dio duljine 12 cm. 1 BOD

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.

Neka je x duljina jedne četvrtine manjeg dijela nakon prvog rezanja.

Duljina tog manjeg dijela je $4x$. 2 BODA

Duljina većeg dijela nakon prvog rezanja je $8x$, 2 BODA

a četiri petine od tog dijela je dio duljine 48 cm. 1 BOD

Vrijedi

$$\frac{4}{5} \cdot 8x = 48,$$

iz čega slijedi

$$x = 48 \ \cdot \frac{5}{32} = \frac{15}{2} = 7.5.$$ 2 BODA

Jedna petina većeg dijela nakon prvog rezanja kobasice je dio duljine $48 : 4 = 12$ cm. 2 BODA

Stoga je duljina najkraćeg dijela 7.5 cm,

a to je najmanji dio jer je sljedeći po veličini dio duljine 12 cm. 1 BOD

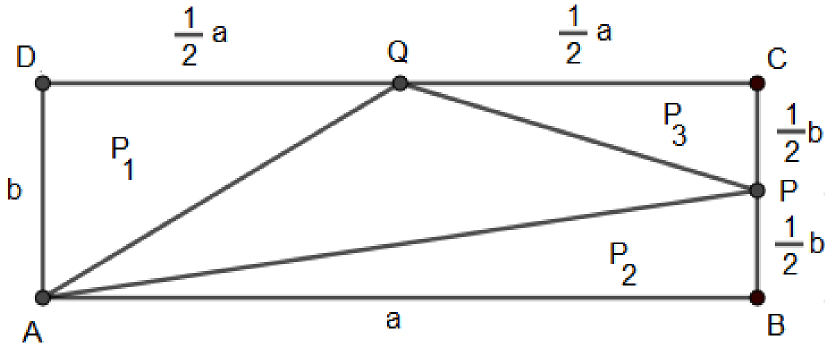
…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Rješenja učenika treba vrednovati prema jednom ponuđenom načinu bodovanja, tj. nije moguće zbrajati bodove iz različitih rješenja.

2. Neka su P i Q redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ pravokutnika $ABCD$. Koliki postotak površine pravokutnika $ABCD$ čini trokut APQ?

Rješenje.
Pola duljine a je $\frac{1}{2}a$.
Pola duljine b je $\frac{1}{2}b$.

Na skici su označena polovišta stranica pravokutnika i duljine $a, \frac{1}{2}a, b, \frac{1}{2}b$ te površine P_1, P_2 i P_3.



Skica: 2 BODA

Površina pravokutnika: $P_p = a \cdot b$.

Površina pravokutnog trokuta jednaka je polovini površine pravokutnika s istim duljinama stranica kao što su katete pravokutnog trokuta, pa slijedi:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{ab}{4}$$

1 BOD

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} b = \frac{ab}{4}$$

1 BOD

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} b = \frac{ab}{8}$$

1 BOD

Površina trokuta APQ dobije se kada od površine pravokutnika oduzmemo površine pravokutnih trokuta:

$$P_\Delta = ab - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{8} = \frac{8ab - 2ab - 2ab - ab}{8} = \frac{3ab}{8}.$$

3 BODA

Postotak površine trokuta od ukupne površine pravokutnika je

$P_\Delta : P_p \cdot 100 = \frac{3ab}{8} : ab \cdot 100 = \frac{3ab}{8} \cdot \frac{1}{ab} \cdot 100 = 300 : 8 = 37.5\ \%.$ 2 BODA

Umnožak ab možemo staviti u nazivnik i skratiti jer mora biti $a \neq 0, b \neq 0$. U protivnom pravokutnik ne bi postojao.

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3. Zbroj 2024 uzastopna parna cijela broja iznosi 1 171 896. Koji je najveći od tih brojeva?

Prvo rješenje.
Budući da se radi o uzastopnim parnim brojevima (razlika susjednih brojeva je konstantna), aritmetička sredina svih brojeva jednaka je aritmetičkoj sredini prvog i zadnjeg broja. 3 BODA

Aritmetička sredina svih brojeva je $1\,171\,896 : 2024 = 579$. 2 BODA

Neka je n traženi broj.

Tada je $n - 4046$ prvi od 2024 uzastopna parna cijela broja. 2 BODA

Vrijedi:

$$\frac{(n-4046)+n}{2} = 579$$

$n - 2023 = 579$ 2 BODA

$n = 579 + 2023 = 2602$ 1 BOD

………………………..…………………………………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Neka je $n + 2024$ traženi broj. 1 BOD

Tada je:

$$\underbrace{(n-2022)+\cdots+(n-4)+(n-2)+n+(n+2)+(n+4)+\cdots+(n+2022)+(n+2024)}_{2024\text{ pribrojnika}} =$$

$= 1\,171\,896$ 3 BODA

Nakon uklanjanja zagrada i poništavanja suprotnih brojeva dobijemo:

$2024n + 2024 = 1\,171\,896$ 3 BODA

$2024n = 1\,171\,896 - 2024$

$2024n = 1\,169\,872$ 1 BOD

$n = 1\,169\,872 : 2024$

$n = 578$ 1 BOD

Najveći među parnim cijelim brojevima koji daju zadani zbroj je
$n + 2024 = 578 + 2024 = 2602$. 1 BOD

…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.
Neka je n traženi broj.

Tada je:

$$\underbrace{n+(n-2)+(n-4)+(n-6)+\cdots+(n-4046)}_{2024\text{ pribrojnika}} = 1\,171\,896$$

2 BODA

$2024n - 0 - 2 - 4 - \cdots - 4046 = 1\,171\,896$ 1 BOD

Primijenimo Gaussovu dosjetku kako bismo izračunali zbroj:

$2024n - 2024 \cdot 4046 : 2 = 1\,171\,896$ 3 BODA

$2024n - 2024 \cdot 2023 = 1\,171\,896$ 1 BOD

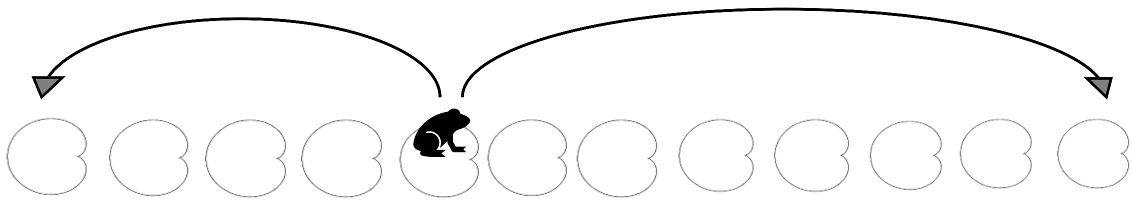
$2024 \cdot (n - 2023) = 1\,171\,896 \quad /: 2024$ 1 BOD

$n - 2023 = 579$ 1 BOD

$n = 579 + 2023 = 2602$ 1 BOD

………………………..………………………………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

4. Žaba skače po lopočima. Može skočiti 7 lopoča udesno ili 4 lopoča ulijevo. Koliki je najmanji broj skokova potreban da bi se žaba pomaknula za točno 2024 lopoča udesno?



Prvo rješenje.

Označimo s a broj skokova udesno i s b broj skokova ulijevo.

