

## ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.**

### Zadatak A-1.1.

Odredi sve uređene parove cijelih brojeva  $(x, y)$  za koje vrijedi

$$x^2y + 4x^2 - 3y = 51.$$

### Rješenje.

Zapišimo početnu jednakost na drugačiji način:

$$x^2y + 4x^2 - 3y = 51$$

$$x^2(y + 4) - 3y = 51$$

$$x^2(y + 4) - 3(y + 4) + 12 = 51$$

$$(x^2 - 3)(y + 4) = 39.$$

1 bod

2 boda

Faktori  $x^2 - 3$  i  $y + 4$  s lijeve strane djelitelji su broja 39 i umnožak im je 39. Zaključujemo da je

$$x^2 - 3 \in \{-39, -13, -3, -1, 1, 3, 13, 39\},$$

3 boda

odnosno  $x^2 \in \{-36, -10, 0, 2, 4, 6, 16, 42\}$ . Od ovih brojeva, samo 0, 4 i 16 su potpuni kvadrati.

1 bod

Za  $y$  vrijedi  $y + 4 = \frac{39}{x^2 - 3}$ .

Ako je  $x^2 = 0$ , odnosno  $x = 0$ , slijedi  $y = -17$ .

1 bod

Ako je  $x^2 = 4$ , odnosno  $x = \pm 2$ , slijedi  $y = 39$ .

1 bod

Ako je  $x^2 = 16$ , odnosno  $x = \pm 4$ , slijedi  $y = -1$ .

1 bod

Zaključujemo da su sva rješenja početne jednadžbe

$$(x, y) = (0, -17), (2, 39), (-2, 39), (4, -1), (-4, -1).$$

### Zadatak A-1.2.

Na ploči su bili napisani svi prirodni brojevi od 1 do nekog broja. Nakon što je jedan od brojeva obrisan, aritmetička sredina preostalih brojeva na ploči iznosi  $\frac{673}{18}$ . Koji je broj obrisan?

**Prvo rješenje.**

Neka je najveći napisani prirodni broj  $n$ , a izbrisan broj  $k$ . Zbroj prvih  $n$  prirodnih brojeva iznosi  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Uvjet zadatka može se zapisati kao

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - k}{n-1} = \frac{673}{18}. \quad 2 \text{ boda}$$

Kada bi izbrisani broj  $k$  bio  $n$ , dobili bismo najmanju moguću aritmetičku sredinu. Ona bi iznosila

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - n}{n-1} = \frac{n}{2}, \quad 1 \text{ bod}$$

i manja je ili jednaka dobivenoj aritmetičkoj sredini:

$$\frac{n}{2} \leq \frac{673}{18}. \quad 1 \text{ bod}$$

Kada bi izbrisani broj  $k$  bio 1, dobili bismo najveću moguću aritmetičku sredinu. Ona bi iznosila

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - 1}{n-1} = \frac{n+1}{2}, \quad 1 \text{ bod}$$

i veća je ili jednaka dobivenoj aritmetičkoj sredini:

$$\frac{n+1}{2} \geq \frac{673}{18}. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz dobivenih nejednakosti slijedi  $72 < n < 75$ , odakle je  $n = 73$  ili  $n = 74$ . 2 boda

Ako je  $n = 73$ , tada je

$$\frac{673}{18} = \frac{\frac{73 \cdot (73+1)}{2} - k}{73-1}.$$

Odavde slijedi  $k = 9$ . 1 bod

Ako je  $n = 74$ , dobivamo da je

$$\frac{673}{18} = \frac{\frac{74 \cdot (74+1)}{2} - k}{74-1}.$$

Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo da je  $k = \frac{821}{18}$ , što nije prirodan broj pa zaključujemo da  $n$  ne može biti 74. 1 bod

Zaključujemo da je s ploče obrisani broj 9.

## Drugo rješenje.

Koristeći oznake i jednadžbu

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - k}{n-1} = \frac{673}{18}$$

2 boda

kao u prvom rješenju, uvjet možemo zapisati kao

$$74 + \frac{7}{9} = n + 2 \cdot \frac{n-k}{n-1}.$$

Kako je  $k \leq n$ , slijedi  $\frac{n-k}{n-1} \geq \frac{n-n}{n-1} = 0$ .

1 bod

Zato je  $n \leq 74 + \frac{7}{9} < 75$ .

1 bod

Kako je  $k \geq 1$ , slijedi  $\frac{n-k}{n-1} \leq \frac{n-1}{n-1} = 1$ .

1 bod

Zato je  $n-2 \geq 74 + \frac{7}{9} > 74$ .

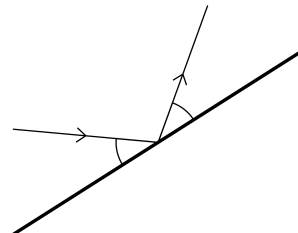
1 bod

Iz dobivenih nejednakosti zaključujemo da su moguće vrijednosti za  $n$  brojevi 73 ili 74, a te mogućnosti provjerimo kao u prošlom rješenju.

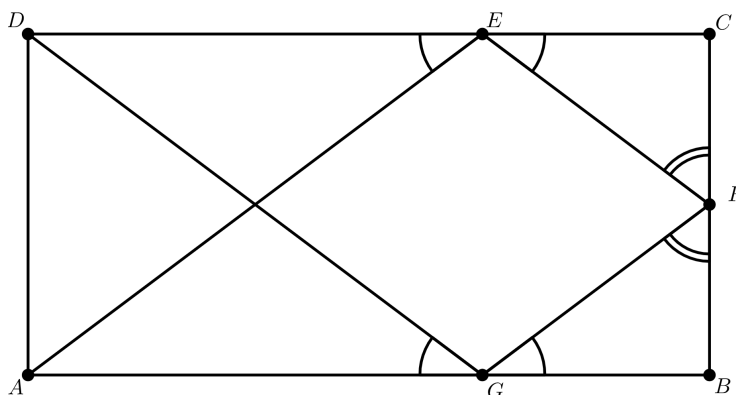
4 boda

## Zadatak A-1.3.

Biljarski stol ima oblik pravokutnika  $ABCD$  i dimenzije  $|AB| = 2$  m i  $|BC| = 1$  m. Biljarska kugla giba se po stolu pravocrtno dok ne dođe do ruba pravokutnika, a tada se odbija tako da putanja kugle prije i poslije odbijanja zatvara s rubom sukladne kutove. Ako biljarska kugla započne gibanje u točki  $A$  te nakon odbijanja od stranica  $\overline{CD}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{AB}$  redom završi gibanje u točki  $D$ , odredi ukupnu udaljenost koju je kugla prešla. Kuglu promatramo kao materijalnu točku.



## Prvo rješenje.



Neka su  $E$ ,  $F$  i  $G$  redom točke u kojima se kugla odbija od stranica  $\overline{CD}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{AB}$ . Uvjet odbijanja biljarske kugle znači da vrijede jednakosti

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle CEF, \quad \sphericalangle EFC = \sphericalangle GFB, \quad \sphericalangle FGB = \sphericalangle DGA.$$

Označimo s  $l = |AE| + |EF| + |FG| + |GD|$  duljinu putanje koju je prešla biljarska kugla.

Promotrimo trokute  $AGD$  i  $DEA$ . To su pravokutni trokuti s pravim kutovima pri vrhovima  $A$  i  $D$  redom, imaju zajedničku katetu  $\overline{AD}$ , a za kutove nasuprot te katete vrijedi

$$\sphericalangle DGA = \sphericalangle FGB = 90^\circ - \sphericalangle GFB = 90^\circ - \sphericalangle EFC = \sphericalangle FEC = \sphericalangle AED. \quad 2 \text{ boda}$$

Zato se svi kutovi tih trokuta u parovima podudaraju, pa su ti trokuti sukladni prema K–S–K poučku o sukladnosti. 1 bod

Iz te sukladnosti slijedi da je  $|AE| = |DG|$  te  $|AG| = |DE|$ , pa onda i  $|BG| = |CE|$ . 1 bod

Promotrimo pravokutne trokute  $BGF$  i  $CEF$ . Svi kutovi im se u parovima poklapaju (zbog  $\sphericalangle EFC = \sphericalangle GFB$ ), te imaju jedan par stranica jednake duljine (zbog  $|BG| = |CE|$ ). Zato su i oni sukladni prema K–S–K poučku o sukladnosti. 1 bod

Zaključujemo da je

$$|CF| = |FB| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2} \text{ m}, \quad 1 \text{ bod}$$

te  $|EF| = |FG|$ .

