

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$$\begin{aligned} & \text{Deer} + \text{Wild boar} + \text{Hare} + \text{Partridge} + \text{Fox} = 147 \text{ kg} \\ & \text{Deer} + \text{Wild boar} = 135 \text{ kg} \\ & \text{Hare} + \text{Partridge} = 5 \text{ kg} \\ & \text{Partridge} + \text{Fox} = 8 \text{ kg} \\ & \text{Wild boar} + \text{Hare} = 104 \text{ kg} \end{aligned}$$

Kolika je masa pojedine životinje?

Koliko je kilograma  $\text{Deer} + \text{Hare} + \text{Fox}$  ?

Prvo rješenje.

$$\begin{aligned} & (\text{Deer} + \text{Wild boar}) + (\text{Hare} + \text{Partridge}) + \text{Fox} = 147 \text{ kg} \\ & 135 + 5 + \text{Fox} = 147 \text{ kg} \end{aligned}$$

1 BOD

$$\text{Fox} = 7$$

1 BOD

$$\text{Deer} + (\text{Wild boar} + \text{Hare}) + (\text{Partridge} + \text{Fox}) = 147 \text{ kg}$$

$$\text{Deer} + 104 + 8 = 147$$

1 BOD

$$\text{Deer} = 35$$

1 BOD

$$\text{Deer} + \text{Wild boar} + (\text{Hare} + \text{Partridge}) + \text{Fox} = 147 \text{ kg}$$

$$35 + \text{Wild boar} + 5 + 7 = 147$$

1 BOD

$$\text{Wild boar} = 100$$

1 BOD

  $= 104 \text{ kg}$

$$100 + \text{rabbit} = 104$$

  $= 4$

1 BOD

  $= 5 \text{ kg}$

$$4 + \text{pheasant} = 5$$

  $= 1$

1 BOD

Lisica ima 7 kg, jelen 35 kg, vepar 100 kg, zeko 4 kg, a ptica (fazan) 1 kg.

1 BOD

**Napomena 1:** Ako uz sliku (ili puno ime) svake životinje piše masa s istaknutom mjernom jedinicom (kg) ovaj bod je uključen i bez formalno pisanog odgovora.

  $= 35 + 4 + 7 = 46 \text{ kg}.$

Lisica, zeko i jelen zajedno imaju 46 kg.

1 BOD

**Napomena 2:** Ako je masa životinja napisana u slikovnom zapisu s istaknutom mjernom jedinicom (kg) ovaj bod je uključen i bez formalno pisanog odgovora.

.....UKUPNO 10 BODOVA

### Drugo rješenje.

Označimo  $j$  masu jelena,  $s$  masu svinje,  $z$  masu zeca,  $p$  masu ptice i  $l$  masu lisice u kilogramima.

Tada vrijedi:

$$j + s + z + p + l = 147,$$

$$j + s = 135$$

$$z + p = 5$$

$$p + l = 8$$

$$s + z = 104$$

Uvrstimo:

$$j + s + z + p + l = 147$$

$$135 + 5 + l = 147$$

1 BOD

$$l = 147 - 135 - 5$$

$$l = 7$$

1 BOD

$$j + 104 + 8 = 147$$

$$j = 147 - 104 - 8$$

1 BOD

$j = 35$	1 BOD
$35 + s + 5 + 7 = 147$	1 BOD
$s = 147 - 35 - 5 - 7$	
$s = 100$	1 BOD
$100 + z = 104$	
$z = 104 - 100$	
$z = 4$	1 BOD
$4 + p = 5$	
$p = 1$	1 BOD
Lisica ima 7 kg, jelen 35 kg, vepar 100 kg, zeko 4 kg, a fazan 1 kg.	1 BOD
$j + z + l = 35 + 4 + 7 = 46$ kg. Lisica, zeko i jelen zajedno imaju 46 kg.	1 BOD
.....UKUPNO 10 BODOVA	

2. Na koliko različitih načina možemo novčanicu od 50 eura razmijeniti (usitniti) koristeći se kovanicama od 2 eura te novčanicama od 5 i 10 eura? Napiši sve mogućnosti.

**Prvo rješenje.**

Da bi ukupni zbroj vrijednosti svih odabranih novčanica bio 50, među njima:

novčanica od 10 eura može biti 0, 1, 2, 3, 4 ili 5,

novčanica od 5 eura može biti 0, 2, 4, 6, 8 ili 10,

a kovanica od 2 eura može biti 0, 5, 10, 15, 20 ili 25. 2 BODA

Popisujemo trojke slažući prvo kovanice od 2, novčanice od 5 pa od 10 eura:

(0,0,5), (0,2,4), (0,4,3), (0,6,2), (0,8,1), (0,10,0)

(5,0,4), (5,2,3), (5,4,2), (5,6,1), (5,8,0)

(10,0,3), (10,2,2), (10,4,1), (10,6,0)

(15,0,2), (15,2,1), (15,4,0)

(20,0,1), (20,2,0)

(25,0,0) po tri trojke nose 1 BOD

Ima ukupno 21 različit način. 1 BOD

**Napomena:** Ako učenik bez uvodnog pojašnjenja, koje nosi 2 BODA, popiše sve trojke i odgovori na pitanje (1 BOD) dobiva svih 10 BODOVA. Ako sustavno ispituje trojke pa je izostavio jedno rješenje dobiva ukupno 8 BODOVA, a ako je izostavio 2 ili 3 rješenja dobiva ukupno 7 BODOVA.