Tada je $7a - 4b = 2024$ za prirodne brojeve a i b, tj. 1 BOD

$7a = 2024 + 4b \; = \; 4 \cdot (506 + b)$, 3 BODA

pa 7 mora dijeliti $506 + b$. 1 BOD

Budući da 506 daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 7, b pri dijeljenju sa 7 mora davati ostatak 5. 2 BODA

Želimo što manji b i što manji a, pa uzimamo $b = 5$ i dobivamo $a = 292$. 2 BODA

Ukupno je potrebno najmanje $292 + 5 = 297$ skokova. 1 BOD

……………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Uočimo da nije važno kojim redom žaba izvrši skokove već samo koliko skokova učini ulijevo, a koliko udesno. 2 BODA

Pretpostavimo da žaba prvo skače ulijevo. Žaba mora prvo skakati ulijevo sve dok ukupan broj lopoča koje mora preskočiti udesno ne bude djeljiv sa 7. 2 BODA

Pri dijeljenju sa 7:
2024 daje ostatak 1,
2028 daje ostatak 5 (1 skok ulijevo),
2032 daje ostatak 2 (2 skoka ulijevo),
2036 daje ostatak 6 (3 skoka ulijevo),
2040 daje ostatak 3 (4 skoka ulijevo),
2044 je djeljiv sa 7 (5 skokova ulijevo). 3 BODA

Žaba nakon 5 skokova ulijevo treba napraviti još $2044 : 7 = 292$ skokova udesno. 2 BODA

Ukupno je potrebno najmanje $292 + 5 = 297$ skokova. 1 BOD

……………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.
Dijeljenjem zaključujemo da je 2024 : 7 = 289 i ostatak 1.
Dakle, žabi je potrebno više od 289 skokova da se pomakne za točno 2024 lopoča udesno.
Skačući 289 skokova udesno pomakne se za točno 2023 lopoča udesno. 2 BODA

Žaba se mora pomaknuti još jedan lopoč udesno.
Stoga će morati barem još jednom skočiti udesno za 7 lopoča, bez obzira skoči li prije toga neki broj puta ulijevo. Dakle, žaba će morati napraviti više od 290 skokova. 2 BODA

Budući da će sigurno imati barem 290 skokova udesno, žaba će se pomaknuti barem za 2030 lopoča udesno. Stoga će morati nekad napraviti i barem dva skoka ulijevo, te će ukupno napraviti više od 292 skokova. 2 BODA

Ako žaba napravi samo 290 skokova udesno i 2 skoka ulijevo naći će se na 2022. lopoču, te zaključujemo da se mora pomaknuti još dva lopoča udesno. Ponavljamo zaključivanje na sličan način: žaba će morati skočiti barem još jednom udesno i barem dva puta ulijevo (u nekom trenutku). Dakle, broj skokova je barem 295. 2 BODA

Ako napravi samo opisane skokove, žaba se nalazi na 2021. lopoču. Zato mora barem još jednom skočiti udesno (tada je na 2028. lopoču) i barem još jednom ulijevo, te tako dolazi na 2024. lopoč. Dakle, žaba zaista može doći do 2024. lopoča u 297 skokova i nije moguće doći u manje skokova. 2 BODA
………………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva u čijem zapisu nema nula i kojima je zbroj svih znamenka veći od njihova umnoška?

Rješenje. Poznato je da niti jedna znamenka traženog broja nije nula. Umnožak znamenki bit će manji ako među njima ima jedinica. Dokazat ćemo da traženi brojevi imaju barem tri jedinice.

Prvo, dokažimo da nema traženih brojeva kojima niti jedna znamenka nije jedinica.
U slučaju da niti jedna znamenka tog broja nije jedinica, najmanji bi se umnožak znamenki postizao za broj 22222, no tada je $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 > 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$, dakle umnožak znamenki je veći od njihovog zbroja.
Zbroj znamenki peteroznamenkastog broja može biti najviše $9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$. Povećamo li broju 22222 barem jednu znamenku za barem 1, umnožak znamenki će biti barem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$, što je više od najvećeg mogućeg zbroja znamenki.
Stoga barem jedna znamenka traženog peteroznamenkastog broja mora biti jedinica. 2 BODA

Drugo, pokažimo da nema traženih brojeva koji imaju točno jednu jedinicu. Najmanji umnožak se tada postiže s četiri dvojke i jednom jedinicom. U tom slučaju je umnožak 16, a zbroj 9, pa ta mogućnost otpada. Svakim povećanjem neke znamenke za 1 zbroj se uveća za 1, a umnožak za više od 1, pa takvih mogućnosti nema. 1 BOD

Treće, pokažimo da nema traženih brojeva koji imaju točno dvije jedinice. Najmanji umnožak se tada postiže s tri dvojke i dvije jedinice. U tom slučaju je i umnožak i zbroj jednak 8, pa ta mogućnost otpada. Svakim povećanjem neke znamenke za 1 zbroj se uveća za 1, a umnožak za više od 1, pa takvih mogućnosti nema. 1 BOD

Razmotrimo još slučajeve u kojima su barem tri znamenke traženog broja jedinice.

Broj jedinica	Traženi broj	Zbroj veći od umnoška?	Broj slučajeva	
5	11111	DA $(5 > 1)$	**1**	1 BOD
4	21111, 12111, 11211, 11121, 11112	DA $(6 > 2)$	5	
	31111, 13111, 11311, 11131, 11113	DA $(7 > 3)$	5	
	41111, …	DA $(8 > 4)$	5	
	51111, …	DA $(9 > 5)$	5	
	61111, …	DA $(10 > 6)$	5	
	71111, …	DA $(11 > 7)$	5	
	81111, …	DA $(12 > 8)$	5	
	91111, …	DA $(13 > 9)$	5	
		Ukupno s četiri jedinice:	$8 \cdot 5 = \mathbf{40}$	1 BOD
3	22111, 21211, 21121, 21112, 12211, 12121, 12112, 11221, 11212, 11122	DA $(7 > 4)$	10*	1 BOD
	32111, 31211, 31121, 31112, 13211, 13121, 13112, 11321, 11312, 11132, 23111, 21311, 21131, 21113, 12311, 12131, 12113, 11231, 11213, 11123	DA $(8 > 6)$	20**	1 BOD
	42111, 41211, 41121, 41112, 14211, 14121, 14112, 11421, 11412, 11142, 24111, 21411, 21141, 21114, 12411, 12141, 12114, 11241, 11214, 11124	DA $(8 > 6)$	20***	1 BOD
		Ukupno s tri jedinice:	**50**	

Ukupno ima $1 + 40 + 10 + 20 + 20 = 91$ takav peteroznamenkasti broj. 1 BOD

* Učenik ne mora nabrojati sve mogućnosti već može njihov broj odrediti na sljedeći način: jednu dvojku možemo staviti na bilo koje od 5 mjesta, drugu dvojku na bilo koje od preostala 4 (jedinicama popunimo preostala tri mjesta). No, time smo mogućnosti brojali dvostruko jer su dvije dvojke jednake znamenke. Zato broj mogućnosti treba podijeliti s 2, odnosno imamo $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ mogućnosti.

** Učenik ne mora nabrojati sve mogućnosti već može njihov broj odrediti na sljedeći način: dvojku možemo staviti na bilo koje od 5 mjesta, a trojku na bilo koje od preostala 4 (jedinicama popunimo preostala tri mjesta). Stoga imamo $5 \cdot 4 = 20$ mogućnosti.