Budući da je  $\sphericalangle DGA = \sphericalangle FGB$ , pravokutni trokuti  $DGA$  i  $FGB$  su slični. Zato vrijedi

$$\frac{|DG|}{|FG|} = \frac{|AG|}{|GB|} = \frac{|FB|}{|DA|} = \frac{1}{2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Zajedno s  $|AG| + |GB| = 2 \text{ m}$  dobivamo  $|BG| = \frac{2}{3} \text{ m}$ . 1 bod

Duljina putanje koju je prešla biljarska kugla iznosi

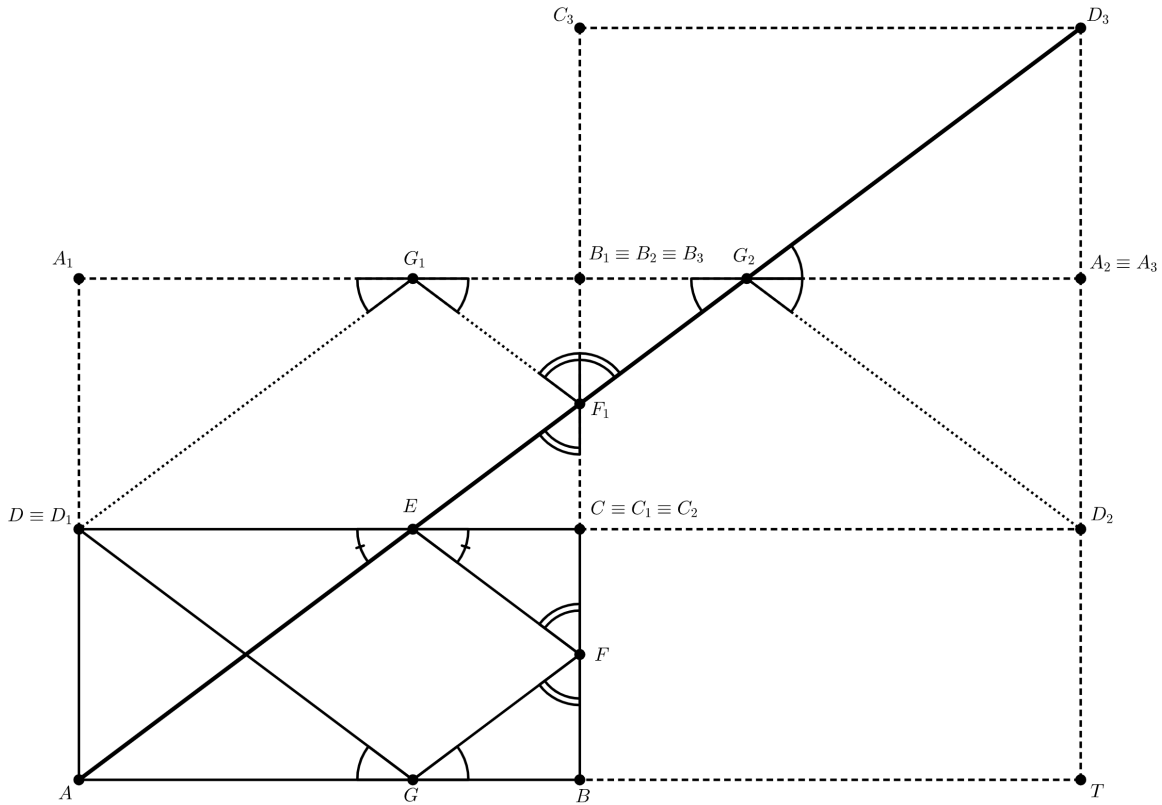
$$\begin{aligned} l &= |AE| + |EF| + |FG| + |GD| \\ &= |GD| + |FG| + |FG| + |GD| \\ &= 2|FG| + |FG| + |FG| + 2|FG| \\ &= 6|FG|. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut  $FGB$  dobivamo

$$|FG| = \sqrt{|FB|^2 + |GB|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \text{ m} = \frac{5}{6} \text{ m},$$

odakle je  $l = 5 \text{ m}$ . 1 bod

**Drugo rješenje.**



Neka su točke  $E$ ,  $F$  i  $G$  dane kao u prošlom rješenju, te  $l$  duljina putanje biljarske kugle.

Neka je  $A_1B_1C_1D_1$  osnosimetrična slika pravokutnika  $ABCD$  u odnosu na pravac  $CD$ . Dodatno, istom osnom simetrijom preslikajmo i putanju biljarske kugle nakon točke  $E$  ( $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow D$ ) u putanju  $E \rightarrow F_1 \rightarrow G_1 \rightarrow D_1$ . Zbog osne simetrije i uvjeta odbijanja biljarske kugle vrijedi

$$\angle F_1EC = \angle FEC = \angle AED.$$

Kutovi kod vrha  $E$  se podudaraju pa su točke  $A$ ,  $E$  i  $F_1$  kolinearne.

2 boda

Posebno, vrijedi  $|AE| + |EF_1| = |AF_1|$ . Osna simetrija čuva duljine dužina, pa vrijedi

$$\begin{aligned} l &= |AE| + |EF| + |FG| + |GD| \\ &= |AE| + |EF_1| + |F_1G_1| + |G_1D_1| \\ &= |AF_1| + |F_1G_1| + |G_1D_1|. \end{aligned}$$

Neka su  $A_2B_2C_2D_2$  i točka  $G_2$  osnosimetrična slika pravokutnika  $A_1B_1C_1D_1$  i točke  $G_1$  redom u odnosu na pravac  $B_1C_1$ , te  $A_3B_3C_3D_3$  osnosimetrična slika pravokutnika  $A_2B_2C_2D_2$  u odnosu na pravac  $A_2B_2$ .

Na sličan način se pokazuje da su točke  $G_2$  i  $D_3$  na istom pravcu na kojem su točke  $A$ ,  $E$  i  $F_1$ . Zaključujemo da se preostali dijelovi putanje kugle nizom osnih simetrija preslikavaju tako da čine dužinu koja spaja  $A$  i  $D_3$ , pa je ukupna duljina putanje kugle jednaka  $l = |AD_3|$ .

6 bodova

Neka je  $T$  osnosimetrična slika točke  $A$  u odnosu na pravac  $BC$ . Dužina  $\overline{AD_3}$  je hipotenuza pravokutnog trokuta  $ATD_3$  kojemu su duljine kateta  $2|AB| = 4$  m i  $3|BC| = 3$  m pa je

$$l = |AD_3| = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ m} = 5 \text{ m.} \quad 2 \text{ boda}$$

**Napomena:** Za potpuno rješenje potrebno je dokazati da je poligonalna linija između  $A$  i  $D_3$  dobivena osnosimetričnim preslikavanjima originalne putanje biljarske kugle zapravo ravna linija. Za to je dovoljno pokazati kolinearnost na jednom primjeru odbijanja kugle od stranice (kao u prikazanom rješenju). Rješenja koja nemaju takav dokaz mogu ostvariti najviše 8 bodova.

#### Zadatak A-1.4.

Ako za realne brojeve  $a, b, c$  vrijedi  $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ , dokaži da je

$$(a + b)^2 ab + (b + c)^2 bc + (c + a)^2 ca + 4abc(a + b + c) = 0.$$

#### Prvo rješenje.

Uvjet zadatka možemo zapisati u obliku  $(a + b + c)^3 - a^3 = b^3 + c^3$ . Primjenom razlike i zbroja kubova dobivamo

$$\begin{aligned} ((a + b + c) - a)((a + b + c)^2 + (a + b + c)a + a^2) &= (b + c)(b^2 - bc + c^2) & 1 \text{ bod} \\ (b + c)(3a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) &= (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\ (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) &= 0 & 2 \text{ boda} \\ (b + c)(a + b)(a + c) &= 0 & 2 \text{ boda} \end{aligned}$$

Jedan od faktora na lijevoj strani jednadžbe mora biti jednak nuli. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $a + b = 0$ . 1 bod

Tada koristeći  $b = -a$  izraz iz tvrdnje zadatka možemo izraziti preko  $a$  i  $c$ :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 ab + (b + c)^2 bc + (c + a)^2 ca + 4abc(a + b + c) \\ = 0 + (-a + c)^2(-a)c + (c + a)^2 ac + 4a(-a)c(0 + c) & 1 \text{ bod} \\ = -ac(a^2 - 2ac + c^2) + ac(a^2 + 2ac + c^2) - 4a^2 c^2 \\ = 0, & 3 \text{ boda} \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

#### Drugo rješenje.

Raspišimo uvjet zadatka. Dobivamo redom

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 \\ a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2 b + b^2 c + c^2 a + ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6abc &= a^3 + b^3 + c^3 \\ 3(a^2 b + b^2 c + c^2 a + ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6abc &= 0 \\ a^2 b + b^2 c + c^2 a + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 2abc &= 0. & 2 \text{ boda} \end{aligned}$$

Uvedimo oznaku  $S = a + b + c$ . Sada imamo

$$\begin{aligned}(a+b)^2ab + (b+c)^2bc + (c+a)^2ca + 4abc(a+b+c) \\&= (S-c)^2ab + (S-a)^2bc + (S-b)^2ca + 4Sabc \\&= S^2(ab+bc+ca) - 6Sabc + c^2ab + a^2bc + b^2ca + 4Sabc \\&= S^2(ab+bc+ca) - 6Sabc + Sabc + 4Sabc & 3 \text{ boda} \\&= S^2(ab+bc+ca) - Sabc \\&= S(S(ab+bc+ca) - abc) \\&= S((a+b+c)(ab+bc+ca) - abc) \\&= S(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc - abc) & 3 \text{ boda} \\&= S(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 2abc) \\&= 0, & 2 \text{ boda}\end{aligned}$$

budući da je izraz u drugoj zagradi jednak nuli prema uvjetu zadatka.

**Napomena:** Svaki dokaz da je uvjet zadatka ekvivalentan s  $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$  vrijedi **5 bodova**.

Ako učenici u prvom rješenju ne zaključe da je dovoljno tvrdnju dokazivati samo slučaj  $a+b=0$  nego dokazuju tvrdnju i u slučajevima  $b+c=0$  i  $c+a=0$ , za taj dio potpunog dokaza ostvaruju **1 bod** koji odgovara šestom bodu prve bodovne sheme.

U drugoj bodovnoj shemi **3 boda** ostvaruju se prvo za izlučivanje izraza  $S$  iz svih pribrojnika u izrazu iz tvrdnje zadatka, a zatim **3 boda** za točno raspisivanje izraza u preostaloj zagradi na monome.

### **Zadatak A-1.5.**

Dokaži da među bilo kojih pet vrhova pravilnog deveterokuta postoje četiri koja su vrhovi trapeza.

#### **Prvo rješenje.**

Za svaku dijagonalu pravilnog deveterokuta postoje još dvije dijagonale i jedna stranica tog deveterokuta koje su sve međusobno paralelne. Posebno, svaka stranica i dijagonala paralelna je jednoj od 9 stranica pravilnog deveterokuta. 4 boda

Pretpostavimo tvrdnju suprotnu onoj iz zadatka: postoji odabir pet točaka takvih da nikojih četiri ne čine vrhove trapeza. Promotrimo taj izbor točaka.