.....UKUPNO 10 BODOVA

### Drugo rješenje.

U tablici ćemo prikazati sve mogućnosti:

Broj novčanica od 10 eura	Broj novčanica od 5 eura	Broj kovanica od 2 eura	
0	0	25	50
0	1		$50 - 5 = 45$
0	2	20	$10 + 40 = 50$
0	3		$50 - 15 = 35$
0	4	15	$20 + 30 = 50$
Zaključujemo da novčanica od 5 eura mora biti paran broj.			
0	6	10	$30 + 20 = 50$
0	8	5	$40 + 10 = 50$
0	10	0	50
1	0	20	$10 + 40 = 50$
1	2	15	$10 + 10 + 30 = 50$
1	4	10	$10 + 20 + 20 = 50$
1	6	5	$10 + 30 + 10 = 50$
1	8	0	$10 + 40 = 50$
2	0	15	$20 + 30 = 50$
2	2	10	$20 + 10 + 20 = 50$
2	4	5	$20 + 20 + 10 = 50$
2	6	0	$20 + 30 = 50$
3	0	10	$30 + 20 = 50$
3	2	5	$30 + 10 + 10 = 50$
3	4	0	$30 + 20 = 50$
4	0	5	$40 + 10 = 50$
4	2	0	$40 + 10 = 50$
5	0	0	50

9 BODOVA

50 eura možemo razmijeniti na 21 različiti način.

1 BOD

**Napomena:** Ako učenik popiše sve trojke i odgovori na pitanje (1 BOD) ostvaruje pravo na svih 10 BODOVA. Ako sustavno ispisuje trojke pa je izostavio jedno rješenje, dobiva ukupno 8 BODOVA, a ako je izostavio 2 ili 3 rješenja dobiva ukupno 7 BODOVA.

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Putnički vlak koji putuje od Osijeka do Zagreba svake 3 minute prijeđe 5 km. Drugi putnički vlak koji putuje iz Splita do Zagreba svake 2 minute prijeđe 3 km. Duljina puta vlaka koji putuje od Osijeka do Zagreba iznosi 275 km, a duljina puta vlaka koji putuje od Splita do Zagreba iznosi 405 km. U koliko sati mora krenuti vlak iz Splita, a u koliko onaj iz Osijeka ako oba trebaju biti u 17 h u Zagrebu, a pri tome znamo da će vlak iz Splita (zbog loših vremenskih uvjeta) svakih 30 minuta kasniti jednu minutu?

### Rješenje.

Ako putnički vlak od Osijeka do Zagreba svake 3 minute prijeđe 5 km, tada za cijeli put treba:

$$275 : 5 \cdot 3 = 55 \cdot 3 = 165 \text{ min.}$$

2 BODA

Budući da je  $1\text{ h} = 60\text{ min}$ , put od Osijeka do Zagreba traje 2 h i 45 min. 1 BOD

Ako putnički vlak od Splita do Zagreba svake 2 minute prijeđe 3 km, tada za cijeli put treba:

$$405 : 3 \cdot 2 = 135 \cdot 2 = 270\text{ min.} \quad 2\text{ BODA}$$

Budući da je  $1\text{ h} = 60\text{ min}$ , put od Splita do Zagreba traje 4 h i 30 min. 1 BOD

Kako vlak iz Splita kasni 1 min svakih 30 min, on će ukupno kasniti:

$$4 \cdot 2 + 1 = 8 + 1 = 9\text{ min.} \quad 1\text{ BOD}$$

Ukupno putovanje vlaka iz Splita do Zagreba iznosi 4 h i 39 min. 1 BOD

Da bi vlak iz Osijeka došao u Zagreb u 17 h (a putuje 2 h i 45 min) mora krenuti iz Osijeka

u 14 h i 15 min. 1 BOD

Da bi vlak iz Splita došao u Zagreb u 17 h (a putuje 4 h i 39 min) mora krenuti iz Splita

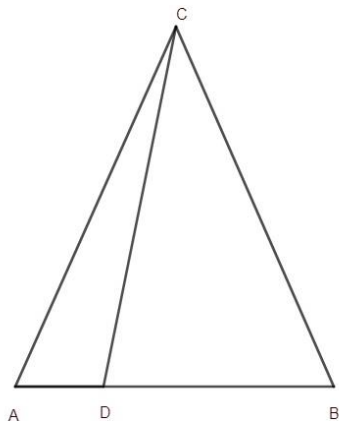
u 12 h i 21 min. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Zadan je jednakokrani trokut  $ABC$  s osnovicom  $\overline{AB}$  duljine 65 cm i krakovima  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$  duljine 80 cm. Na osnovici  $\overline{AB}$  odabrana je točka  $D$  takva da opseg trokuta  $ADC$  iznosi 173 cm, a opseg trokuta  $DBC$  iznosi 220 cm. Kolike su duljine dužina  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AD}$  i  $\overline{DB}$ ?