*** Učenik se može pozvati na prethodni slučaj.
…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Svi traženi brojevi se mogu odrediti i na drugačije načine, na primjer promatranjem umnoška znamenki. Mogući umnošci su od 1 do 9. Određivanje svih brojeva nosi 5 BODOVA, a po 1 BOD nosi: ideja promatranja umnoška zajedno s brojem 11111, određivanje svih brojeva za koje je umnožak znamenki 2,3,5,7 ili 9, određivanje svih brojeva s umnoškom znamenki 4, određivanje svih brojeva s umnoškom znamenki 6, određivanje svih brojeva s umnoškom znamenki 8. Odgovor koliko ima traženih brojeva ukupno nosi 1 BOD (i taj broj se dodjeljuje ako je dan odgovor bez obrazloženja). Dokaz da nema traženog broja kojem su znamenke dvije trojke i tri jedinice nosi 1 BOD, a dokaz da umnožak ne može biti veći od 9 nosi 3 BODA.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. U magičnome kvadratu zbroj je brojeva u svakome retku, stupcu i na obje dijagonale jednak. Na slici je prikazan kvadrat 3×3 u čija su četiri polja upisani racionalni brojevi. Ispitaj je li moguće u preostala prazna polja upisati racionalne brojeve tako da kvadrat bude magičan.

3.6		
		$5\frac{2}{5}$
$4\frac{4}{5}$		2.4

Rješenje.

Tražene brojeva u magičnom kvadratu označimo s a, b, c, d i e.

3.6	a	b
c	d	$5\frac{2}{5}$
$4\frac{4}{5}$	e	2.4

Zbroj brojeva u svakom retku/stupcu/dijagonali je jednak, pa se iz prvog stupca i drugog retka dobiva:

$3.6 + c + 4\frac{4}{5} = c + d + 5\frac{2}{5}$ 2 BODA

$8.4 = d + 5.4$

$d = 8.4 - 5.4 = 3$ 1 BOD

Zbroj brojeva na jednoj dijagonali je $3.6 + 3 + 2.4 = 9$. 1 BOD

Kvadrat će biti magičan ako zbroj članova u svim stupcima, retcima i na obje dijagonale iznosi 9.

Iz drugog retka se dobiva:

$c = 9 - 3 - 5\frac{2}{5} = 0.6$ 1 BOD

Iz trećeg stupca se dobiva:

$b = 9 - 3.6 - 2.4 = 1.2$ 1 BOD

Iz trećeg retka se dobiva:

$e = 9 - 4\frac{4}{5} - 2.4 = 1.8$ 1 BOD

Iz prvog retka se dobiva:

$a = 9 - 3.6 - 1.2 = 4.2$ 1 BOD

Treba još provjeriti je li zbroj magičan u prvom i drugom stupcu te na drugoj dijagonali:

$3.6 + 0.6 + 4.8 = 4.2 + 3 + 1.8 = 4.8 + 3 + 1.2 = 9$ 2 BODA

Kako je zbroj brojeva u svakom retku, stupcu i na obje dijagonale je jednak 9 kvadrat je magičan.

…....………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1. Ako učenik drugim redoslijedom dođe do točnih rezultata, vrednovati na sljedeći način: određivanje prvog nepoznatog broja 3 BODA, zbroj po stupcima/retcima/dijagonalama 1 BOD, svaki sljedeći broj po 1 BOD, te provjera zbroja u preostalim retcima/stupcima/dijagonali koji nisu korišteni za račun nepoznatih brojeva 2 BODA.

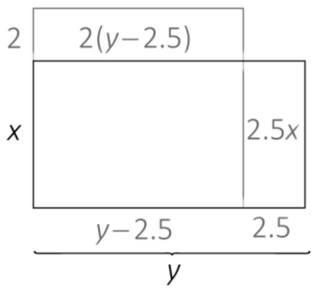
Napomena 2. Za potpuno rješenje nije potrebno prikazati postupak jednadžbama već je dovoljno odrediti brojeve koji nedostaju (8 BODOVA) te provjeriti da zbroj po svim stupcima/retcima i dijagonalama iznosi 9 (2 BODA).

3.6	4.2	1.2
0.6	3	$5\frac{2}{5}$
$4\frac{4}{5}$	1.8	2.4

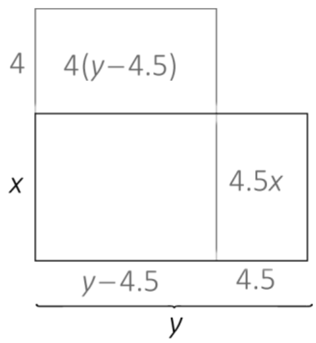
2. Svakoga sata Martina pročita jednak broj stranica knjige. Martina je najprije izračunala koliko bi stranica trebala pročitati svakoga sata da bi knjigu pročitala u točno zadanome roku. Potom je izračunala da bi čitanje cijele knjige završila 2.5 sati prije roka ako bi svakoga sata pročitala dvije stranice više od planiranoga. Ako bi svakoga sata pročitala četiri stranice više od planiranoga, onda bi knjigu pročitala 4.5 sati prije roka. Koliko stranica ima knjiga i koliko vremena treba Martini da pročita cijelu knjigu?

Rješenje.
Neka je x broj stranica koje Martina pročita svakoga sata, a y broj sati (rok) u kojem treba pročitati cijelu knjigu. Ukupan broj stranica knjige iznosi $x \cdot y$.
Ako svakoga sata pročita dvije stranice više $(x+2)$, završit će čitanje cijele knjige za
$(y-2.5)$ sati pa vrijedi $(x+2)\cdot(y-2.5)=x\cdot y$. 2 BODA
tj. $xy+2y-2.5x-5=xy$
$2y=5+2.5x$. 1 BOD
Ako svakoga sata pročita četiri stranice više $(x+4)$ završit će čitanje cijele knjige za
$(y-4.5)$ sati pa vrijedi $(x+4)\cdot(y-4.5)=x\cdot y$. 2 BODA
tj. $xy+4y-4.5x-18=xy$
$4y=4.5x+18$. 1 BOD
Pomnožimo li prvu jednadžbu s 2 dobit ćemo njoj ekvivalentnu jednadžbu
$4y=10+5x$. 1 BOD
Izjednačavanjem jednakih vrijednosti dobije se jednadžba
$5x+10=18+4.5x$
te $x=16$. 1 BOD
Za $x=16$ vrijedi $2y=5+2.5\cdot 16$
$2y=45$
$y=22.5$ 1 BOD
Martina treba pročitati $x\cdot y=16\cdot 22.5=360$ stranica knjige za 22.5 sati. 1 BOD
…....………………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1. Do sustava se može doći i grafičkom metodom. Svaku linearnu jednadžbu vrednovati s 3 BODA.



$2(y-2.5) = 2.5x$



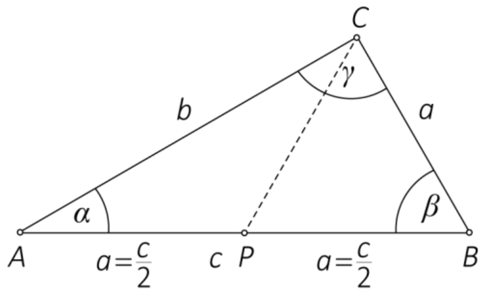
$4(y-4.5) = 4.5x$

Napomena 2. Vrijeme izračunato u bilo kojoj mjernoj jedinici vremena vrednovati ravnopravno.

3. Kolike su veličine kutova raznostraničnoga trokuta ako je srednji kut po veličini aritmetička sredina preostala dva kuta i ako je duljina najdulje stranice trokuta dva puta veća od duljine najkraće stranice?