Tih pet točaka određuje  $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$  dužina. Svaka od tih dužina paralelna je nekoj od 9 stranica pravilnog deveterokuta. Prema Dirichletovom principu postoje dvije dužine koje su određene s dva para nekih od pet odabranih točaka te koje su paralelne istoj stranici deveterokuta, pa su posebno i međusobno paralelne. 4 boda

Krajnje točke tih dviju dužina su sve međusobno različite jer bismo u suprotnom imali 3 kolinearne točke među vrhovima pravilnog deveterokuta. Upravo te četiri točke čine vrhove trapeza (te paralelne dužine njegove su osnovice), čime je tvrdnja zadatka dokazana. 2 boda

## Drugo rješenje.

Označimo ponovno vrhove deveterokuta  $A_1, A_2, \dots, A_9$  redom.

Pretpostavimo suprotno: postoji odabir pet točaka takvih da nikojih četiri ne čine vrhove trapeza. Promotrimo taj izbor točaka.

Prvo dokažimo da u tom odabiru postoje dvije susjedne točke deveterokuta. Fiksirajmo bilo koju neodabranu točku. Ostalih 8 točaka možemo podijeliti u četiri para susjednih točaka deveterokuta. Prema Dirichletovom principu, među pet odabranih točaka postoje dvije koje su u istom paru, pa su zato susjedne.

2 boda

Primijetimo da nikoje četiri točke od pet odabranih nisu uzastopne u deveterokutu, jer bi one činile vrhove trapeza.

Zato promotrimo dva slučaja: među pet odabranih točaka postoje tri uzastopne točke i među pet odabranih točaka nikoje tri točke nisu uzastopne.

U prvom slučaju neka su bez smanjenja općenitosti te tri uzastopne točke  $A_1, A_2$  i  $A_3$ . Kako četiri uzastopne točke čine vrhove trapeza,  $A_9$  i  $A_4$  nisu odabrane točke. To znači da su među preostale četiri točke  $A_5, A_6, A_7$  i  $A_8$  dvije odabrane.

1 bod

Te dvije preostale točke nisu uzastopne jer bi s  $A_1$  i  $A_2$  činile vrhove trapeza. Također, dvije preostale točke ne smiju biti odijeljene točno jednom točkom jer bi tada s  $A_1$  i  $A_3$  činile vrhove trapeza. Preostala je mogućnost da su te dvije točke  $A_5$  i  $A_8$ , no one čine vrhove trapeza s točkama  $A_1$  i  $A_3$ .

3 boda

Promotrimo sada drugi slučaj: nikoje tri točke nisu uzastopne. Kako postoji par uzastopnih točaka među odabranima, neka su bez smanjenja općenitosti  $A_1$  i  $A_2$  odabrane točke. Točke  $A_3$  i  $A_9$  nisu odabrane jer bi imali niz triju uzastopnih točaka. To znači da su među preostalih pet točaka  $A_4, A_5, A_6, A_7$  i  $A_8$  tri odabrane.

1 bod

Nikoje dvije odabrane točke od tih pet ne smiju biti uzastopne jer bi s  $A_1$  i  $A_2$  činile vrhove trapeza. Preostaje nam samo mogućnost da su odabrane točke  $A_4, A_6$  i  $A_8$ , no one čine vrhove trapeza s  $A_2$ .

3 boda

Ovime smo došli do kontradikcije, jer ne postoji odabir pet točaka među kojima ne postoje četiri koje čine vrhove trapeza, pa je tvrdnja zadatka dokazana.



## ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

### Zadatak A-2.1.

Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 1.$$

### Rješenje.

Prebacivanjem jednog izraza s lijeve strane jednadžbe na desnu i kvadriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - 2x + 4} &= 1 - \sqrt{x^2 + x + 3} \\ x^2 - 2x + 4 &= 1 - 2\sqrt{x^2 + x + 3} + x^2 + x + 3 && 1 \text{ bod} \\ -3x &= -2\sqrt{x^2 + x + 3} && 3 \text{ boda} \\ 3x &= 2\sqrt{x^2 + x + 3}. \end{aligned}$$

Ponovnim kvadriranjem i sređivanjem imamo

$$\begin{aligned} 9x^2 &= 4(x^2 + x + 3) \\ 9x^2 &= 4x^2 + 4x + 12 \\ 5x^2 - 4x - 12 &= 0. && 3 \text{ boda} \end{aligned}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su  $x_1 = 2$  i  $x_2 = -\frac{6}{5}$ . 1 bod

Uvrštavanjem rješenja  $x = 2$  u početnu jednadžbu vidimo da to jest rješenje. 1 bod

S druge strane, uvrštavanjem  $x = -\frac{6}{5}$  u početnu jednadžbu vidimo da to nije rješenje. 1 bod

Zaključujemo da je jedino rješenje početne jednadžbe  $x = 2$ .

Napomena: Da  $x = -\frac{6}{5}$  nije rješenje početne jednadžbe možemo vidjeti i tako što sigurno ne zadovoljava jednakost  $3x = \sqrt{x^2 + x + 3}$ , jer je jedna strana jednakosti pozitivna, a druga negativna.

Rješenje se može provesti (i bodovati) analogno i ako se na desnu stranu jednakosti ne prebaci član  $\sqrt{x^2 + x + 3}$  nego  $\sqrt{x^2 - 2x + 4}$ .

### Zadatak A-2.2.

Neka je  $a$  realan broj. Ako jednačba  $x^2 - ax + a = 0$  ima dva (ne nužno različita) realna rješenja  $x_1$  i  $x_2$ , dokaži da vrijedi  $x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2)$ .

#### Prvo rješenje.

Iz Vièteovih formula imamo  $x_1 + x_2 = -(-a) = a$  i  $x_1x_2 = a$ . 3 boda

Kvadriranjem izraza  $x_1 + x_2$  imamo

$$a^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2a, \quad 2 \text{ boda}$$

odnosno  $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a$ .

Prema tome, tražena tvrdnja je ekvivalentna tvrdnji  $a^2 - 2a \geq 2a$ , odnosno  $a^2 - 4a \geq 0$ . 1 bod

Diskriminanta kvadratne jednačbe  $x^2 - ax + a$  iznosi  $D = a^2 - 4a$ . 2 boda

Ona je nužno nenegativna (jer jednačba ima realna rješenja). 1 bod

Dakle, nejednakost  $x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2)$  ekvivalentna je nejednakosti  $D \geq 0$ , koja vrijedi, čime je tvrdnja dokazana. 1 bod

#### Drugo rješenje.

Iz Vièteovih formula imamo  $x_1 + x_2 = -(-a) = a$ . 2 boda

Kako su  $x_1$  i  $x_2$  rješenja početne jednačbe, znamo da vrijedi  $x_1^2 = ax_1 - a$  i  $x_2^2 = ax_2 - a$ . 2 boda

Lijeva strana nejednakosti jednaka je

$$x_1^2 + x_2^2 = (ax_1 - a) + (ax_2 - a) = a^2 - 2a, \quad 1 \text{ bod}$$

odnosno, potrebno je dokazati da je  $a^2 - 2a \geq 2a$ , tj.  $a^2 - 4a \geq 0$ . 1 bod

Kao u prvom rješenju vidimo da je ta nejednačba ekvivalentna uvjetu da je diskriminanta nenegativna, čime je tvrdnja dokazana. 4 boda

#### Treće rješenje.

Korištenjem formula za rješenje kvadratne jednačbe

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}, \quad 1 \text{ bod}$$

dobivamo

$$x_1 + x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = a, \quad 2 \text{ boda}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + (a^2 - 4a)) = a^2 - 2a, \quad 2 \text{ boda}$$

odakle je uvjet koji treba dokazati ekvivalentan  $a^2 - 4a \geq 0$ . 1 bod

Kao u prvom rješenju vidimo da je ta nejednačba ekvivalentna uvjetu da je diskriminanta nenegativna, čime je tvrdnja dokazana. 4 boda

### Zadatak A-2.3.

Odredi sve uređene trojke  $(m, n, p)$ , pri čemu su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi, a  $p$  prost broj, za koje vrijedi

$$(2m + 3)(4n + 1) = pmn.$$

#### Prvo rješenje.

Primijetimo da vrijedi  $m \mid (2m + 3)(4n + 1)$ . Kako je  $D(m, 2m + 3) = D(m, 3)$ , razlikujemo mogućnosti  $D(m, 3) = 1$  i  $D(m, 3) = 3$  (odnosno  $3 \mid m$ ).

Pretpostavimo prvo da je  $D(m, 3) = 1$ . Zato  $m$  nužno dijeli  $4n + 1$ . Slično, kako  $n \mid (2m + 3)(4n + 1)$  te kako su  $n$  i  $4n + 1$  relativno prosti brojevi, vrijedi  $n \mid 2m + 3$ . 2 boda

Početnu jednakost možemo zapisati kao

$$\frac{2m + 3}{n} \cdot \frac{4n + 1}{m} = p,$$

gdje je na lijevoj strani dan umnožak dvaju prirodnih brojeva. Kako je  $p$  prost broj, imamo dvije mogućnosti: prvi od njih je 1, a drugi  $p$  ili obratno. 1 bod

U prvom slučaju imamo  $2m + 3 = np$  i  $4n + 1 = m$ . Uvrštavanjem imamo  $2(4n + 1) + 3 = np$ , odnosno  $(p - 8)n = 5$ . Ne može vrijediti  $p - 8 = 1$  jer  $p$  ne bi bio prost broj, pa je jedino moguće rješenje  $n = 1$ ,  $p - 8 = 5$ , odnosno  $p = 13$  i  $m = 5$ . 1 bod

U drugom slučaju je  $2m + 3 = i$  i  $4n + 1 = mp$ . Uvrštavanjem imamo  $4(2m + 3) + 1 = mp$ , odnosno  $m(p - 8) = 13$ . Iz  $p - 8 = 1$  i  $p - 8 = 13$  slijedilo bi  $p = 9$  ili  $p = 21$  što nisu prosti brojevi, pa ovaj slučaj nema rješenja. 1 bod

Pretpostavimo sada da  $3 \mid m$ . Dakle,  $m$  možemo zapisati u obliku  $m = 3k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Sada uvrštavanjem u početnu jednakost i sređivanjem dobivamo  $(2k + 1)(4n + 1) = pkn$ .

