

DRŽAVNO NATJECANJE IZ ASTRONOMIJE 2023. GODINE

4. RAZRED

RJEŠENJA

Zadaci

Napomene:

Ako je potrebno, u zadacima primijeni 1 god = 365,25 d!

Moguće je da se u nekim zadacima nalaze i podatci koji nisu potrebni za rješavanje.

7	
---	--

1. Koji je maksimalni polumjer staze progradnoga satelita u kružnoj stazi oko Jupitera da bi u nekome trenutku bio retrogradan gledano sa Sunca? Jupiter, čija je masa $1,9 \cdot 10^{27}$ kg, udaljen je 5,2 AJ od Sunca, a Zemlja $149,6 \cdot 10^6$ km.
(Gravitacijska konstanta: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$).

Da bi satelit na dijelu svoje staze bio retrogradan njegova brzina kruženja oko Jupitera treba biti veća od brzine kruženja Jupitera oko Sunca.

$$v_J < v_{\text{sat.-Jup}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_J = d_{\text{SJ}} \omega_J = d_{\text{SJ}} \frac{2\pi}{T_J} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{T_J^2}{d_{\text{SJ}}^3} = 1 \Rightarrow T_J = \sqrt{d_{\text{SJ}}^3} \quad 1 \text{ bod}$$

$$T_J = \sqrt{(5,2 \text{ AJ})^3} = 11,9 \text{ god} = 11,9 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 3,76 \cdot 10^8 \text{ s} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_J = 5,2 \text{ AJ} \cdot 149,6 \cdot 10^6 \frac{\text{km}}{\text{AJ}} \cdot \frac{2\pi}{3,76 \cdot 10^8 \text{ s}} = 13,0 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$G \frac{mM}{r^2} = m r \omega^2 = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{GM}{v^2} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$r_{\text{sat.-Jup.}} < \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{\left(13000 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 7,5 \cdot 10^8 \text{ m} \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: priznaju se i drugi alternativni postupci rješavanja. Za broj π se može koristiti i aproksimiran iznos zaokružen na dvije ili više decimala (3,14....).

2. Geometrijske geocentrične ekvatorske koordinate Marsa 11. svibnja 2023. u 21^h15^m po SEV+1 jesu $\alpha = 7^{\text{h}}47^{\text{m}}41,5^{\text{s}}$ $\delta = 22^{\circ}49'11,4''$. Ako je geocentrična udaljenost Marsa u tome trenutku 274365664,8 km, kolika je njegova topocentrična udaljenost u odnosu na Podgoru ($43^{\circ}14'19,3''\text{N}$; $17^{\circ}04'45,0''\text{E}$). Aproximiraj Zemlju kuglom polumjera 6367,0 km. Mjesno je zvjezdano vrijeme u trenutku opažanja 12^h48^m53,2^s.

Pretvorba iz sfernog u pravokutni koordinatni sustav:

$$x = d \cos \alpha \cos \delta \quad 1 \text{ bod}$$

$$y = d \sin \alpha \cos \delta \quad 1 \text{ bod}$$

$$z = d \sin \delta \quad 1 \text{ bod}$$

Pravokutne ekvatorske geocentrične koordinate Marsa:

$$x_{\text{M}} = 274365664,8 \text{ km} \cdot \cos(7^{\text{h}}47^{\text{m}}41,5^{\text{s}} \cdot 15^{\circ}/\text{h}) \cdot \cos(22^{\circ}49'11,4'') \quad 1 \text{ bod}$$

$$x_{\text{M}} = -114506760,7 \text{ km}$$

$$y_{\text{M}} = 274365664,8 \text{ km} \cdot \sin(7^{\text{h}}47^{\text{m}}41,5^{\text{s}} \cdot 15^{\circ}/\text{h}) \cdot \cos(22^{\circ}49'11,4'') \quad 1 \text{ bod}$$

$$y_{\text{M}} = 225481589,3 \text{ km}$$

$$z_{\text{M}} = 274365664,8 \text{ km} \cdot \sin(22^{\circ}49'11,4'') = 106408517,8 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

Pravokutne ekvatorske geocentrične koordinate Podgore:

$$\alpha_{\text{P}} = LST = 12^{\text{h}}48^{\text{m}}53,2^{\text{s}} = 192^{\circ}13'18'' \quad 1 \text{ bod}$$

$$\delta_{\text{P}} = 43^{\circ}14'19,3''$$

$$x_{\text{P}} = 6367,0 \text{ km} \cdot \cos(192^{\circ}13'18'') \cdot \cos(43^{\circ}14'19,3'') = -4533,3 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

$$y_{\text{P}} = 6367,0 \text{ km} \cdot \sin(192^{\circ}13'18'') \cdot \cos(43^{\circ}14'19,3'') = -981,9 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

$$z_{\text{P}} = 6367,0 \text{ km} \cdot \sin(43^{\circ}14'19,3'') = 4361,6 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