**Prvo rješenje.**

Skica:



1 BOD

Izračunajmo opseg trokuta  $ABC$ .

$$O_{ABC} = |AB| + |BC| + |CA|$$

$$O_{ABC} = 65 + 80 + 80$$

$$O_{ABC} = 225\text{ cm} \quad 1\text{ BOD}$$

Zbroj opsega trokuta  $ADC$  i  $DBC$  je veći od opsega trokuta  $ABC$  za dvostruku duljinu stranice  $\overline{DC}$  ili, kraće,  $O_{ADC} + O_{DBC} = O_{ABC} + 2 \cdot |DC|$  3 BODA

pa vrijedi da je:

$$2 \cdot |DC| = 173 + 220 - 225 \quad 1\text{ BOD}$$

$$2 \cdot |DC| = 168$$

$$|DC| = 168 : 2$$

$$|DC| = 84\text{ cm} \quad 1\text{ BOD}$$

Duljinu dužine  $\overline{AD}$  računamo iz opsega trokuta  $ADC$ .

$$80 + |AD| + 84 = 173 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$|AD| = 173 - (80 + 84)$$

$$|AD| = 9 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

Duljinu dužine  $\overline{DB}$  računamo iz poznatih duljina dužina  $\overline{AB}$  i  $\overline{AD}$ .

$$|DB| = 65 - 9$$

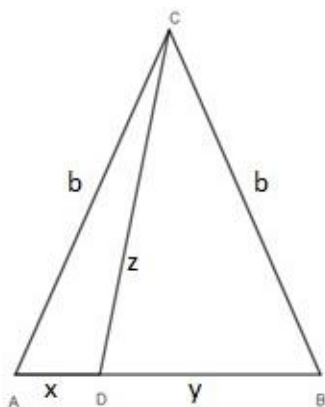
$$|DB| = 56 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

.....UKUPNO 10 BODOVA

### Drugo rješenje.

Označimo s  $b$  duljinu kraka trokuta  $ABC$ , s  $x$  duljinu dužine  $\overline{AD}$ , s  $y$  duljinu dužine  $\overline{DB}$  i sa  $z$  duljinu dužine  $\overline{CD}$ . Iz navedenog slijedi da je osnovica  $\overline{AB}$  duljine  $x + y = 65$  cm.

Skica:



1 BOD

Izračunajmo opseg trokuta  $ABC$ .

$$O_{ABC} = |AB| + |BC| + |CA|$$

$$O_{ABC} = 65 + 80 + 80$$

$$O_{ABC} = 225 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

Vrijedi da je

$$O_{ABC} = x + y + 2b \text{ tj. } 225 = x + y + 2b$$

$$O_{ADC} = x + b + z \text{ tj. } 173 = x + b + z$$

$$O_{DBC} = y + b + z \text{ tj. } 220 = y + b + z \quad 1 \text{ BOD}$$

Zbrojimo li opsege trokuta  $ADC$  i trokuta  $DBC$  dobivamo

$$173 + 220 = \underbrace{x + y + 2b + 2z}_{225} \quad 2 \text{ BODA}$$

pa slijedi da je:

$$2 \cdot z = 173 + 220 - 225 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2 \cdot z = 168$$

$$z = |DC| = 84 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

$x$  računamo iz opsega trokuta  $ADC$ .

$$80 + x + 84 = 173 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 173 - (80 + 84)$$

$$x = |AD| = 9 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

y računamo iz poznatih duljina dužina  $\overline{AB}$  i  $\overline{AD}$ .

$$y = 65 - 9$$

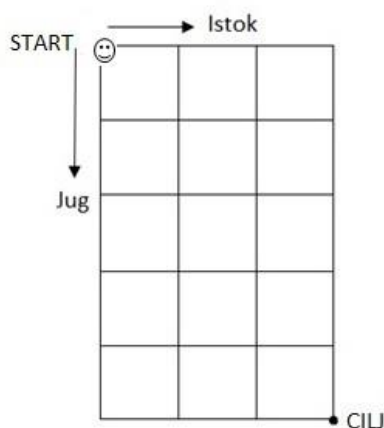
$$y = |DB| = 56 \text{ cm}$$

1 BOD

**Napomena:** Bodovi se ne oduzimaju za korištenje nepravilnih matematičkih oznaka ili nedostatak mjerne jedinice. Za 1 BOD na skici potrebno je imati pravilno označene vrhove svih navedenih trokuta (ne nužno u smjeru obrnuto kazaljka na satu).