Rješenje.
Neka su u raznostraničnom trokutu *ABC* duljine stranica $|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b$, pri čemu je $a < b < c$, te neka je $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle CBA| = \beta$ i $|\sphericalangle ACB| = \gamma$.

Skica:



1 BOD

Zbog uvjeta zadatka slijedi da je $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, tj, 2β = α + γ. 1 BOD

Kako je α + β + γ = 180° , zamjenom dobivene vrijednosti vrijedi jednakost 2β + β = 180°,

tj. vrijedi β = 60°. 1 BOD

Prema drugom uvjetu zadatka $c = 2a$ ili $a = \frac{c}{2}$ pa je $\gamma > \alpha$.

Neka je točka *P* polovište najdulje stranice $|AB| = c$ trokuta ABC.

Tada je $|AP| = |BP| = \frac{c}{2}$, a zbog $a = \frac{c}{2}$ slijedi da je $|BP| = |BC| = \frac{c}{2}$. 1 BOD

To znači da je trokut *BCP* jednakokračan s krakovima $\overline{BP}$ i $\overline{BC}$ 1 BOD

i kutovima uz osnovicu $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle PCB| = 60°$.

Slijedi da je trokut *BCP* jednakostraničan. 1 BOD

Zbog toga je $|PB| = |PC|$, a kako vrijedi $|PA| = |PB|$, vrijedi $|PA| = |PC|$. Slijedi da je trokut *PCA* jednakokračan s kutovima uz osnovicu $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle ACP| = \alpha$. 1 BOD

Kako je $|\sphericalangle BPC| = 60°$ vanjski kut trokuta *PCA* vrijedi jednakost α + α = 60° , tj. α = 30°. 2 BODA

Slijedi da je $\gamma = |\sphericalangle ACB| = 90°$. 1 BOD
……………………………………………………………………………..…....... UKUPNO 10 BODOVA

4. Satna i minutna kazaljka na zidnom satu u razdoblju između 11 i 12 sati u točno dva trenutka određuju pravi kut. Odredi, s točnošću na sekundu, koliko vremena prođe između ta dva trenutka.

Prvo rješenje.

Neka je x broj minuta nakon 11 sati kada će satna i minutna kazaljka prvi puta odrediti pravi kut, tj. kut čija je mjera 90°.

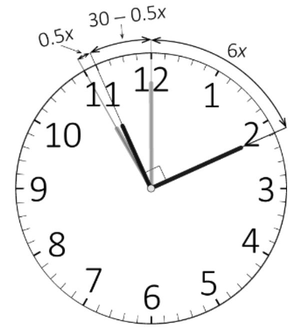
Minutna kazaljka za jednu minutu prijeđe $\frac{1}{60}$ punog kruga tj. $\frac{360°}{60} = 6°$. 1 BOD

Nakon x minuta minutna će kazaljka prijeći $(6x)°$

Satna kazaljka za jedan sat prijeđe $\frac{360°}{12} = 30°$ pa za jednu minutu prijeđe $\frac{30°}{60}$ =0.5°. 1 BOD

Nakon x minuta satna će kazaljka prijeći $(0.5x)°$.

Satna kazaljka kreće od položaja „11“, a velika od položaja „12“ pa kazaljke prvi puta određuju pravi kut kada vrijedi



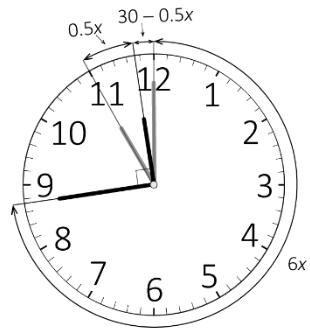
$30 - 0.5x + 6x = 90,$ 2 BODA

tj. vrijedi $5.5x = 60$, odnosno

$x = \frac{600}{55} = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}$ minuta. 1 BOD

Kazaljke će prvi puta odrediti pravi kut u 11 sati i $10\frac{10}{11}$ minuta.

Na sličan način odredimo kada će kazaljke drugi puta odrediti pravi kut. Vrijedi



$30 - 0.5x + 6x = 270,$ 2 BODA

tj. vrijedi $5.5x = 240$, odnosno

$x = \frac{2400}{55} = \frac{480}{11} = 43\frac{7}{11}$ minuta. 1 BOD

Kazaljke će drugi puta odrediti pravi kut u 11 sati i $43\frac{7}{11}$ minuta.

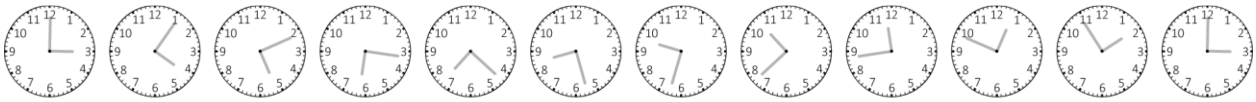
Znači između ta dva trenutka prošlo je $43\frac{7}{11} - 10\frac{10}{11} = 32\frac{8}{11}$ minuta. 1 BOD

Jedna minuta ima 60 sekundi, pa je $\frac{8}{11}$ min $= \frac{8}{11} \cdot 60$ s $\approx 44\ s$. U periodu između 11 i 12 sati između dva tražena trenutka proteći će približno 32 minute i 44 sekunde. 1 BOD

…………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Kazaljke određuju pravi kut u točno 3:00 sati. To se ponovno događa nešto malo kasnije od 4:05, pa nakon 5:10, 6:15, itd.



Vremenski razmaci između trenutaka kada kazaljke zatvaraju pravi kut su jednaki.

Od 3:00 do 15:00 tj. unutar 12 sati točno 11 puta kazaljke određuju pravi kut. 4 BODA

Dakle, razmak je $\frac{12}{11}$ sata, te se takav položaj događa između 11 i 12 sati u $3 + 8 \cdot \frac{12}{11}$ sati. 2 BODA

Analogno, kazaljke u 9:00 sati određuju pravi kut. Te situacije se također ponavljaju svakih $\frac{12}{11}$ sata, a između 11 i 12 sati se takav položaj događa u $9 + 2 \cdot \frac{12}{11}$ sati. 2 BODA


…

Razlika između ta dva vremena je $\left(3 + 8 \cdot \frac{12}{11}\right) - \left(9 + 2 \cdot \frac{12}{11}\right) = \frac{129}{11} - \frac{123}{11} = \frac{6}{11}$ sati.

Budući da je $\frac{6}{11}\,\mathrm{h} = 32\frac{8}{11}\ \mathrm{min} \approx 32\ \mathrm{min}\ 44\ \mathrm{s}$, u periodu između 11 i 12 sati između dva tražena trenutka proteći će približno 32 minute i 44 sekunde. 2 BODA

……………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1. Rješenje vrednovati s 10 BODOVA i ukoliko učenik odredi da je tražena razlika 32 minute i 43 sekunde zbog zaokruživanja međurezultata (prvi su puta kazaljke odredile pravi kut u 11 sati 10 minuta i 55 sekundi, a drugi puta u 11 sati 43 minute i 38 sekundi).

Napomena 2. U drugom rješenju nije potrebno nacrtati skice da bi se ostvarili pripadni bodovi.

5. Odredi sve prirodne brojeve koji se mogu prikazati kao umnožak pet faktora za koje vrijedi:

- svaki od faktora prosti je broj
- barem tri faktora su jednaka
- zbroj svih pet faktora iznosi 40.

Za svaki takav broj odredi broj njegovih prirodnih djelitelja.

Rješenje.