Kako je  $D(2k + 1, k) = 1$  i  $D(4n + 1, n) = 1$ , slično kao ranije zaključujemo  $k \mid 4n + 1$  i  $n \mid 2k + 1$ . 2 boda

Zato početnu jednakost možemo zapisati u obliku

$$\frac{2k + 1}{n} \cdot \frac{4n + 1}{k} = p,$$

gdje je na lijevoj strani dan umnožak dvaju prirodnih brojeva, te razlikujemo dva slučaja: prvi od njih je jednak 1, a drugi  $p$  ili obratno. 1 bod

U prvom slučaju je  $2k + 1 = np$  i  $4n + 1 = k$ . Uvrštavanjem slijedi  $2(4n + 1) + 1 = np$  odnosno  $n(p - 8) = 3$ . Jedino rješenje je  $n = 1$ ,  $p - 8 = 3$ , odnosno  $p = 11$ ,  $k = 5$ ,  $m = 15$ . 1 bod

U drugom slučaju je  $2k + 1 = n$  i  $4n + 1 = kp$ , odnosno  $4(2k + 1) + 1 = kp$ ,  $k(p - 8) = 5$ . Slijedi  $k = 1$ ,  $p - 8 = 5$ , odnosno  $p = 13$ ,  $m = 3$ ,  $n = 3$ . 1 bod

Prema tome, sva rješenja su  $(m, n, p) = (5, 1, 13)$ ,  $(15, 1, 11)$  i  $(3, 3, 13)$ .

## Drugo rješenje.

Iz početne jednakosti redom dobivamo

$$\begin{aligned}(2m+3)(4n+1) &= pmn \\ 2m+12n+8mn+3 &= pmn \\ 2m+12n+3 &= (p-8)mn \\ m &= \frac{12n+3}{(p-8)n-2}.\end{aligned}$$

1 bod

Početnu jednakost možemo također zapisati kao

$$p = \frac{2m+3}{m} \cdot \frac{4n+1}{n} = \left(2 + \frac{3}{m}\right) \left(4 + \frac{1}{n}\right).$$

1 bod

Kako recipročna vrijednost prirodnog broja nije veća od 1 niti manja od 0, desna strana gornje jednakosti može se ograničiti između  $(2+0) \cdot (4+0) = 8$  i  $(2+3) \cdot (4+1) = 25$ . Zaključujemo da je  $p$  između 8 i 25. Kako je prost, mogućnosti su  $p = 11, 13, 17, 19, 23$ . 4 boda

Ako je  $p = 11$ , uvrštavanjem imamo  $m = \frac{12n+3}{3n-2} = 4 + \frac{11}{3n-2}$ . Nužno vrijedi  $3n-2 = 1$  ili  $3n-2 = 11$ . U prvom slučaju dobivamo  $n = 1$ ,  $m = 5$ , a u drugom slučaju nema rješenja. 1 bod

Ako je  $p = 13$ , uvrštavanjem imamo  $m = \frac{12n+3}{5n-2} = 2 + \frac{2n+7}{5n-2}$ . Primijetimo da je za  $n \geq 4$  nazivnik veći od brojnika pa rezultat nije cijeli broj. Za  $n = 1$  slijedi  $m = 15$ , za  $n = 2$  rezultat nije cijeli broj, a za  $n = 3$  dobivamo  $m = 3$ . 1 bod

Ako je  $p = 17$ , slijedi  $m = \frac{12n+3}{9n-2} = 1 + \frac{3n+5}{9n-2}$ . Za  $n = 1$  rezultat nije cijeli broj, a uza  $n \geq 2$  nazivnik je veći od brojnika, pa ovaj slučaj nema rješenja. 1 bod

Ako je  $p = 19$ , imamo  $m = \frac{12n+3}{11n-2} = 1 + \frac{n+5}{11n-2}$ , pa ovaj slučaj nema rješenja jer je nazivnik veći od brojnika za sve  $n \in \mathbb{N}$ . Slično, ako je  $p = 23$ , uvrštavanjem imamo  $m = \frac{12n+3}{15n-2} = 1 - \frac{3n-5}{15n-2}$ , pa iz istog razloga nema rješenja. 1 bod

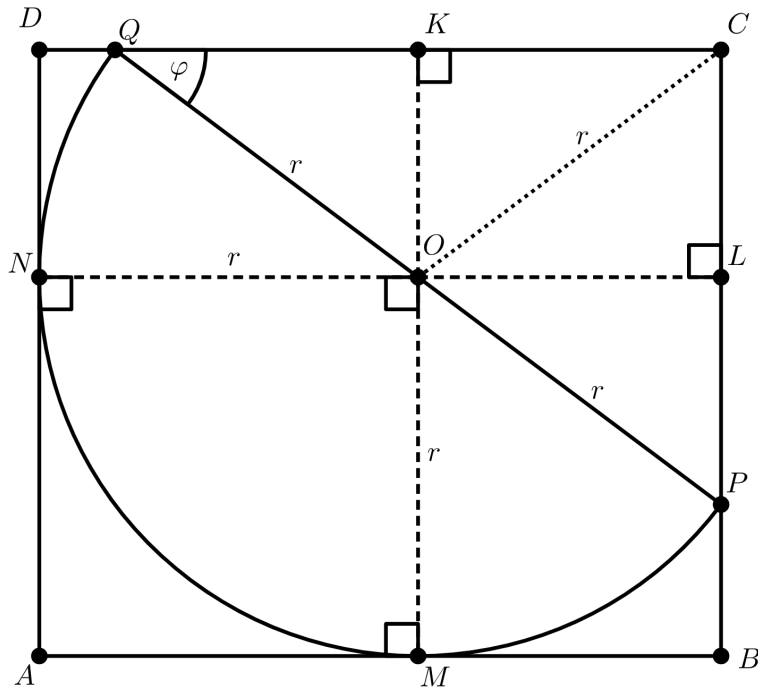
Prema tome, sva rješenja su  $(m, n, p) = (15, 1, 11), (5, 1, 13)$  i  $(3, 3, 13)$ .

**Napomena:** U slučaju da učenici nisu ostvarili bodove na drugačiji način, sva pogodena rješenja bez dokaza da su to sva nose **2 boda**, a dva pogodena rješenja nose **1 bod**.

## Zadatak A-2.4.

Polukrug promjera  $\overline{PQ}$  upisan je u pravokutnik  $ABCD$  i dira njegove stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{AD}$ . Pritom se točka  $P$  nalazi na stranici  $\overline{BC}$ , a točka  $Q$  na stranici  $\overline{CD}$ . Ako je  $|BP| = 2$  i  $|DQ| = 1$ , odredi  $|PQ|$ .

**Prvo rješenje.**



Neka je  $O$  središte, a  $r$  radijus danog polukruga. Neka su točke  $K$ ,  $L$ ,  $M$  i  $N$  ortogonalne projekcije točke  $O$  na stranice  $\overline{CD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  i  $\overline{AD}$  redom. Neka je  $\varphi$  mjera kuta  $\angle CQP$ .

Kako je spojnica središta i dirališta polukruga okomita na stranicu koju taj polukrug dira, točke  $M$  i  $N$  upravo su dirališta polukruga i stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{AD}$ . Posebno,  $|OM| = |ON| = r$ . U četverokutu  $AMON$  kutovi pri vrhovima  $A$ ,  $M$  i  $N$  su pravi, pa je taj četverokut kvadrat stranice duljine  $r$ .

1 bod

U pravokutnom trokutu  $QKO$  vrijedi  $|QK| = r \cos \varphi$ .

1 bod

Slično, u pravokutnom trokutu  $PLO$  imamo  $|PL| = r \sin \varphi$ .

1 bod

Promotrimo četverokut  $OKDN$ . To je pravokutnik jer su kutovi pri vrhovima  $K$ ,  $D$  i  $N$  pravi. Zato vrijedi  $|DK| = |ON|$ , odakle je

$$1 + r \sin \varphi = |DQ| + |QK| = |DK| = |ON| = r.$$

2 boda

Slično, iz pravokutnika  $LOMB$  dobivamo  $2 + r \cos \varphi = r$ .

1 bod

Zapišemo li te jednadžbe kao

$$r \sin \varphi = r - 1, \quad r \cos \varphi = r - 2,$$

kvadriramo i zbrojimo, dobivamo

$$\begin{aligned} r^2 &= (r - 1)^2 + (r - 2)^2, \\ 0 &= r^2 - 6r + 5. \end{aligned}$$

1 bod

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su  $r = 1$  i  $r = 5$ .

1 bod

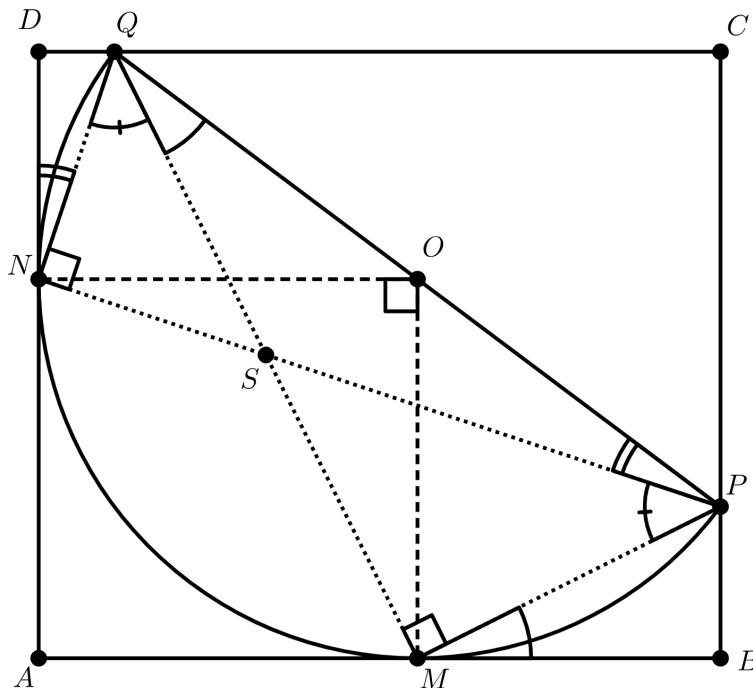
Rješenje  $r = 1$  odbacujemo jer u tom slučaju iz jednadžbe  $r \cos \varphi = r - 2$  dobivamo  $\cos \varphi = -1$ , što je nemoguće ako je  $\varphi$  mjera šiljastog kuta pravokutnog trokuta  $PCQ$ .