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. U računalnoj igrici Smješko mora doći od starta do cilja krećući se u smjeru istoka ili juga po stranicama zadane mreže. Mreža se sastoji od 15 jednakih kvadrata, a duljina stranice tog kvadrata iznosi jedan korak. (Npr. od starta do cilja može doći krećući se 3 koraka na istok pa 5 koraka na jug). Na koliko načina Smješko može doći do cilja? Obrazloži odgovor.

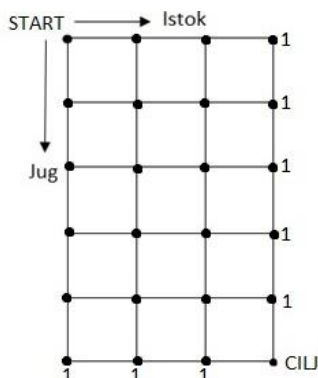


### Prvo rješenje.

Kretanje za jedan korak u smjeru istoka kratko ćemo označavati s I, a kretanje za jedan korak u smjeru juga kratko ćemo označavati s J.

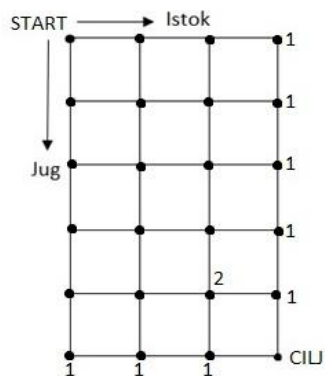
Označimo sve vrhove kvadrata s točkama. Iz svake točke Smješko može ići prema istoku ili jugu, a broj pored točke neka broji različite načine kretanja od tog mjesta do cilja.

Točkama iz kojih postoji samo 1 mogući put do cilja pridružiti ćemo broj 1.



2 BODA

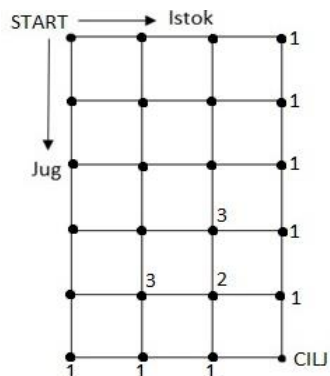
Promatrajmo kvadrat u donjem desnom uglu. Iz posljednje neoznačene točke do cilja možemo doći na 2 načina (IJ, JI). Stoga toj točki pridružujemo broj 2.



1 BOD

Iz točke iznad točke koji smo pridružili broj 2 možemo do cilja doći na 3 načina (IJJ, JIJ, JJI). Stoga njoj pridružujemo broj 3.

Isto vrijedi i za točku lijevo od točke kojoj smo pridružili broj 2. Iz nje također postoje 3 načina dolaska do cilja (IJJ, IJI, JII).

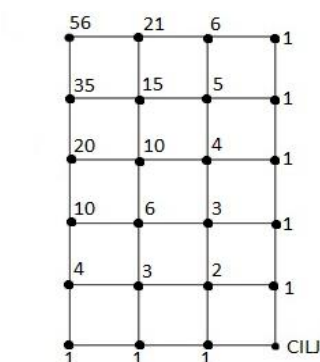


2 BODA

Zaključujemo da se za vrijednost pridružena svakoj pojedinoj točki dobije tako da zbrojimo vrijednosti točaka koje se nalaze jedno mjesto prema istoku i jedno mjesto prema jugu.

3 BODA

Popunjavanjem mreže imamo sljedeću sliku.



1 BOD

Dakle, mogući broj načina da Smješko dođe od starta do cilja je 56.

1 BOD

**Napomena:** Ako je učenik bez slike ispravno objasnio zaključak i točno rješenje ostvaruje pravo na 10 bodova, a ako učenik ima samo rješenje ostvaruje pravo na 1 bod. Djelomičnim zaključcima s točnim rješenjem može ostvariti najviše 8 bodova. Princip „slijedi grešku“ primjenjuje se samo uz točan zaključak (u slučaju krivog zbroja brojeva na susjednim vrhovima kvadrata).

.....UKUPNO 10 BODOVA



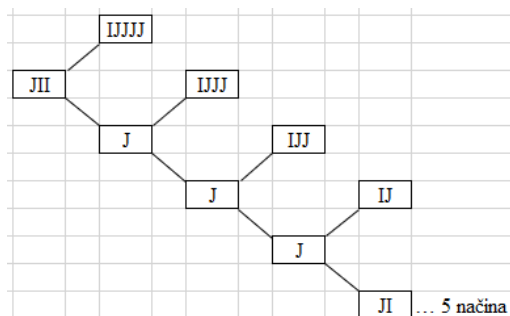
### Drugo rješenje.

Kretanje za jedan korak u smjeru istoka kratko ćemo označavati s I, a kretanje za jedan korak u smjeru juga kratko ćemo označavati s J.