Ako su svih pet faktora jednaki imamo $5a = 40$ tj. $a = 8$, što nije prost broj, pa nije zadovoljen uvjet zadatka. Ako su četiri faktora jednaka imamo $4a + b = 40$ pa je b paran broj, odnosno b =2. Slijedi $4a = 38$, odnosno $a = 9.5$, što također ne zadovoljava uvjet zadatka. 1 BOD

Neka su a, b i c prosti faktori traženog broja gdje je a prosti faktor koji se pojavljuje tri puta.
Za preostala se dva ne zna jesu li međusobno jednaka ili različita.
Vrijedi $3a + b + c = 40$. Imamo sljedeće mogućnosti:

a	$3a$	$b + c$	$a^3 \cdot b \cdot c$
2	6	34	$\mathbf{2^3 \cdot 3 \cdot 31 = 744}$
2	6	34	$\mathbf{2^3 \cdot 5 \cdot 29 = 1160}$
2	6	34	$\mathbf{2^3 \cdot 11 \cdot 23 = 2024}$
2	6	34	$\mathbf{2^3 \cdot 17 \cdot 17 = 2312}$
3	9	31	$\mathbf{3^3 \cdot 2 \cdot 29 = 1566}$
5	15	25	$\mathbf{5^3 \cdot 2 \cdot 23 = 5750}$
7	21	19	$\mathbf{7^3 \cdot 2 \cdot 17 = 11662}$
11	33	7	$\mathbf{11^3 \cdot 2 \cdot 5 = 13310}$
13	39	1	**nema rješenja**

4 BODA
(po 1 BOD za 2 točna rješenja)

Ako se u rastavu pojave tri prosta broja veća ili jednaka 13, zbroj će preostala dva faktora biti manji od 2, pa zaključujemo da su navedena rješenja ujedno i jedina. 1 BOD

Ako je x traženi broj, s rastavom na proste faktore $x = a^3 \cdot b \cdot c$, tada su djelitelji broja x brojevi $1, a, a^2, a^3, b, c, ab, bc, ac, a^2b, a^2c, a^3b, a^3c, abc, a^2bc, a^3bc$ i ima ih 16. 3 BODA

Analogno, ako je x traženi broj, s rastavom na proste faktore $x = a^3 \cdot b^2$, tada su djelitelji broja x brojevi $1, a, a^2, a^3, b, ab, b^2, a^2b, a^3b, ab^2, a^2b^2, a^3b^2$ i ima ih 12. 1 BOD

Stoga brojevi 744, 1160, 2024, 1566, 5750, 11662 i 13310 imaju po 16 djelitelja, a broj 2312 ima 12 djelitelja.

…………………………………………………………………………………...... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1. Broj djelitelja se može odrediti kombinatorno i na sljedeći način.
Svaki djelitelj umnoška a^3bc je oblika $a^m \cdot b^n \cdot c^k$ za $m \in \{0,1,2,3\}, n \in \{0,1\}, k \in \{0,1\}$, pa je broj prirodnih djelitelja takvog broja $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.
Analogno, djelitelji umnoška a^3b^2, su oblika $a^m \cdot b^n$, pri čemu je $m \in \{0,1,2,3\}, n \in \{0,1,2\}$, pa je broj prirodnih djelitelja takvog broja $4 \cdot 3 = 12$.

U oba slučaja se koristi isti način zaključivanja te nije važno kojim redom se slučajevi razmatraju. Ako učenik razmatra samo jedan slučaj i dođe do ispravnog zaključka, treba dobiti 3 BODA.

Ova uputa o bodovanju se odnosi i na pristup prikazan u rješenju.

Napomena 2. Učenik može odrediti broj djelitelja nabrajanjem svih djelitelja.

a^3bc	Djelitelji	Ukupan broj djelitelja
744	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 31, 62, 93, 124, 186, 248, 372, 744	16
1160	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 29, 40, 58, 116, 145, 232, 290, 580, 1160	16
2024	1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024	16
2312	1, 2, 4, 8, 17, 34, 68, 136, 289, 578, 1156, 2312	12
1566	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 29, 54, 58, 87, 174, 261, 522, 783, 1566	16
5750	1, 2, 5, 10, 23, 25, 46, 50, 115, 125, 230, 250, 575, 1150, 2875, 5750	16
11662	1, 2, 7, 14, 17, 34, 49, 98, 119, 238, 343, 686, 833, 1666, 5831, 11662	16
13310	1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605, 1210, 1331, 2662, 6655, 13310	16

Treba dodijeliti po 1 BOD za svaka dva retka tablice.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. veljače 2024.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Površina je pravokutnika $\overline{3xx3}$, a duljine su njegovih susjednih stranica $\overline{xx}$ i x^2. Odredi znamenku x.

Prvo rješenje.
Duljine susjednih stranica pravokutnika su $\overline{xx}$ i x^2 pa je $x \neq 0$, tj. $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$.
Površina pravokutnika je $\overline{xx} \cdot x^2 = \overline{3xx3}$. 1 BOD
Umnožak $\overline{3xx3}$ je neparan broj pa je dovoljno promatrati $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. 2 BODA
Posljednja znamenka umnoška $\overline{3xx3}$ je 3:

- Za $x = 1$ posljednja znamenka umnoška $11 \cdot 1^2$ je različita od 3 pa $x \neq 1$. 1 BOD
- Za $x = 3$ posljednja znamenka umnoška $33 \cdot 3^2$ je različita od 3 pa $x \neq 3$. 1 BOD
- Za $x = 5$ posljednja znamenka umnoška $55 \cdot 5^2$ je različita od 3 pa $x \neq 5$. 1 BOD
- Za $x = 9$ posljednja znamenka umnoška $99 \cdot 9^2$ je različita od 3 pa $x \neq 9$. 1 BOD

Provjerom $77 \cdot 49 = 3773$ 2 BODA
dobivamo rješenje $x = 7$. 1 BOD
…....………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Duljine susjednih stranica pravokutnika su $\overline{xx}$ i x^2 pa je $x \neq 0$, tj. $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$.
Površina pravokutnika je $\overline{xx} \cdot x^2 = \overline{3xx3}$. 1 BOD
$(x \cdot 10 + x) \cdot x^2 = 3 \cdot 1000 + x \cdot 100 + x \cdot 10 + 3$ 2 BODA
$11x^3 = 110x + 3003$ 2 BODA
$11x^3 - 110x = 3003$
$11 \cdot (x^3 - 10x) = 11 \cdot 273$
$x^3 - 10x = 273$
$x \cdot (x^2 - 10) = 273$ 2 BODA
Rastavom broja 273 na proste faktore, $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$ i provjerom, dobiva se da je $x = 7$. 3 BODA

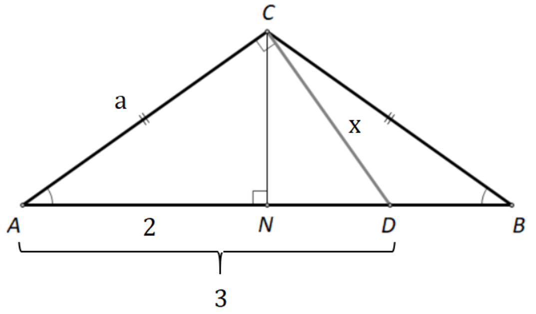
Napomena 1. Učenik može, u bilo kojem trenutku, provjeravati jednakost za svaki $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Kako bi mu bili dodijeljeni svi bodovi, treba provjeriti sve slučajeve ili argumentirati da, osim $x = 7$, nema drugih rješenja.