1 bod

Dakle,  $r = 5$ , pa je  $|PQ| = 2r = 10$ .

1 bod

**Drugo rješenje.**



Definirajmo točke  $M$ ,  $N$  i  $O$  kao u prošlom rješenju, te neka je  $S$  sjecište pravaca  $NP$  i  $QM$ . Neka  $x$  i  $y$  označavaju duljine dužina  $\overline{PM}$  i  $\overline{QN}$  redom.

Promotrimo trokute  $QMP$  i  $MBP$ . To su pravokutni trokuti (prema Talesovom teoremu svaki kut nad promjerom  $\overline{PQ}$  je pravi).

Nadalje, pravac  $AB$  tangenta je na taj polukrug, pa prema teoremu o kutu između tetive i tangente vrijedi  $\sphericalangle PMB = \sphericalangle PQM$ .

1 bod

Zaključujemo da su dva para kuta tih trokuta jednaka, pa su trokuti slični prema K–K poučku o sličnosti.

Zato vrijedi  $\frac{|PB|}{|PM|} = \frac{|PM|}{|PQ|}$ , odakle je  $|PQ| = \frac{x^2}{2}$ .

1 bod

Analogno, trokuti  $DQN$  i  $QNP$  su slični i vrijedi  $|PQ| = y^2$ .

1 bod

Posebno zaključujemo da je  $x = y\sqrt{2}$ .

1 bod

Kao u prošlom rješenju zaključujemo da je  $AMON$  kvadrat, pa je  $\sphericalangle MON = 90^\circ$ .

1 bod

Promotrimo trokute  $SMP$  i  $SNQ$ . To su pravokutni trokuti s pravim kutom pri vrhovima  $M$  i  $N$ . Dodatno, prema teoremu o obodnom i središnjem kutu imamo

$$\sphericalangle NPM = \sphericalangle NQM = \frac{\sphericalangle NOM}{2} = 45^\circ.$$

1 bod

Zato su trokuti  $SMP$  i  $SNQ$  su jednakokračni pravokutni, pa je posebno  $|QS| = y\sqrt{2} = x$  i  $|MS| = x$ .

2 boda

Primijenimo Pitagorin poučak na trokut  $QMP$ . Kako je  $|QM| = |QS| + |SM| = 2x$ , slijedi

$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= |QM|^2 + |MP|^2 \\ \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 &= (2x)^2 + x^2 \\ \frac{1}{4}x^4 &= 5x^2 \\ x^2 &= 20.\end{aligned}$$

1 bod

Konačno, zaključujemo  $|PQ| = \frac{x^2}{2} = 10$ .

1 bod

### Zadatak A-2.5.

Koliko ima prirodnih brojeva čiji zapis u dekadskome sustavu sadržava svaku od deset znamenaka 0, 1, 2, ..., 9 točno jednom, a svaka je znamenka, osim znamenke 9, manja od barem jedne njoj susjedne znamenke?

#### Rješenje.

Nazovimo *dobrim* deseteroznamenaste brojeve koji zadovoljavaju uvjete zadatka. Cilj je naći broj dobrih brojeva. Neka *blok* označava niz susjednih znamenaka dobrog broja.

Promotrimo znamenku 8. Kako bi znamenka 8 imala susjednu znamenku koja je veća od nje, znamenke 8 i 9 moraju činiti blok.

1 bod

Promotrimo sada znamenku 7. Jedine znamenke koje su veće od nje su 8 i 9, pa jedna od njih mora biti njoj susjedna. Kako 8 i 9 čine blok, zaključujemo da znamenke 7, 8 i 9 čine blok. Kako se 7 ne smije naći između znamenaka 8 i 9, mora se naći neposredno lijevo od bloka koje čine znamenke 8 i 9 ili neposredno desno od tog bloka.

2 boda

Za svaku sljedeću znamenku (6, 5, 4, 3, 2 i 1) slično zaključujemo da se mora naći neposredno lijevo ili neposredno desno uz blok koji čine znamenke veće od nje.

3 boda

Poziciju svake znamenke od 8 naniže možemo odabrati na dva načina (lijevo ili desno uz blok znamenaka većih od nje).

2 boda

Konačno, znamenku 0 također možemo smjestiti uz postojeći blok svih preostalih znamenaka, ali ne može doći lijevo od tog bloka jer broj ne smije početi znamenkom nula.

1 bod

Zato ukupno imamo  $2^8 = 256$  dobrih brojeva.

1 bod

## ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

**AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.**

### Zadatak A-3.1.

Za koje realne brojeve  $x$  vrijedi

$$5^{2x} + 4^x < 29 \cdot 10^{x-1}?$$

### Rješenje.

Podijelimo početnu nejednadžbu s  $10^x$  i sredimo izraz na lijevoj strani nejednadžbe. Kako je  $10^x$  uvijek pozitivan broj, smjer nejednakosti se ne mijenja. Redom slijedi

$$\begin{aligned} \frac{5^{2x}}{10^x} + \frac{4^x}{10^x} &< \frac{29}{10} \\ \frac{5^x}{2^x} + \frac{2^x}{5^x} &< \frac{29}{10}. \end{aligned} \quad 3 \text{ boda}$$

Uvođenjem supstitucije  $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$  gornja nejednadžba postaje  $t + \frac{1}{t} < \frac{29}{10}$ . 1 bod

Pomnožimo gornju nejednadžbu sa  $10t$ . Nejednakost se ponovno ne mijenja jer je  $10t > 0$ . Dobivamo kvadratnu nejednadžbu  $10t^2 - 29t + 10 < 0$ . 3 boda

Rješenje kvadratne nejednadžbe je  $t \in \left\langle \frac{2}{5}, \frac{5}{2} \right\rangle$ . 1 bod

Iz supstitucije  $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$  slijedi  $\left(\frac{5}{2}\right)^x \in \left\langle \frac{2}{5}, \frac{5}{2} \right\rangle$ , odnosno

$$\frac{2}{5} < \left(\frac{5}{2}\right)^x < \frac{5}{2}.$$

Primjenom  $\log_{\frac{5}{2}}$  na gornje nejednakosti slijedi  $-1 < x < 1$  (baza logaritma je veća od 1 pa se nejednakost ne mijenja), odakle dobivamo konačno rješenje  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . 2 boda

**Napomena:** Rješenje se moglo provesti tako da se početna nejednadžba podijelila s  $4^x$  ili  $5^{2x}$ .

Ako učenici u rješenju ne komentiraju da se nejednakost ne mijenja primjenom logaritma s pozitivnom bazom ili množenjem s pozitivnim brojem koji ovisi o nepoznanici, gube po 1 bod za svaku takvu nejednakost, a ukupno najviše 2 boda.

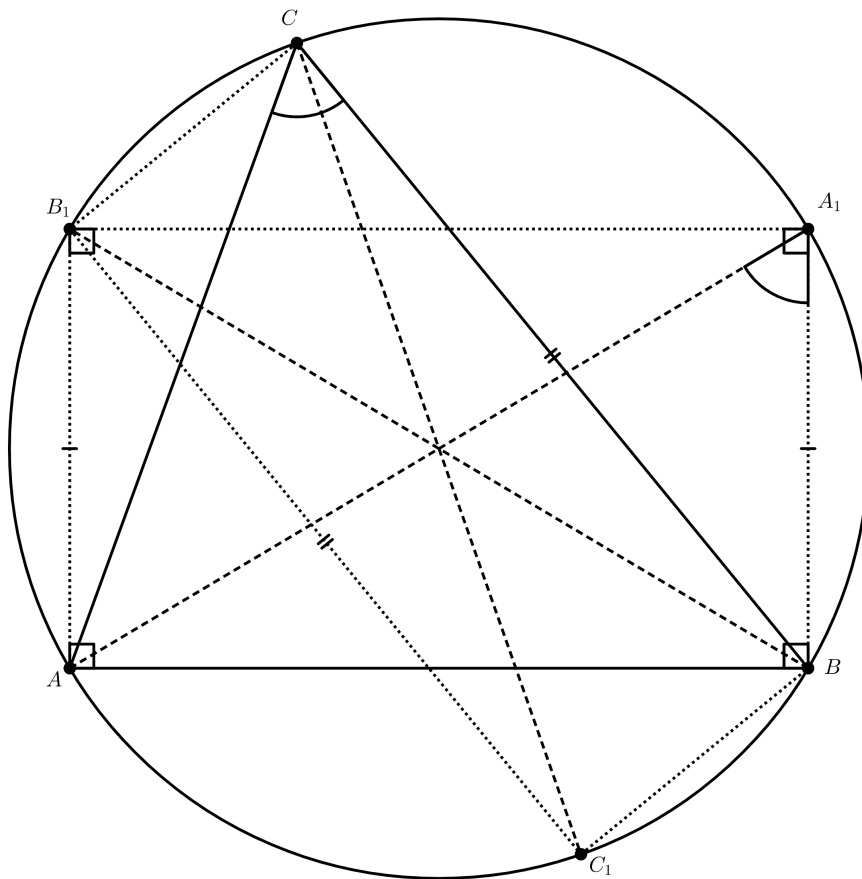


### Zadatak A-3.2.

Neka su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  točke na opisanoj kružnici šiljastokutnog trokuta  $ABC$  takve da su  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{BB_1}$  i  $\overline{CC_1}$  promjeri te kružnice. Dokaži da vrijedi

$$|A_1B| \cdot |B_1B| + |B_1C| \cdot |C_1A| = |AC| \cdot |BC|.$$

**Prvo rješenje.**



Neka su  $a$ ,  $b$  i  $c$  duljine stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  redom, te neka su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  mjere kutova pri vrhovima  $A$ ,  $B$  i  $C$  redom. Neka je  $k$  opisana kružnica trokuta  $ABC$ , a  $R$  njezin radijus.