Pravokutne ekvatorske topocentrične koordinate Marsa:

$$x_{\text{top}} = x_{\text{M}} - x_{\text{P}} = -114506760,7 \text{ km} + 4533,3 \text{ km} = -114502227,4 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

$$y_{\text{top}} = y_{\text{M}} - y_{\text{P}} = 225481589,3 \text{ km} + 981,9 \text{ km} = 225482571,2 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

$$z_{\text{top}} = z_{\text{M}} - z_{\text{P}} = 106408517,8 \text{ km} - 4361,6 \text{ km} = 106404156,2 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

$$d_{\text{top}} = \sqrt{x_{\text{top}}^2 + y_{\text{top}}^2 + z_{\text{top}}^2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$d_{\text{top}} = \sqrt{(-114502227,4 \text{ km})^2 + (225482571,2 \text{ km})^2 + (106404156,2 \text{ km})^2} \quad 1 \text{ bod}$$

$$= 274362888,3 \text{ km}$$

----- Alternativno pomoću sferne i ravninske trigonometrije -----

Geocentrična kutna udaljenost σ između Marsa i Podgore:

$$\alpha_{\text{P}} = LST = 12^{\text{h}}48^{\text{m}}53,2^{\text{s}} = 192^{\circ}13'18'' \quad 1 \text{ bod}$$

$$\delta_{\text{P}} = 43^{\circ}14'19,3''$$

$$\sigma = \arccos(\sin \delta_{\text{M}} \sin \delta_{\text{P}} + \cos \delta_{\text{M}} \cos \delta_{\text{P}} \cos(\alpha_{\text{P}} - \alpha_{\text{M}})) \quad 6 \text{ bodova}$$

$$\sigma = \arccos \left(\sin(22^{\circ}49'11,4'') \sin(43^{\circ}14'19,3'') + \cos(22^{\circ}49'11,4'') \cos(43^{\circ}14'19,3'') \cdot \cos \left((12^{\text{h}}48^{\text{m}}53,2^{\text{s}} - 7^{\text{h}}47^{\text{m}}41,5^{\text{s}}) \cdot 15^{\circ}/\text{h} \right) \right)$$

$$\sigma = 64,14527306^{\circ} = 64^{\circ}08'43,0'' \quad 2 \text{ boda}$$

Topocentrična udaljenost između Marsa i Podgore (kosinusov poučak):

$$d_{\text{top}}^2 = d_{\text{ZM}}^2 + r_{\text{Z}}^2 - 2d_{\text{ZM}}r_{\text{Z}} \cos \sigma \Rightarrow d_{\text{top}} = \sqrt{d_{\text{ZM}}^2 + r_{\text{Z}}^2 - 2d_{\text{ZM}}r_{\text{Z}} \cos \sigma} \quad 4 \text{ boda}$$

$$d_{\text{top}} = \sqrt{(274365664,8 \text{ km})^2 + (6367,0 \text{ km})^2 - 2 \cdot 274365664,8 \text{ km} \cdot 6367,0 \text{ km} \cdot \cos(64,14527306^\circ)}$$

$$d_{\text{top}} = 274362888,3 \text{ km} \quad 2 \text{ boda}$$

Napomena: priznaju se i alternativni postupci rješavanja.

3. Opažana je promjenjiva zvijezda tipa Algola udaljena od nas 520 pc. Fotometrijski je određeno da je prividna bolometrijska zvjezdana veličina sustava $8,84^m$ i da je primarni vizualni minimum sjaja $9,62^m$, a sekundarni $9,25^m$. Odredi koliki su luminoziteti obiju komponenata (iskazani u luminozitetima Sunca L_S) i polumjeri (iskazani u polumjerima Sunca r_S). Poznato je da manja komponenta ima temperaturu 9600 K, a veća 5010 K. Bolometrijska korekcija B.C. za topliju zvijezdu je $-0,15$, a za hladniju $-0,34$. Međuzvjezdana je ekstinkcija u iznosu od $0,3 \text{ mag/kpc}$ konstantna duž cijeloga spektra. Apsolutna bolometrijska zvjezdana veličina Sunca temperature 5780 K jest $4,74^m$.

Prividne korigirane zvjezdane veličine sustava i primarnog minimuma (veće zvijezde) su:

$$m_e = m - eks \cdot d \quad 1 \text{ bod}$$

$$m_{uke} = 8,84^m - 0,3 \text{ mag/kpc} \cdot 0,52 \text{ kpc} = 8,684^m \quad 1 \text{ bod}$$

$$m_{1ve} = 9,62^m - 0,3 \text{ mag/kpc} \cdot 0,52 \text{ kpc} = 9,464^m \quad 1 \text{ bod}$$

Bolometrijska zvjezdana veličina:

$$m_{bol} = m_{ve} + B.C. \quad 1 \text{ bod}$$

Apsolutnu bolometrijsku zvjezdanu veličinu sada možemo odrediti samo za veću/hladniju zvijezdu (zvijezda 1):

$$m_{1bol} = 9,464^m - 0,34^m = 9,124^m \quad 1 \text{ bod}$$

$$M_{1bol} = m_{1bol} + 5 - 5 \log d \quad 1 \text{ bod}$$

$$M_{1bol} = 9,124^m + 5 - 5 \log(520 \text{ pc}) = 0,544^m \quad 1 \text{ bod}$$