Napomena 2. Učenik može iz jednakosti $x \cdot (x^2 - 10) = 273$ (7 BODOVA) zaključiti da je $x^2 - 10 > 0$, tj. $x^2 > 10$ (1 BOD). Tada je za preostala 2 BODA dovoljno provjeriti jednakost za svaki $x \in \{4, 5, \dots, 9\}$ i odrediti točno rješenje.

Napomena 3. Učenik može iz jednakosti $11x^3 = 110x + 3003$ (5 BODOVA), zaključiti da je $3113 \leq 11x^3 \leq 3993$, tj. $283 \leq x^3 \leq 363$ (3 BODA). Tada se za zaključak da je $x = 7$ jedino rješenje dodjeljuju preostala 2 BODA.
…....………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

2. Zadan je tupokutan jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$ duljine 4. Okomica na $\overline{AC}$ koja sadržava točku C siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki D. Ako je $|AD| = 3$, odredi $|CD|$.

Prvo rješenje.
Skica:



2 BODA

Napomena. Učeniku koji nacrta skicu s elementima koji su zadani u zadatku dodjeljuje se 1 BOD od prethodna 2 BODA. Za docrtanu visinu $\overline{CN}$ dodjeljuje se preostali 1 BOD.

Kako je $|\measuredangle DAC| = |\measuredangle NAC|$ i $|\measuredangle ACD| = |\measuredangle CNA|$, trokut ADC i trokut ANC su slični trokuti (KK poučak). 2 BODA

Tada su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AN|},$$

2 BODA

tj.

$$\frac{3}{a} = \frac{a}{2}$$

$$a^2 = 6.$$

2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na ΔADC dobijemo:

$$3^2 = a^2 + x^2$$

1 BOD

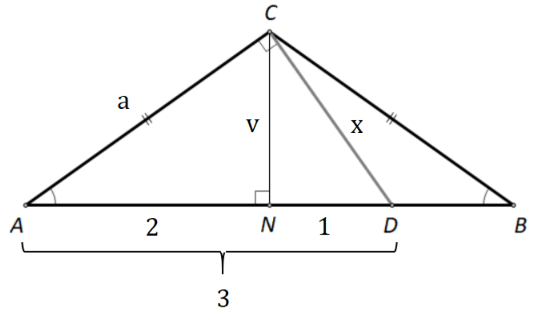
$$x^2 = 9 - 6$$

$$x = \sqrt{3}$$

1 BOD

…......…………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Skica:



2 BODA

Napomena. Učeniku koji nacrta skicu s elementima koji su zadani u zadatku, dodjeljuje se 1 BOD od prethodna 2 BODA. Za docrtanu visinu $\overline{CN}$ dodjeljuje se preostali 1 BOD.

Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute ANC, CND i ADC dobivamo:

$$a^2 = 2^2 + v^2$$

1 BOD

$$x^2 = v^2 + 1^2$$

1 BOD

$$3^2 = x^2 + a^2$$

1 BOD

Eliminacijom nepoznanice v iz prve dvije jednadžbe, dobivamo

$$a^2 = x^2 + 3.$$

2 BODA

Supstitucijom $a^2 = x^2 + 3$ u jednadžbu $3^2 = x^2 + a^2$ dobivamo

$$9 = 2x^2 + 3.$$

2 BODA

Konačno,

$$2x^2 = 6$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3}.$$

1 BOD

…....………………………………………………………………….…. UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka su m i n prirodni brojevi i neka m nije djeljiv s 3. Dokaži da je razlika $n^3 - m^2n$ djeljiva s 3.

Prvo rješenje.

Zapišimo zadanu razliku u obliku umnoška

$$n^3 - m^2n = n \cdot (n^2 - m^2) = n(n-m)(n+m).$$ 1 BOD

Kako broj m nije djeljiv s 3, promatramo dva slučaja: $m = 3k + 1$ i $m = 3k + 2$, pri čemu je $k \in \mathbb{N}_0$. 1 BOD

Ako je $m = 3k + 1$,

$$n(n-m)(n+m) = n(n-3k-1)(n+3k+1) = n\big((n-1)-3k\big)\big((n+1)+3k\big).$$

Brojevi $n-1, n, n+1$ su uzastopni prirodni brojevi pa je jedan od njih sigurno djeljiv s 3. 1 BOD

- Ako je n djeljiv s 3, tada je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3.
- Ako je $n-1$ djeljiv s 3, tada je razlika $((n-1)-3k)$ djeljiva s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3.
- Ako je $n+1$ djeljiv s 3, tada je zbroj $((n+1)+3k)$ djeljiv s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3. 3 BODA

Ako je $m = 3k + 2$,

$$n(n-m)(n+m) = n(n-3k-2)(n+3k+2) = n\big((n-2)-3k\big)\big((n+2)+3k\big).$$

Brojevi $n-2, n, n+2$ su tri uzastopna parna ili tri uzastopna neparna broja. Jedan od njih je sigurno djeljiv s 3. 1 BOD

- Ako je n djeljiv s 3, tada je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3.
- Ako je $n-2$ djeljiv s 3, tada je razlika $((n-2)-3k)$ djeljiva s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3.
- Ako je $n+2$ djeljiv s 3, tada je zbroj $((n+2)+3k)$ djeljiv s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3. 3 BODA

…………………………………………………………………………..…….... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Zapišimo zadanu razliku u obliku umnoška

$$n^3-m^2n = n\cdot(n^2-m^2) = n(n-m)(n+m).$$

1 BOD

Razlika brojeva $n+m$ i n je m, što nije djeljivo s 3, pa $n+m$ i n imaju različit ostatak pri dijeljenju s 3. 2 BODA

Razlika brojeva n i $n-m$ je m, što nije djeljivo s 3, pa n i $n-m$ imaju različit ostatak pri dijeljenju s 3. 2 BODA

Razlika brojeva $n+m$ i $n-m$ je $2m$, što nije djeljivo s 3, pa $n+m$ i $n-m$ imaju različit ostatak pri dijeljenju s 3. 2 BODA

Brojevi $n+m, n\ i\ n-m$ daju različite ostatke pri dijeljenju brojem 3. 2 BODA

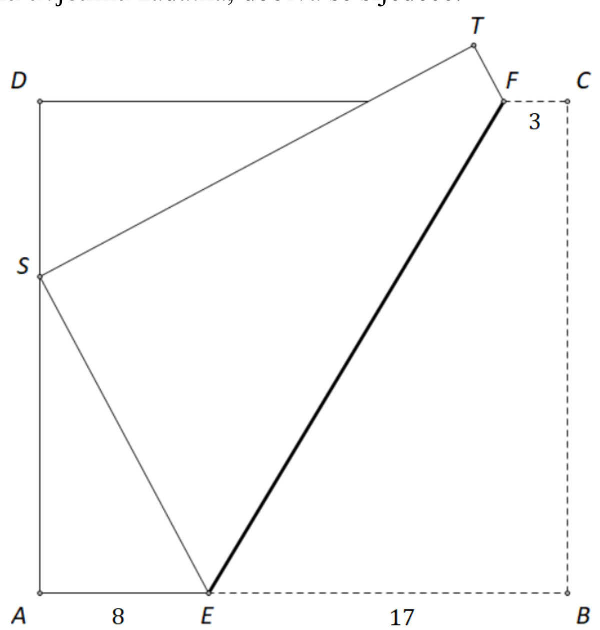
Stoga je točno jedan od njih djeljiv s 3 pa je i umnožak $n(n-m)(n+m)$ djeljiv s 3. 1 BOD

…………………………………………………………………………..…….... UKUPNO 10 BODOVA

4. Od papira je izrezan pravokutnik $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E tako da je $|AE|=8$ i $|BE|=17$. Na stranici $\overline{CD}$ odabrana je točka F tako da je $|CF|=3$. Nakon presavijanja papira po dužini $\overline{EF}$, vrh B poklapa se s točkom S na stranici $\overline{AD}$. Odredi duljinu stranice $\overline{BC}$ pravokutnika $ABCD$ i zapiši je u obliku neskrativog razlomka.