Kako je  $\overline{AA_1}$  promjer kružnice  $k$ , vrijedi  $|AA_1| = 2R$ . Nadalje, vrijedi  $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle ACB = \gamma$  jer su to obodni kutovi nad istom tetivom.

1 bod

Prema Talesovom poučku trokut kut  $\sphericalangle B_1AB$  je pravi, pa slijedi

$$|A_1B| = |AA_1| \cos \sphericalangle AA_1B = 2R \cos \gamma.$$

2 boda

Analogno je  $|B_1C| = 2R \cos \alpha$  i  $|C_1A| = 2R \cos \beta$ .

1 bod

Prema poučku o sinusima vrijedi  $a = 2R \sin \alpha$  i  $b = 2R \sin \beta$ .

2 boda

Uvrštavanjem gornjih jednakosti i  $|B_1B| = 2R$  u jednakost iz tvrdnje zadatka slijedi da je potrebno dokazati

$$\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta.$$

1 bod

Ta jednakost slijedi iz adicijske formule za kosinus:

$$\cos \gamma = \cos (180^\circ - \alpha - \beta) = -\cos (\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta. \quad 3 \text{ boda}$$

Time je tvrdnja zadatka dokazana

### Drugo rješenje.

Koristimo oznake kao u prošlom rješenju.

Primjenom Talesovog poučka na promjere  $\overline{AA_1}$  i  $\overline{BB_1}$  zaključujemo da su svi kutovi u četverokutu  $ABA_1B_1$  pravi, pa je to pravokutnik. Zato je  $|AB_1| = |BA_1|$ . 2 boda

Analogno,  $BCB_1C_1$  je pravokutnik, pa je  $|B_1C_1| = |BC|$ . 2 boda

Primjenom Ptolomejevog teorema na tetivni četverokut  $AC_1CB_1$  dobivamo

$$|AC_1| \cdot |B_1C| + |C_1C| \cdot |AB_1| = |AC| \cdot |B_1C_1|. \quad 5 \text{ bodova}$$

Uvrštavanjem gornjih jednakosti i korištenjem  $|C_1C| = |B_1B| = 2R$  (promjeri kružnice) slijedi tvrdnja zadatka. 1 bod

### Zadatak A-3.3.

Odredi sve uređene trojke prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  za koje je  $2^a + 2^b + 2^c + 3$  kvadrat nekoga prirodnog broja.

#### Rješenje.

Budući da je izraz  $2^a + 2^b + 2^c + 3$  simetričan u  $a, b$  i  $c$  možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je  $a \leq b \leq c$ .

Ako je  $a \geq 2$ , tada  $2^a + 2^b + 2^c + 3$  daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4 i stoga ne može biti kvadrat prirodnog broja. Dakle, mora biti  $a = 1$ . 1 bod

Nadalje, ako je  $b \geq 3$ , tada  $2^a + 2^b + 2^c + 3 = 2^b + 2^c + 5$  daje ostatak 5 pri dijeljenju s 8 pa zbog toga ne može biti kvadrat prirodnog broja. 1 bod

Preostaje provjeriti slučajeve kada je  $b = 1$  i  $b = 2$ .

Ako je  $b = 1$ , tada  $2^a + 2^b + 2^c + 3 = 2^c + 7$  mora biti potpuni kvadrat.

Ako je  $c \geq 2$ , tada će  $2^c + 7$  dati ostatak 3 pri dijeljenju s 4 i zbog toga  $2^c + 7$  neće biti potpun kvadrat. 1 bod

Direktnom provjerom vidimo da za  $c = 1$  dobivamo rješenje, jer je  $2^1 + 2^1 + 2^1 + 3 = 9$  potpun kvadrat. 1 bod

Ako je  $b = 2$ , tada  $2^a + 2^b + 2^c + 3 = 2^c + 9$  mora biti potpuni kvadrat, tj.  $2^c + 9 = k^2$  za neki prirodni broj  $k$ . Koristeći razliku kvadata, jednadžbu zapišimo kao

$$2^c = k^2 - 9 = (k - 3)(k + 3). \quad 1 \text{ bod}$$

Iz gornje jednakosti slijedi da su  $k - 3$  i  $k + 3$  potencije od 2, tj.  $k - 3 = 2^{c_1}$  i  $k + 3 = 2^{c_2}$  pri čemu su  $c_1$  i  $c_2$  nenegativni cijeli brojevi takvi da je  $c = c_1 + c_2$  i  $c_1 < c_2$ . 2 boda

Oduzimanjem tih jednakosti slijedi

$$6 = 2^{c_2} - 2^{c_1} = 2^{c_1}(2^{c_2-c_1} - 1)$$

iz čega zaključujemo da je  $c_1 = 1$  i  $c_2 = 3$ , odnosno  $c = 4$ . U tom slučaju je  $k = 5$ . 2 boda

Dakle, uz pretpostavku  $a \leq b \leq c$  imamo da su rješenja  $(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 2, 4)$ .

Sve moguće trojke brojeva  $(a, b, c)$  dobivamo permutiranjem gornjih rješenja:

$$(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 4, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1). \quad 1 \text{ bod}$$

### Zadatak A-3.4.

Dokaži da je zbroj

$$\frac{\cos 3^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \frac{\cos 5^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos 89^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ}$$

jednak

$$\frac{\sin 2^\circ - 1}{4 \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ}.$$

### Rješenje.

Označimo

$$S = \frac{\cos 3^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos 89^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ}.$$

Pomnožimo cijeli izraz za  $S$  sa  $\sin 1^\circ$ , dobivamo

$$\sin 1^\circ \cdot S = \frac{\cos 3^\circ \sin 1^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)^\circ \sin 1^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos 89^\circ \sin 1^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ}. \quad 2 \text{ boda}$$

Opći član sume u izrazu za  $\sin 1^\circ \cdot S$  je oblika  $\frac{\cos(2n+1)^\circ \sin 1^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ}$ .

Primjenom formule pretvorbe za razliku kosinusa nazivnik možemo zapisati kao

$$\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ = -2 \sin(2n+2)^\circ \sin(2n)^\circ. \quad 2 \text{ boda}$$

Primjenom formule pretvorbe za produkt sinusa i kosinusa brojnik možemo zapisati kao

$$\cos(2n+1)^\circ \sin 1^\circ = \frac{1}{2} (\sin(2n+2)^\circ - \sin(2n)^\circ). \quad 2 \text{ boda}$$

Ovime opći član u sumi možemo zapisati kao

$$\frac{\cos(2n+1)^\circ \sin 1^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} = \frac{\sin(2n+2)^\circ - \sin(2n)^\circ}{-4 \sin(2n+2)^\circ \sin(2n)^\circ} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sin(2n+2)^\circ} - \frac{1}{\sin(2n)^\circ} \right). \quad 2 \text{ boda}$$

Uvrštavanjem u izraz za  $\sin 1^\circ \cdot S$  redom imamo

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ \cdot S &= \frac{\cos 3^\circ \sin 1^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \frac{\cos 5^\circ \sin 1^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 2^\circ} + \frac{\cos 89^\circ \sin 1^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sin 4^\circ} - \frac{1}{\sin 2^\circ} + \frac{1}{\sin 6^\circ} - \frac{1}{\sin 4^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 90^\circ} - \frac{1}{\sin 88^\circ} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\sin 2^\circ} \right). \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Konačno slijedi da je  $S = \frac{\sin 2^\circ - 1}{4 \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ}$ , što je trebalo dokazati.

### Zadatak A-3.5.

Na karticama su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do  $2024^2$ . Zbroj svih tih brojeva iznosi  $2024A$ . Manuel je odabrao 2024 kartice s brojevima čiji je zbroj jednak  $A$ . Dokaži da Neva može preostale kartice rasporediti u 2023 skupine tako da u svakoj skupini budu po 2024 kartice i da zbroj brojeva na karticama u svakoj skupini bude jednak  $A$ .

#### Rješenje.

Kako je zbroj svih brojeva od 1 do  $2024^2$  jednak  $\frac{2024^2(2024^2 + 1)}{2}$ , zaključujemo da je  $A = 1012(2024^2 + 1)$ .

1 bod

Raspodijelimo sve brojeve od 1 do  $2024^2$  u parove

$$(1, 2024^2), \quad (2, 2024^2 - 1), \quad (3, 2024^2 - 2), \quad \dots$$

tako da je svaki broj u točno jednom paru, te da je zbroj elemenata svakog para jednak  $2024^2 + 1$ .

3 boda

Posebno, suma elemenata bilo kojih 1012 parova iznosi  $A$ .

Pretpostavimo da je u  $n$  parova (za neki  $n \in \mathbb{N}_0$ ) Manuel odabrao oba broja među svoje 2024 kartice, te da je u  $m$  parova (za neki  $m \in \mathbb{N}_0$ ) odabrao samo jedan broj među svoje 2024 kartice. Kako je odabrao 2024 broja, vrijedi  $2n + m = 2024$ .

Neka Neva u prvom potezu u jednu skupinu smjesti preostale članove  $m$  Manuelovih parova, te  $2n$  brojeva iz bilo kojih  $n$  do sada neiskorištenih parova. Kako su sada Neva i Manuel odabrali ukupno 4048 brojeva iz  $2n + m = 2024$  parova, njihova ukupna suma je  $2A$ . Kako je zbroj Manuelovih brojeva jednak  $A$ , zaključujemo da je i zbroj elemenata prve Nevine skupine jednak  $A$ .

3 boda

Nakon prvog poteza ne postoji par u kojem jedan broj jest odabran, a drugi nije. To znači da Neva može preostale brojeve razvrstati u skupine tako da u svaku od njih smjesti elemente bilo kojih 1012 parova. Tako će zbroj elemenata svake skupine iznositi  $A$ , čime je tvrdnja zadatka dokazana.