Luminozitet i polumjer zvijezde 1:

$$\frac{L_1}{L_S} = 2,512^{M_{sbol} - M_{1bol}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$L_1 = L_S \cdot 2,512^{4,74 - 0,544} = 47,70 L_S \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{L_1}{L_S} = \frac{\sigma 4\pi r_1^2 T_1^4}{\sigma 4\pi r_S^2 T_S^4} \Rightarrow r_1 = r_S \frac{T_S^2}{T_1^2} \sqrt{\frac{L_1}{L_S}} \quad 2 \text{ boda}$$

$$r_1 = r_S \frac{(5780\text{K})^2}{(5010\text{K})^2} \sqrt{47,70} = 9,19 r_S \quad 1 \text{ bod}$$

Ukupni luminozitet:

$$M_{uke} = 8,684^m + 5 - 5 \log(520 \text{ pc}) = 0,104^m \quad 1 \text{ bod}$$

$$L_{uk} = L_S \cdot 2,512^{4,74 - 0,104} = 71,53 L_S \quad 1 \text{ bod}$$

Luminozitet i polumjer zvijezde 2:

$$L_2 = L_{uk} - L_1 = 71,53 L_S - 47,70 L_S = 23,83 L_S \quad 1 \text{ bod}$$

$$r_2 = r_S \frac{(5780\text{K})^2}{(9600\text{K})^2} \sqrt{23,83} = 1,77 r_S \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: Priznaju se i alternativni načini rješavanja.

4. S pomoću priložene Vrteće karte neba odredi:

- kutnu udaljenost između Sirijusa i Dife zaokruženu na stupanj
- Koliko se vremena Aldebaran vidi u noći koja počinje 15. svibnja, a završava 16. svibnja? Uzmi da se Aldebaran može vidjeti najranije 30 minuta nakon zalaska Sunca te najkasnije 30 minuta prije izlaska Sunca.

a) max. 7 bodova

iz karte se može očitati:

Sirijus $\alpha \approx 101,5^\circ$ ($\leq \pm 0,5^\circ$ 1 bod; $> \pm 0,5^\circ$ i $\leq \pm 1^\circ$ 0,5 boda);

$\delta \approx -17^\circ$ ($\leq \pm 0,5^\circ$ 1 bod; $> \pm 0,5^\circ$ i $\leq \pm 1^\circ$ 0,5 boda) 2 boda

Difda $\alpha \approx 11^\circ$ ($\leq \pm 0,5^\circ$ 1 bod; $> \pm 0,5^\circ$ i $\leq \pm 1^\circ$ 0,5 boda);

$\delta \approx -18^\circ$ ($\leq \pm 0,5^\circ$ 1 bod; $> \pm 0,5^\circ$ i $\leq \pm 1^\circ$ 0,5 boda) 2 boda

Zbog bliskih deklinacija kutna udaljenost može se približno izračunati kao:

$$d = \sqrt{\left((\alpha_s - \alpha_D) \cdot \cos \frac{\delta_s + \delta_D}{2}\right)^2 + (\delta_s - \delta_D)^2} \quad 2 \text{ boda (1 bod bez korekcije za deklinaciju)}$$

$$d = \sqrt{\left((101,5^\circ - 11^\circ) \cdot \cos \frac{-17^\circ - 18^\circ}{2}\right)^2 + (-17^\circ + 18^\circ)^2} = 86,3^\circ (\approx 86^\circ) \quad 1 \text{ bod}$$

----- ili zbog male razlike u deklinaciji u odnosu na rektascenziju:

$$d = (\alpha_s - \alpha_D) \cdot \cos \frac{\delta_s + \delta_D}{2} \quad 2 \text{ boda (1 bod bez korekcije za deklinaciju)}$$

$$d = (101,5^\circ - 11^\circ) \cdot \cos \frac{-17^\circ - 18^\circ}{2} = 86,3^\circ (\approx 86^\circ) \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: priznaje se i izračun pomoću sferne trigonometrije. Rektascenzije se mogu izraziti i u satima. Stvarna udaljenost iznosi približno $\approx 85,3^\circ$

b) max. 5 bodova

Iz karte se može odrediti položaj Sunca na ekliptici oko podneva 15. svibnja i potom za taj položaj odrediti trenutak njegova zalaska.

15. svibnja Sunce zalazi oko $19^h 20^m$ ($\leq \pm 5^m$ 2 boda; $> \pm 5$ i $\leq \pm 10^m$ 1 bod) 2 boda

15. svibnja Aldebaran zalazi oko $20^h 10^m$ ($\leq \pm 10^m$ 1 bod) 1 bod

Aldebaran je vidljiv približno:

$$t = t_{\text{zalA}} - t_{\text{zalS}} - 30^m \quad 1 \text{ bod}$$

$$t = 20^h 10^m - 19^h 20^m - 30^m = 0^h 20^m \quad 1 \text{ bod}$$