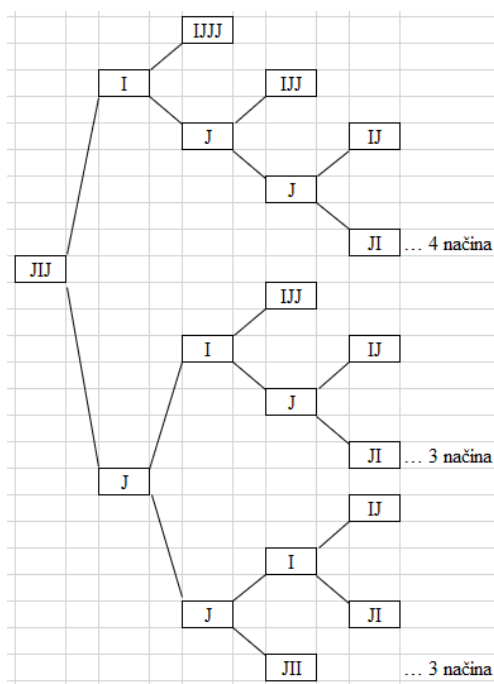
Svako kretanje od starta do cilja završava u 8 koraka. Razmotrimo posebno mogućnost prvog koraka prema jugu i prvog koraka prema istoku.

Ako krenemo prvim korakom na jug, drugi korak može biti na istok ili jug. I tako redom dok ne dođemo sasvim na istok (onda može samo na jug) ili sasvim na jug (onda može samo na istok).

Prikazat ćemo kretanje grafički tako da odaberemo prva tri koraka.



1 BOD



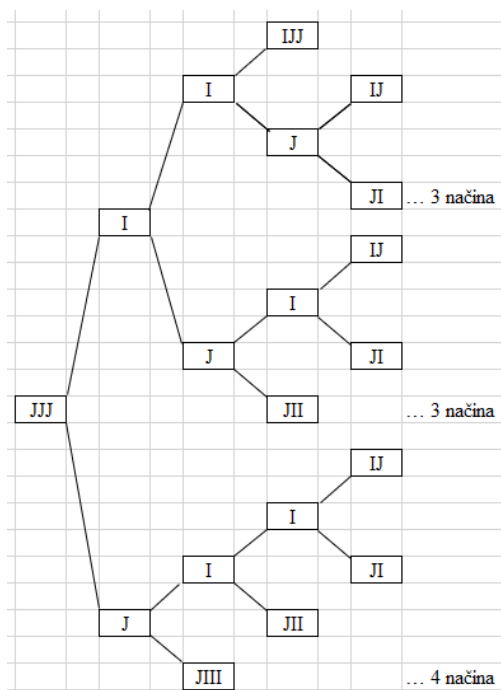
1 BOD

Ako krenemo korak prema jugu pa korak prema istoku (JI) do cilja možemo stići na 15 različitih načina.

Ako krenemo dva koraka prema jugu pa korak prema istoku (JJI) isto je kao da smo krenuli korak prema jugu, korak prema istoku pa opet prema jugu (JIJ) pa do cilja možemo stići na 10 različitih načina.

1 BOD

Ako krenemo tri koraka prema jugu (JJJ) imamo sljedećih 10 mogućnosti:



1 BOD

Time dolazimo do cilja na 35 različitih načina krenemo li prvim korakom prema jugu.

1 BOD

Ako krenemo prvim korakom na istok, drugi korak može biti na istok (II) ili jug (IJ).

Ako krenemo korak prema istoku pa korak prema jugu (IJ) isto je kao da smo krenuli korak prema jugu, korak prema istoku (JI) pa do cilja možemo stići na 15 različitih načina.

1 BOD

Ako krenemo dva koraka prema istoku pa korak prema jugu (IIJ) isto je kao da smo krenuli korak prema jugu pa dva koraka prema istoku (JII) pa do cilja možemo stići na 5 različitih načina.

1 BOD

Preostaje još samo kretanje 3 koraka prema istoku i 5 koraka prema jugu.

1 BOD

Time dolazimo do cilja na 21 različiti način krenemo li prvim korakom prema istoku.

1 BOD

Ukupno je  $35 + 21 = 56$  različitih mogućnosti kretanja Smješka od starta do cilja.

1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

### Treće rješenje.

Kretanje za jedan korak u smjeru istoka kratko ćemo označavati s I, a kretanje za jedan korak u smjeru juga kratko ćemo označavati s J.

Svako kretanje od starta do cilja završava u 8 koraka. Nabrojimo sve mogućnosti.

Ako krenemo prvim korakom na jug do cilja možemo doći na 35 različitih načina.

<u>JII-I-JJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>
<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>
<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>
<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>
<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>
<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>
<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>
<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-J-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>	<u>JII-I-IJJJ</u>

(5)

(10)

(10)

<u>III-I-III</u>	
<u>III-I-III</u>	
<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>
<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>
<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>
<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>
<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>

(10)

Ako krenemo prvim korakom na istok do cilja možemo doći na 21 različiti način.