Prvo rješenje.

Presavijanjem papira prema uvjetima zadatka, dobiva se sljedeće:



Četverokut $EBCF$ se preslikava u njemu sukladan četverokut $SEFT$ (četverokut $SEFT$ je osnosimetrična slika četverokuta $EBCF$ s obzirom na pravac EF) tj. trokut EBF se preslikava u njemu sukladan trokut SEF, pa je

$$|SE| = |BE| = 17.$$

2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut SAE dobivamo da je

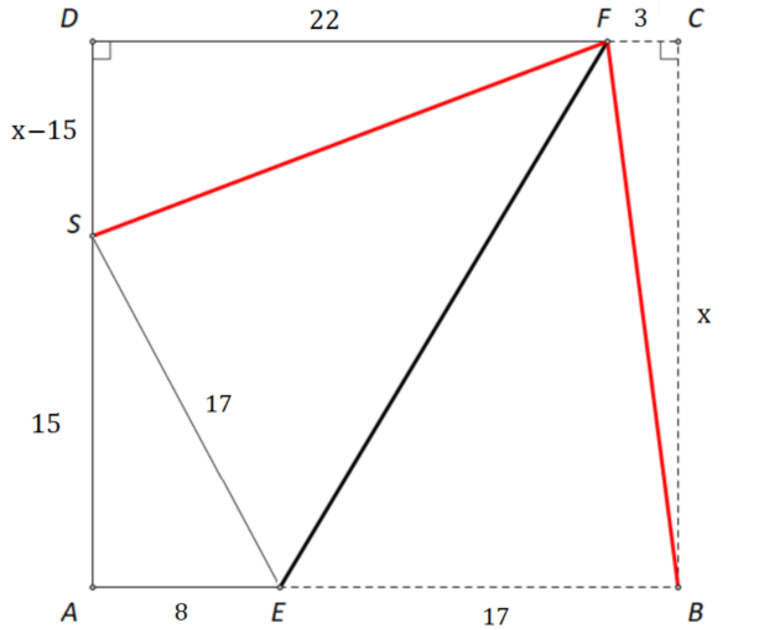
$$|SA|^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$$

$$|SA| = 15.$$

1 BOD

Neka je $|AD| = |BC| = x$.

Uočimo da je $|DS| = x - 15$ i $|DF| = 22$. 1 BOD



Kako je, zbog sukladnosti trokuta EBF i trokuta SEF, $|BF| = |SF|$, 1 BOD

primjenom Pitagorinog poučka na trokut FDS i trokut BCF dobivamo:

$$|SD|^2 + |DF|^2 = |FC|^2 + |BC|^2$$

2 BODA

$$(x - 15)^2 + 22^2 = 3^2 + x^2$$

1 BOD

$$x^2 - 30x + 225 + 484 = 9 + x^2$$

1 BOD

$$30x = 700$$

$$x = \frac{70}{3}$$

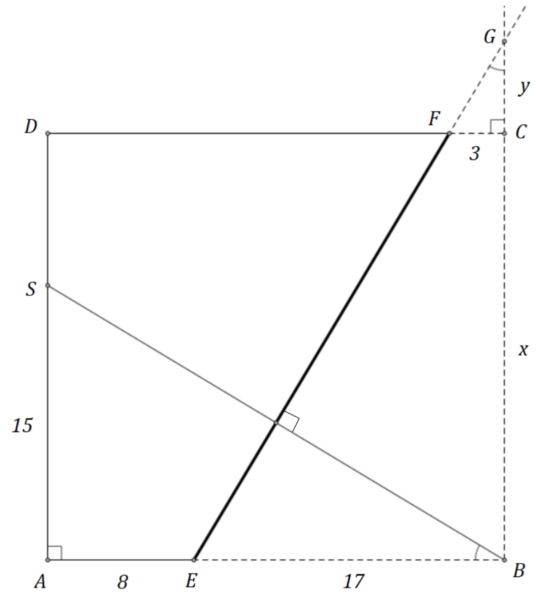
1 BOD

…………………………………………………………………..……...... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, zaključujemo da je $|SE| = 17$ i $|SA| = 15$. 3 BODA

Neka je sjecište pravaca BC i EF točka G.



Kako je $|\measuredangle SBA| = |\measuredangle EGB|$ (kutovi s okomitim kracima) i $|\measuredangle BAS| = |\measuredangle GBE| = 90°$, trokuti ΔSAB i ΔEBG su slični (KK poučak) 1 BOD

pa su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|BG|}{|BE|}.$$

1 BOD

Kako je $\measuredangle EGB$ zajednički kut trokuta ΔEBG i ΔFCG te $|\measuredangle GBE| = |\measuredangle GCF| = 90°$, trokuti ΔEBG i ΔFCG su slični (KK poučak) 1 BOD

pa su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{|BG|}{|BE|} = \frac{|CG|}{|CF|}.$$

1 BOD

Dakle, vrijedi

$$\frac{25}{15} = \frac{x+y}{17} = \frac{y}{3}.$$

Iz

$$\frac{25}{15} = \frac{y}{3}$$

dobivamo da je $y = 5$. 1 BOD

(**Napomena 1.** Umjesto da izračuna da je $y = 5$, učeniku se prethodni 1 BOD dodjeljuje i ako je iz $\frac{x+y}{17} = \frac{y}{3}$ zaključio da je $3x = 14y$.)

Iz

$$\frac{25}{15} = \frac{x+y}{17}$$

dobivamo da je

$$x + y = \frac{85}{3}$$

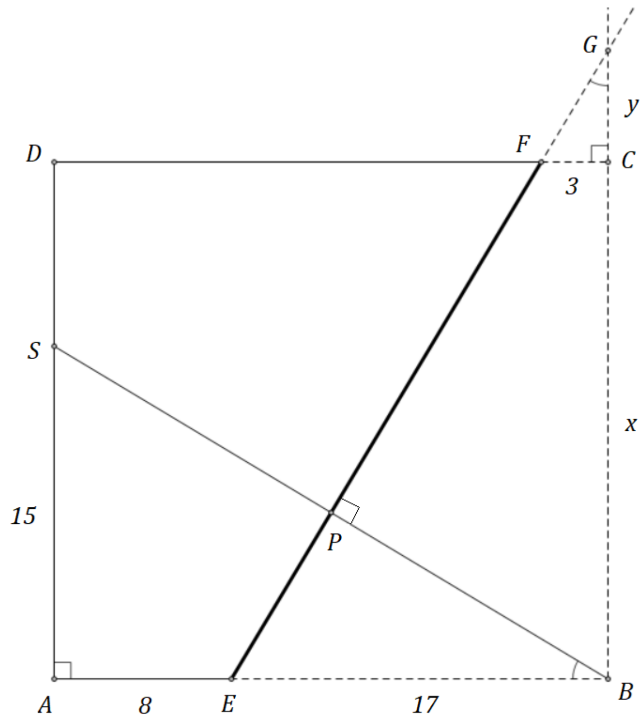
1 BOD

pa je

$$x = \frac{70}{3}$$

1 BOD

(**Napomena 2.** Učenik može uvesti točku P koja je sjecište pravaca $BS\ i\ EF$ pa umjesto sličnih trokuta $\Delta EBG,\ \Delta FCG\ i\ \Delta SAB$, kao u drugom rješenju, promatrati slične trokute $\Delta PEB,\ \Delta FCG$ i ΔSAB.