3 boda

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

## Zadatak A-4.1.

Dokaži da svi članovi niza

$$a_1 = 4 \cdot 2024^1 - 2024, \quad a_2 = 4 \cdot 2024^2 - 20244, \quad \dots, \quad a_n = 4 \cdot 2024^n - \underbrace{2024 \dots 4}_{n \text{ puta}}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N},$$

daju ostatak 11 pri dijeljenju s 19.

### Prvo rješenje.

Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom. Baza indukcije zadovoljena je za  $n = 1$  jer je  $a_1 = 3 \cdot 2024 = 319 \cdot 19 + 11$ .

1 bod

Pretpostavimo sada da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi da  $a_n$  daje ostatak 11 pri dijeljenju s 19, odnosno  $19 \mid a_n - 11$ .

Za korak indukcije, primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4 \cdot 2024^{n+1} - \underbrace{2024 \dots 4}_{n+1 \text{ puta}} \\ &= 2024 \cdot 4 \cdot 2024^n - 10 \cdot \underbrace{2024 \dots 4}_{n \text{ puta}} - 4 \\ &= 10(4 \cdot 2024^n - \underbrace{2024 \dots 4}_{n \text{ puta}}) + 2014 \cdot 4 \cdot 2024^n - 4 \\ &= 10a_n + 2014 \cdot 4 \cdot 2024^n - 4. \end{aligned}$$

3 boda

Kako je 2014 djeljiv s 19, broj  $2014 \cdot 4 \cdot 2024^n$  je oblika  $19k$ , za neki  $k \in \mathbb{N}$ . Dalje imamo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 10a_n + 19k - 4 \\ &= 10(a_n - 11) + 19k + 10 \cdot 11 - 4 \\ &= 10(a_n - 11) + 19k + 106. \end{aligned}$$

3 boda

Prema pretpostavci indukcije, broj  $a_n - 11$  djeljiv je s 11. Zato  $a_{n+1}$  i broj 106 daju isti ostatak pri dijeljenju s 19. Kako je  $106 = 5 \cdot 19 + 11$ , dokaz koraka je gotov.

3 boda

Principom matematičke indukcije dokazali smo tvrdnju, a time je dokazana i tvrdnja zadatka.

### Drugo rješenje.

Članovi niza  $a_n$  mogu se zapisati kao

$$a_n = 4 \cdot 2024^n - 202 \cdot 10^n - 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9}. \quad 3 \text{ boda}$$

Dokažimo da je za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $19 \mid a_n - 11$ .

Kako 2024 i 10 daju isti ostatak pri dijeljenju s 19, isto vrijedi i za brojeve  $2024^n$  i  $10^n$ . 1 bod

Također, broj 202 daje ostatak 12 pri dijeljenju s 19. Zato će broj  $a_n - 11$  biti djeljiv s 19 ako je s 19 djeljiv broj

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10^n - 12 \cdot 10^n - 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} - 11 &= \frac{-72 \cdot 10^n - 4 \cdot 10^n + 4 - 99}{9} & 3 \text{ boda} \\ &= \frac{-76 \cdot 10^n - 95}{9} \\ &= -\frac{19(4 \cdot 10^n + 5)}{9}. & 2 \text{ boda} \end{aligned}$$

Broj na kraju niza jednakosti cijeli je broj (budući da je i broj s kojim smo krenuli cijeli) kojem je nazivnik djeljiv s 19, a brojnik relativno prost s 19, pa zaključujemo da je taj broj višekratnik broja 19, što je i trebalo dokazati. 1 bod

### Treće rješenje.

Članovi niza  $a_n$  mogu se zapisati kao

$$a_n = 4 \cdot 2024^n - 202 \cdot 10^n - 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9}. \quad 3 \text{ boda}$$

Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom. Baza indukcije zadovoljena je za  $n = 1$  jer je  $a_1 = 3 \cdot 2024 = 319 \cdot 19 + 11$ . 1 bod

Pretpostavimo sada da za neki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi da  $a_n$  daje ostatak 11 pri dijeljenju s 19.

Za korak indukcije dokažimo da i  $a_{n+1}$  daje ostatak 11 pri dijeljenju s 19, a za to je dovoljno dokazati da  $19 \mid a_{n+1} - a_n$ . Primijetimo da je

$$a_{n+1} - a_n = 4 \cdot 2023 \cdot 2024^n - 202 \cdot 9 \cdot 10^n - 4 \cdot 10^n. \quad 2 \text{ boda}$$

Kako 2024 i 10 daju isti ostatak pri dijeljenju s 19, isto vrijedi i za brojeve  $2024^n$  i  $10^n$ . 1 bod

Zato razlika  $a_{n+1} - a_n$  pri dijeljenju s 19 daje isti ostatak kao broj

$$4 \cdot 2023 \cdot 10^n - 202 \cdot 9 \cdot 10^{n-1} - 4 \cdot 10^{n-1} = 6270 \cdot 10^n. \quad 2 \text{ boda}$$

Kako je  $6270 = 33 \cdot 19$ , razlika  $a_{n+1} - a_n$  djeljiva je s 19, što smo i htjeli dokazati. Time smo korak indukcije, pa je tvrdnja zadatka dokazana principom matematičke indukcije. 1 bod

**Zadatak A-4.2.**

Neka su  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  različite nultočke polinoma  $P(x) = x^3 - 3x + 1$ . Odredi

$$\frac{1}{x_1^2 - 3} + \frac{1}{x_2^2 - 3} + \frac{1}{x_3^2 - 3}.$$

**Prvo rješenje.**

Za nultočku  $x_1$  polinoma  $P$  vrijedi

$$\begin{aligned} x_1^3 - 3x_1 + 1 &= 0 \\ x_1^3 - 3x_1 &= -1 && 1 \text{ bod} \\ x_1^2 - 3 &= -\frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_1^2 - 3} &= -x_1. && 4 \text{ boda} \end{aligned}$$

Analogno vrijedi i za  $x_2$  i  $x_3$ , pa za traženi izraz vrijedi

$$\frac{1}{x_1^2 - 3} + \frac{1}{x_2^2 - 3} + \frac{1}{x_3^2 - 3} = -(x_1 + x_2 + x_3). \quad 3 \text{ boda}$$

Po Viéteovom formuli je  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , pa je taj izraz jednak nuli. 2 boda

**Drugo rješenje.**

Svedimo izraz na zajednički nazivnik:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_1^2 - 3} + \frac{1}{x_2^2 - 3} + \frac{1}{x_3^2 - 3} \\ &= \frac{(x_1^2 - 3)(x_2^2 - 3) + (x_1^2 - 3)(x_3^2 - 3) + (x_2^2 - 3)(x_3^2 - 3)}{(x_1^2 - 3)(x_2^2 - 3)(x_3^2 - 3)} \\ &= \frac{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 - 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 27}{(x_1^2 - 3)(x_2^2 - 3)(x_3^2 - 3)}. \end{aligned} \quad 1 \text{ bod}$$

Po Viéteovim formulama vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 &= -3. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Koristeći te formule, dobivamo

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 6, && 3 \text{ boda} \\ x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 &= (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2 - 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 9. && 3 \text{ boda} \end{aligned}$$

Zato za brojnik traženog izraza vrijedi

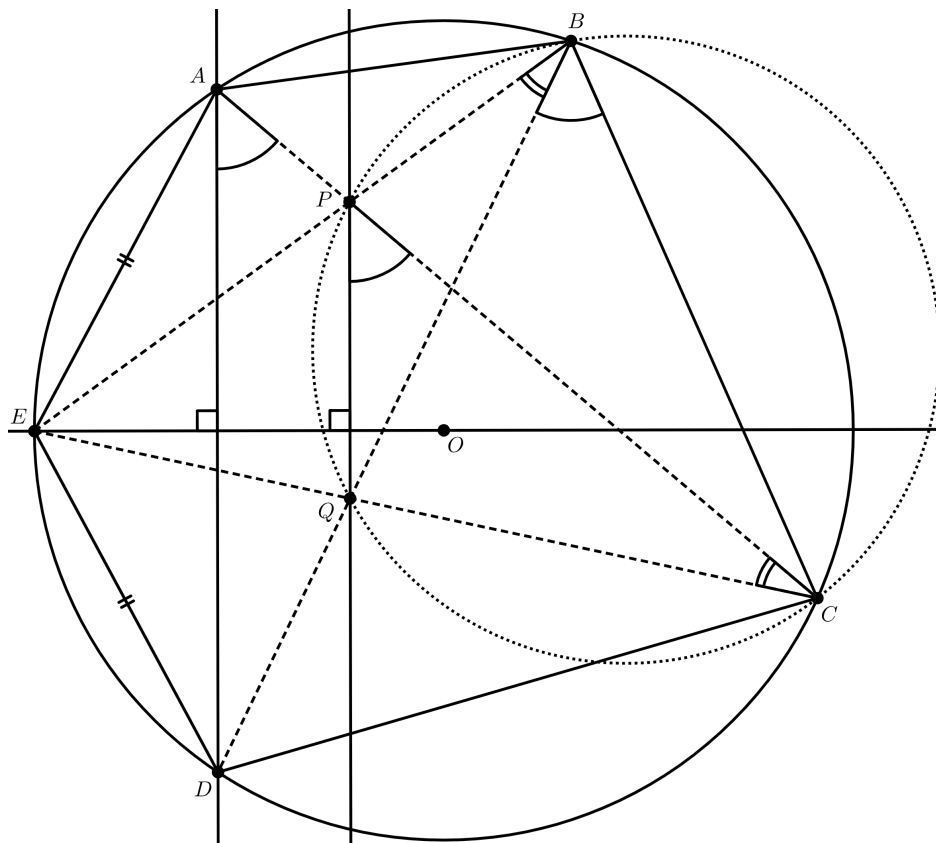
$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 - 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 27 = 9 - 6 \cdot 6 + 27 = 0,$$

pa je traženi izraz jednak 0. 1 bod

### Zadatak A-4.3.

Neka je  $ABCDE$  peterokut upisan u kružnicu sa središtem  $O$ . Dužine  $\overline{AC}$  i  $\overline{EB}$  sijeku se u točki  $P$ , a dužine  $\overline{BD}$  i  $\overline{EC}$  u točki  $Q$ . Ako su pravci  $PQ$  i  $AD$  međusobno paralelni, dokaži da je pravac  $EO$  okomit na ta dva pravca.