		<u>III-J-III</u>		
<u>III-I-III</u>		<u>III-J-III</u>	<u>III-I-III</u>	
<u>III-J-III</u>	<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>	<u>III-J-III</u>	
<u>III-I-III</u>	<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>	<u>III-J-III</u>	
<u>III-I-III</u>	<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>	<u>III-J-III</u>	
<u>III-I-III</u>	<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>	<u>III-J-III</u>	
<u>III-I-III</u>	<u>III-I-III</u>	<u>III-J-III</u>	<u>III-J-III</u>	<u>III-J-III</u>

(5) (10) (5) (1)

8 BODOVA

(Napomena: Po 7 kombinacija za 1 BOD.)

Ukupno je  $35 + 21 = 56$  različitih mogućnosti kretanja Smješka od starta do cilja. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

#### Četvrto rješenje.

Kretanje za jedan korak u smjeru istoka kratko ćemo označavati s I, a kretanje za jedan korak u smjeru juga kratko ćemo označavati s J.

Svako kretanje od starta do cilja završava u 8 koraka.

Od toga je tri koraka na istok, a pet na jug.

Svaki takav put ćemo zapisati kao riječ od tri slova I i pet slova J.

Ako odredimo na kojim mjestima su slova I, onda su i slova J određena. 2 BODA

--	--	--	--	--	--	--	--

Za jedno slovo I možemo odabrati jedno od 8 mjesta. 1 BOD

Za drugo slovo I možemo odabrati jedno od preostalih 7 mjesta. 1 BOD

Za treće slovo I možemo odabrati jedno od preostalih 6 mjesta. 1 BOD

To daje ukupno  $8 \cdot 7 \cdot 6$  izbora. 1 BOD

Uočimo da smo tako previše puta brojali iste riječi.

Na primjer riječ IJJJIJ ima slovo I na 2., 5. i 7. mjestu, ali tu smo riječ mogli dobiti na šest načina ovisno o tome kojim redom smo upisivali slova I na ta mjesta (257, 275, 527, 572, 725, 752). 2 BODA

Svaka riječ se dobiva na 6 načina, pa je zato broj različitih riječi

$(8 \cdot 7 \cdot 6) : 6 = 8 \cdot 7 = 56$ . 1 BOD

Ukupno je 56 različitih mogućnosti kretanja Smješka od starta do cilja. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

6. Sva slova jednakosti  $(a + b) \cdot (c + d) \cdot (e + f) = 315$  treba zamijeniti različitim brojevima od 1 do 6 tako da jednakost bude točna. Na koliko načina je to moguće napraviti?

**Rješenje.**

Rastavimo broj 315 na proste faktore:  $315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ . 1 BOD

Svaka od zagrada može biti najmanje 3 ( $=1+2$ ), a najviše 11 ( $=5+6$ ). 1 BOD

Zaključujemo da zagrade moraju biti brojevi 5, 7 i 9, nekim redom. 1 BOD

Umnožak  $315 = 5 \cdot 7 \cdot 9$  možemo prikazati na 6 načina:

$5 \cdot 7 \cdot 9, 5 \cdot 9 \cdot 7, 9 \cdot 5 \cdot 7, 9 \cdot 7 \cdot 5, 7 \cdot 9 \cdot 5, 7 \cdot 5 \cdot 9$  2 BODA

Umnožak  $5 \cdot 7 \cdot 9$  se može prikazati kao:  $(1+4)(2+5)(3+6)$  1 BOD

ili kao:  $(2+3)(1+6)(4+5)$  1 BOD

Pribrojnice u svakom od ta dva umnoška možemo prikazati na 8 načina.

Primjerice, za umnožak  $(1+4)(2+5)(3+6)$  to su sljedeće kombinacije:

$(1+4)(2+5)(3+6)$

$(1+4)(2+5)(6+3)$

$(1+4)(5+2)(3+6)$

$(1+4)(5+2)(6+3)$

$(4+1)(2+5)(3+6)$

$(4+1)(2+5)(6+3)$

$(4+1)(5+2)(3+6)$

$(4+1)(5+2)(6+3),$

a za umnožak  $(2+3)(1+6)(4+5)$  također imamo 8 mogućnosti. 2 BODA

Ukupno ima  $6 \cdot 8 = 48$  načina za  $(1+4)(2+5)(3+6)$  i 48 načina za  $(2+3)(1+6)(4+5)$ .

Zaključujemo da postoji ukupno  $48 + 48 = 96$  načina. 1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

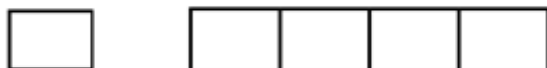
7. U dvjema posudama je ukupno 80 litara vode. Ako se iz prve prelije  $\frac{1}{8}$  ukupne količine vode u drugu posudu, onda će u drugoj posudi biti 4 puta više vode nego u prvoj posudi. Koliko je vode bilo u svakoj posudi prije prelijevanja?

**Prvo rješenje.**

$\frac{1}{8}$  ukupne količine vode je  $80 : 8 = 10$  litara.