Nakon određivanja $|PB| = \frac{|SB|}{2} = \frac{5\sqrt{34}}{2}$ (primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔSAB), dobiva se

$$\frac{\frac{5\sqrt{34}}{2}}{\sqrt{17^2 - \left(\frac{5\sqrt{34}}{2}\right)^2}} = \frac{x+y}{17} = \frac{y}{3}$$

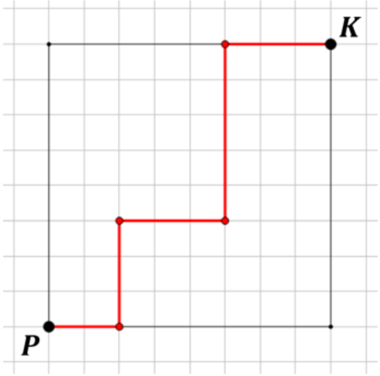
odnosno

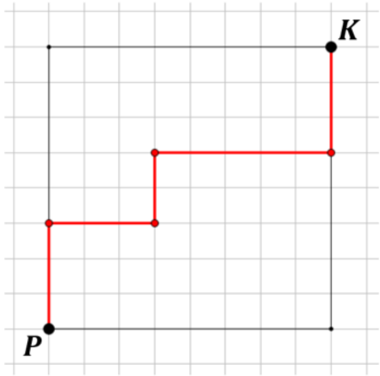
$$\frac{5}{3} = \frac{x+y}{17} = \frac{y}{3}$$

Taj dio, uz analogno bodovanje međukoraka, kao i u drugom rješenju vrijedi 4 BODA.)

…………………………………………………………………………..…….…... UKUPNO 10 BODOVA

5. U kvadratnoj mreži nacrtan je kvadrat sa stranicom duljine 8. Točke P i K nasuprotni su vrhovi tog kvadrata. Mrav se kreće od točke P do točke K isključivo pomacima gore ili desno po stranicama jediničnih kvadrata. Na svojemu putu mora napraviti točno četiri promjene smjera. Na slikama su prikazana dva moguća primjera dopuštenoga kretanja mrava od točke P do točke K. Na koliko različitih načina mrav može doći od točke P do točke K na opisani način?





Prvo rješenje.

Odredimo najprije broj puteva u kojima je prvi pomak desno. Budući da se putevi u kojima je prvi korak gore dobivaju na simetričan način, ukupan broj puteva ćemo dobiti množenjem dobivenog broja s 2. 1 BOD

Neka su x i y duljine prvog i drugog pomaka gore pri čemu je $x, y \in \mathbb{N}$. Duljine prvog, drugog i trećeg pomaka desno označimo sa a, b, c pri čemu je $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Tada je:

$$x + y = 8$$
$$a + b + c = 8$$

Promotrimo broj uređenih parova (x, y) i broj uređenih trojki (a, b, c) kojima se mogu opisati svi različiti načini kojima mrav može doći od točke P do točke K.

Uređeni parovi (x, y) za koje je $x + y = 8$ su $(1,7)$, $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,2)$, $(7,1)$.

Njihov je broj 7. 2 BODA

Ispišimo sva rješenja jednadžbe $a + b + c = 8$, redom, prema vrijednosti varijable a.

- Ako je $a = 1$, tada imamo 6 uređenih trojki: $(1,1,6)$, $(1,2,5)$, $(1,3,4)$, $(1,4,3)$, $(1,5,2)$, $(1,6,1)$.
- Ako je $a = 2$, tada imamo 5 uređenih trojki: $(2,1,5)$, $(2,2,4)$, $(2,3,3)$, $(2,4,2)$, $(2,5,1)$.
- Ako je $a = 3$, tada imamo 4 uređene trojke: $(3,1,4)$, $(3,2,3)$, $(3,3,2)$, $(3,4,1)$.
- Ako je $a = 4$, tada imamo 3 uređene trojke: $(4,1,3)$, $(4,2,2)$, $(4,3,1)$.
- Ako je $a = 5$, tada imamo 2 uređene trojke: $(5,1,2)$, $(5,2,1)$.
- Ako je $a = 6$, tada imamo 1 uređenu trojku: $(6,1,1)$.

Takvih je uređenih trojki ukupno $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$. 4 BODA

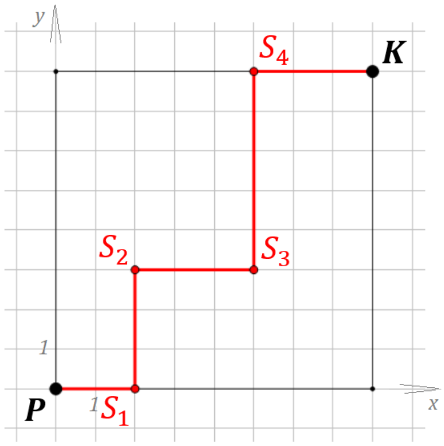
Broj različitih načina na koje mrav može doći od točke P do točke K, ako je prvi pomak desno, dobit ćemo tako da pomnožimo broj uređenih parova i broj uređenih trojki 1 BOD

tj. $7 \cdot 21 = 147$. 1 BOD

Stoga je broj različitih načina na moje mrav može doći od točke P do točke K na opisani način jednak 294. 1 BOD

……………………………………………………………………………...... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.



Neka je točka P ishodište koordinatnog sustava, $P(0,0)$. Na svom putu do točke $K(8,8)$ mrav mora promijeniti smjer u točno 4 točke. Označimo te točke, redom, S_1, S_2, S_3 i S_4.

Odredimo najprije broj puteva u kojima je prvi pomak desno. Budući da se putevi u kojima je prvi korak gore dobivaju na simetričan način, ukupan broj puteva ćemo dobiti množenjem dobivenog broja s 2. 1 BOD

Apscise točaka $S_1(x_1, 0)$ i $S_3(x_3, y_3)$ su, tada, $1 \leq x_1 < x_3 \leq 7$ pa ih možemo odabrati na $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ različit način. 4 BODA

Točke S_1 i S_2 imaju jednake apscise, $x_1 = x_2$. Za jednom odabranu točku S_1, točki $S_2(x_2, y_2)$ ordinata je $1 \leq y_2 \leq 7$ pa se može odabrati na 7 različitih načina. 2 BODA

Za jednom odabrane točke S_1, S_2 i S_3, točka S_4 je već određena, $S_4(x_3, 8)$.

Broj različitih načina na koje mrav može doći od točke P do točke K, ako je prvi pomak desno, dobit ćemo tako da pomnožimo broj odabira apscisa točaka S_1 i S_3 te broj odabira ordinate točke S_2,

1 BOD

tj.

$$7 \cdot 21 = 147.$$

1 BOD

Stoga je broj različitih načina na koje mrav može doći od točke P do točke K na opisani način jednak 294. 1 BOD

Napomena. U svom razmišljanju učenik ne mora točku P smjestiti u ishodište koordinatnog sustava te ne mora kvadratnu mrežu smjestiti u koordinatni sustav kako bi, analogno, došao do istih zaključaka.
…………………………….……….………………….…………….…...... UKUPNO 10 BODOVA