### Rješenje.



Kako su pravci  $AD$  i  $PQ$  paralelni, vrijedi  $\sphericalangle QPC = \sphericalangle DAC$ .

1 bod

Promatrajući kutove nad tetivom  $\overline{DC}$  zaključujemo  $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = \sphericalangle QBC$ .

1 bod

Kako vrijedi  $\sphericalangle QPC = \sphericalangle QBC$ , zaključujemo da je četverokut  $BPQC$  tetivan.

3 boda

Promatrajući tetivu  $\overline{PQ}$  u tom četverokutu dobivamo

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle PCQ = \sphericalangle ACE.$$

1 bod

Kako su kutovi nad tetivama  $\overline{AE}$  i  $\overline{DE}$  tetivnog peterokuta  $ABCDE$  jednaki, zaključujemo da je  $|AE| = |DE|$ .

2 boda

Točka  $E$  jednako je udaljena od krajnjih točaka dužine  $\overline{AD}$ , pa leži na simetrali te dužine. No, isto to vrijedi i za točku  $O$ , pa je pravac  $EO$  simetrala dužine  $\overline{AD}$  i okomit je na  $AD$ , što je i trebalo dokazati.

2 boda



#### Zadatak A-4.4.

Odredi sve proste brojeve  $p$  za koje postoji točno pet prirodnih brojeva  $n$  takvih da je  $n + p \mid n^3 + p^2$ .

##### Prvo rješenje.

Zbroj kubova  $n^3 + p^3 = (n + p)(n^2 - np + p^2)$  djeljiv je s  $n + p$ . Kako je prema uvjetu zadatka  $n^3 + p^2$  djeljivo s  $n + p$ , ekvivalentno tome je da je i

$$(n^3 + p^3) - (n^3 + p^2) = p^3 - p^2 = p^2(p - 1)$$

djeljivo s  $n + p$ .

1 bod

Pretpostavimo da postoje  $n$  i  $p$  takvi da  $n + p \mid p^2(p - 1)$  i da  $n$  nije djeljiv s  $p$ . Tada su  $n$  i  $p$  relativno prosti, a zato su  $n + p$  i  $p$  također relativno prosti.

1 bod

Zato nužno vrijedi  $n + p \mid p - 1$ , što je nemoguće jer je  $n + p > p - 1 > 0$ . Dakle,  $n$  mora biti djeljiv s  $p$ .

2 boda

Zaključujemo da postoji  $k \in \mathbb{N}$  takav da je  $n = kp$ . Naći sve proste  $p$  za koje postoji pet prirodnih bojeva iz uvjeta zadatka sada je ekvivalentno problemu naći sve proste  $p$  za koje postoji pet prirodnih brojeva  $k$  za koje vrijedi

$$k + 1 \mid p(p - 1).$$

1 bod

Broj  $k$  zadovoljava taj uvjet ako i samo ako je oblika  $d - 1$ , gdje je  $d$  djeliteľ broja  $p(p - 1)$  koji je veći od 1. Kako je 1 djeliteľ svakog broja, potrebno je naći sve  $p$  za koje izraz  $p(p - 1)$  ima točno 6 prirodnih djeliteľja.

2 boda

Lako vidimo da  $p$  ne može biti jednak 2 i 3, te da  $p = 5$  jest rješenje jer broj  $p(p - 1) = 20$  ima šest djeliteľja.

1 bod

Pretpostavimo sad da je  $p \geq 7$ . Tada je  $p - 1 = 2m$  za neki prirodan  $m \geq 3$ . No u tom slučaju broj  $p(p - 1) = 2m(2m + 1)$  ima barem osam različitih djeliteľja:

$$1, 2, m, 2m, 2m + 1, 2(2m + 1), m(2m + 1), 2m(m + 1),$$

pa za  $p \geq 7$  ne dobivamo nova rješenja.

2 boda

Zaključujemo da je  $p = 5$  jedini prost broj koji zadovoljava uvjet zadatka.

##### Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju zaključujemo da je potrebno pronaći sve proste brojeve  $p$  za koje izraz  $p(p - 1)$  ima točno 6 prirodnih djeliteľja.

7 bodova

Za prirodan broj  $m$  vrijedi formula za broj prirodnih djeliteľja prirodnog broja

$$\tau(m) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

gdje je  $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$  rastav tog broja na proste faktore. Kako su  $p$  i  $p - 1$  relativno prosti, a  $\tau(p) = 2$ , koristeći tu formulu za  $p(p - 1)$  zaključujemo da je nužno  $\tau(p - 1) = 3$ . Umnožak s desne strane formule za  $\tau(m)$  može biti jednak 3 samo ako je jedna od tih zagrada jednaka 3, a sve ostale 1, tj. kada je  $m$  jednak kvadratu prostog broja. Dakle, postoji prost broj  $q$  takav da je  $p - 1 = q^2$ .

2 boda

Promatrajući tu jednadžbu vidimo da su  $p$  i  $q$  različite parnosti, što je moguće samo ako je jedan od njih jednak 2. U slučaju  $p = 2$  ne dobivamo rješenje, dok u slučaju  $q = 2$  dobivamo jedino rješenje  $p = 5$ .

1 bod

### Zadatak A-4.5.

Odredi (ako postoji) najveći prirodni broj koji se ne može prikazati kao zbroj nekih, ne nužno različitih, elemenata skupa  $\{135, 136, 137, \dots, 144\}$ .

#### Prvo rješenje.

Reći ćemo da je prirodan broj *prikaziv* ako se može zapisati kao zbroj nekih, ne nužno različitih, elemenata skupa  $\{135, 136, 137, \dots, 144\}$ . Označimo skup sa  $S$  skup dozvoljenih pribrojnika  $\{135, 136, 137, \dots, 144\}$  sa  $S$  i definirajmo skupove

$$S_k = \{135k, 135k + 1, \dots, 144k\}. \quad 1 \text{ bod}$$

Dokažimo da je broj  $n$  prikaziv kao zbroj  $k$  pribrojnika iz  $S$  ako i samo ako je  $n \in S_k$ . 2 boda

Ako se broj  $n$  može prikazati kao suma  $k$  elemenata skupa  $S$ , tada je očito broj  $n$  u skupu  $S_k$  (jer je  $k$  pribrojnika iz njegove sume između 135 i 144). 1 bod

Dokažimo sada obrat: svaki broj iz  $S_k$  prikaziv kao zbroj  $k$  pribrojnika iz  $S$ . Pretpostavimo suprotno, postoje neki brojevi iz  $S_k$  koji nisu prikazivi i neka je  $n_0$  najmanji među njima. Sigurno  $n_0 \neq 135k$ , budući da se taj broj može prikazati kao zbroj  $k$  ponavljanja pribrojnika 135. Zato je  $n_0 > 135k$ , pa je broj  $n_0 - 1$  prikaziv. Broj  $n_0 - 1$  je manji od  $144k$ , pa je jedan pribrojnik u njegovom zapisu manji od 144. Uvećavanjem tog pribrojnika za 1 (dok sve ostale pribrojnike ostavimo iste) dobivamo zbroj  $k$  elemenata iz  $S$  koji iznosi  $n_0$ , što je kontradikcija s neprikazivosti broja  $n_0$ . Dakle, svi brojevi između  $135k$  i  $144k$  su prikazivi. 3 boda

Nadimo sada najveći broj koji nije prikaziv. Ako neki prirodan broj  $m$  nije prikaziv, tada se ne nalazi ni u jednom skupu  $S_k$ . Posebno, nalazi se između dva uzastopna skupa  $S_k$  i  $S_{k+1}$ , tj.  $144k < m < 135(k+1)$ , a to je moguće ako i samo ako je

$$144k + 2 \leq 135(k+1), \quad 1 \text{ bod}$$

odakle je  $k \leq 14$ . Dakle, za  $k \geq 15$  nema brojeva koji se nalaze između  $S_k$  i  $S_{k+1}$ , pa su najveći neprikazivi brojevi između  $S_{14}$  i  $S_{15}$ . 1 bod

Najveći broj između  $S_{14} = \{1890, \dots, 2016\}$  i  $S_{15} = \{2025, \dots, 2160\}$  je 2024, pa je to ujedno i najveći neprikaziv broj. 1 bod

#### Drugo rješenje.

Koristeći oznake iz prvog rješenja, dokažimo drugačije da je svaki broj iz  $S_k$  prikaziv.

Broj  $n$  je prikaziv kao suma  $k$  pribrojnika iz  $S$  ako i samo ako je  $\tilde{n} := n - 135k$  prikaziv kao suma  $k$  pribrojnika iz skupa  $\{0, 1, \dots, 9\}$  (svakom od  $k$  pribrojnika možemo pribrojiti/oduzeti broj 135). Zato je potrebno dokazati da se svi brojevi  $\tilde{n} \in \{0, 1, \dots, 9k\}$  mogu prikazati kao suma  $k$  pribrojnika iz skupa  $\{0, 1, \dots, 9\}$ . 1 bod

Ako je  $\tilde{n} = 9k$ , broj je prikaziv kao zbroj  $k$  devetki. Inače broj  $\tilde{n}$  cjelobrojno podijelimo s 9: dobivamo  $\tilde{n} = 9p + r$  za  $p \in [0, \dots, k-1]$  i  $r \in [0, \dots, 8]$ . Sada vidimo da je  $\tilde{n}$  prikaziv kao suma  $p$  devetki, jednog broja  $r$ , te  $k-p-1$  nula, čime je tvrdnja dokazana. 2 boda

Ostatak dokaza provodi se kao u prošlom rješenju, te se boduje na isti način. 7 bodova