1 BOD

Iz uvjeta zadatka proizlazi da je nakon prelijevanja bilo ukupno 5 jednakih dijelova jer je u drugoj posudi 4 puta više nego u prvoj.



2 BODA

$80 : 5 = 16$  - U prvoj je posudi 16 l vode,

3 BODA

a u drugoj  $16 \cdot 4 = 64$  l vode.

Prije prelijevanja u prvoj je bilo  $16 + 10 = 26$  l vode,

2 BODA

a u drugoj  $80 - 26 = 54$  l vode.

2 BODA

.....UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

$\frac{1}{8}$  ukupne količine vode je  $80 : 8 = 10$  litara.

1 BOD

Neka je prije prelijevanja u prvoj posudi bilo  $x$ , a u drugoj  $y$  litara vode.

Vrijedi:

$$x + y = 80,$$

1 BOD

$$\text{odnosno } y = 80 - x$$

Ako se iz prve posude izlije 10 litara u drugu posudu, onda će u prvoj biti  $x - 10$ , a u drugoj  $y + 10$  litara vode.

1 BOD

Znamo da će nakon prelijevanja u drugoj biti 4 puta više vode nego u prvoj posudi:

$$y + 10 = 4 \cdot (x - 10)$$

2 BODA

Uvrstimo vrijednost za  $y$ :

$$80 - x + 10 = 4 \cdot (x - 10)$$

1 BOD

$$90 - x = 4x - 40$$

1 BOD

$$5x = 90 + 40$$

$$5x = 130$$

1 BOD

$$x = 26$$

1 BOD

$$y = 80 - 26 = 54 \text{ litara.}$$

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**8.** Koliko ima brojeva manjih od 100 000 koji imaju točno pet djelitelja?

**Rješenje.**

Označimo s  $D(n)$  skup svih djelitelja prirodnog broja  $n$ .

Ako je  $a$  prost broj i ako je  $n = a \cdot a$ , tada je  $D(n) = \{1, a, n\}$ , pa  $n$  ima 3 djelitelja.

...ako je  $n = a \cdot a \cdot a$ , tada je  $D(n) = \{1, a, a \cdot a, n\}$ , pa  $n$  ima 4 djelitelja.

...ako je  $n = a \cdot a \cdot a \cdot a$ , tada je  $D(n) = \{1, a, a \cdot a, a \cdot a \cdot a, n\}$ , pa  $n$  ima 5 djelitelja.

3 BODA

Ako su  $a$  i  $b$  prosti brojevi i ako je  $n = a \cdot b$ , tada je  $D(n) = \{1, a, b, n\}$ , pa  $n$  ima 4 djelitelja.

1 BOD

...ako je  $n = a \cdot a \cdot b$ , tada je  $D(n) = \{1, a, b, a \cdot a, a \cdot b, n\}$ , pa  $n$  ima 6 djelitelja,

i tako dalje,  $n$  će imati sve više djelitelja.

2 BODA

Zaključujemo da  $n$  mora biti jednak umnošku  $a \cdot a \cdot a \cdot a$ , gdje je  $a$  neki prost broj.

Budući da je  $17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = 83\,521 < 100\,000$ , a  $19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 = 130\,321 > 100\,000$ , zaključujemo da  $a$  može biti 2, 3, 5, 7, 11, 13 ili 17.

3 BODA

(Po 1 BOD se dobiva za računanje umnožaka prostih brojeva 17 i 19, te 1 BOD za zaključak).

Dakle, traženih brojeva ima 7.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Ukoliko učenik samo ispiše svih sedam brojeva bez ikakvih prethodnih objašnjenja može dobiti maksimalno četiri boda i ako još odgovori da je takvih brojeva ukupno sedam, dobiva peti bod.

9. Ivan izrađuje crvene, zelene, plave i žute zastavice oblika jednakokraknog trokuta. Svim zastavicama su osnovice jednake duljine. Crvenoj zastavici je krak dulji od osnovice za  $\frac{1}{2}$  duljine te osnovice. Zelenoj zastavici je krak dulji od kraka crvene za  $\frac{1}{3}$  njegove duljine. Plavoj zastavici je krak dulji od kraka zelene za  $\frac{1}{4}$  njegove duljine, a žutoj je krak dulji od kraka plave za  $\frac{1}{5}$  njegove duljine. Treba sašiti po 50 zastavica svake boje i sve ih treba obrubiti trakom srebrne boje. Koliko će se metara srebrne trake utrošiti ako se zna da za rub crvene zastavice treba 40 cm trake?

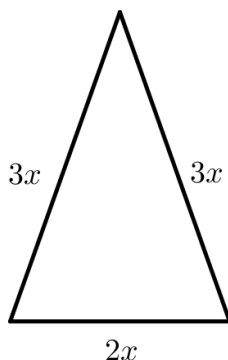
**Prvo rješenje.**

Krenimo od crvene zastavice čiji je opseg 40 cm.

Crvenoj zastavici je krak dulji od osnovice za  $\frac{1}{2}$  duljine te osnovice.

Podijelimo li osnovicu na 2 dijela i svaki dio označimo s  $x$ , zaključujemo da je duljina osnovice  $2x$ , duljina kraka  $3x$ .

1 BOD



Opseg crvenog trokuta je  $2x + 3x + 3x = 40$ .

1 BOD

$$8x = 40$$

$$x = 5$$

1 BOD

to znači da je duljina osnovice crvene zastavice  $2 \cdot 5 = 10$  cm,

a duljina kraka crvene zastavice  $3 \cdot 5 = 15$  cm.

1 BOD

Trećina od 15 je 5, pa je duljina kraka zelene zastavice  $15 + 5 = 20$  cm.

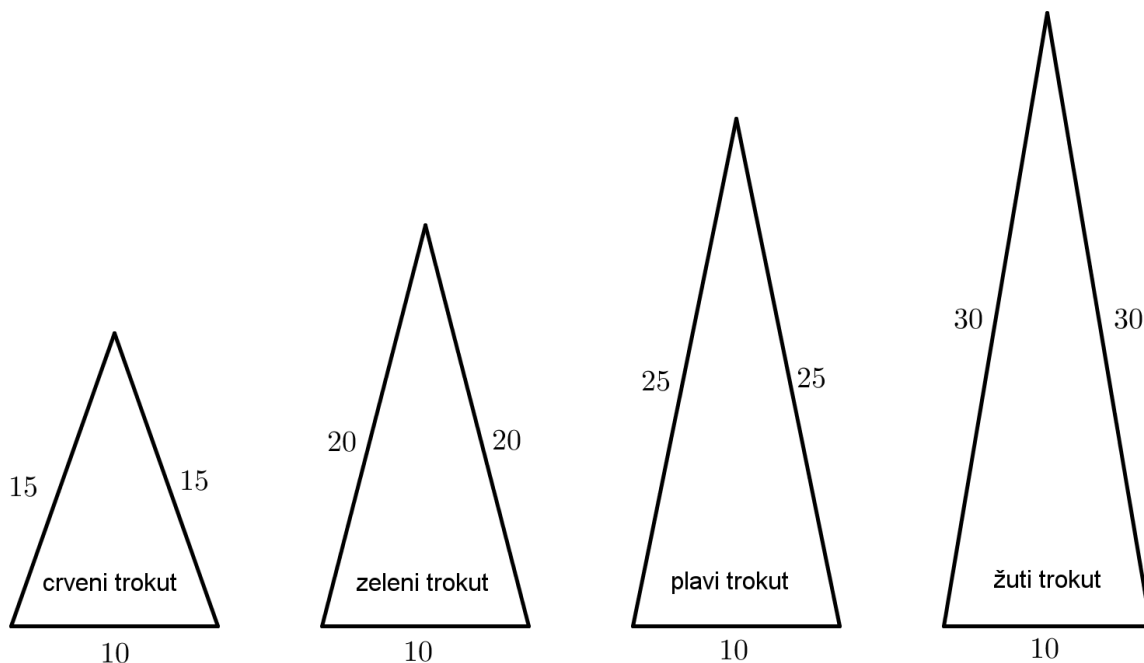
1 BOD

Četvrtina od 20 je 5, pa je duljina kraka plave zastavice  $20 + 5 = 25$  cm.

1 BOD

Petina od 25 je 5, pa je duljina kraka žute zastavice  $25 + 5 = 30$  cm.

1 BOD



Svima zastavicama su jednake duljine osnovica.

Duljina srebrne trake za sve zastavice je:

$$(10 + 2 \cdot 15 + 10 + 2 \cdot 20 + 10 + 2 \cdot 25 + 10 + 2 \cdot 30) \cdot 50 = 1 \text{ BOD}$$

$$= (40 + 30 + 40 + 50 + 60) \cdot 50$$

$$= 220 \cdot 50$$

$$= 11\,000 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 110 \text{ m.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Potrebno je 110 m srebrne trake za obrublivanje.

..... UKUPNO 10 BODOVA

### Drugo rješenje.

Označimo duljinu osnovica svih trokuta sa  $a$ .

$$\text{Tada je krak crvenog trokuta } a + 0.5a = 1.5a. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Krak zelenog trokuta je } 1.5a + \frac{1}{3} \cdot 1.5a = 1.5a + 0.5a = 2a. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Krak plavog trokuta je } 2a + \frac{1}{4} \cdot 2a = 2a + 0.5a = 2.5a. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{Krak žutog trokuta je } 2.5a + \frac{1}{5} \cdot 2.5a = 2.5a + 0.5a = 3a. \quad 1 \text{ BOD}$$

Iz opsega crvenog trokuta zaključujemo

$$a + 1.5a + 1.5a = 40 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$4a = 40$$

$$a = 10 \quad 1 \text{ BOD}$$

Opseg plavog trokuta je  $a + 2a + 2a = 5a$ , zelenog  $a + 2.5a + 2.5a = 6a$ ,

a žutog  $a + 3a + 3a = 7a$ . 1 BOD

Duljina srebrne trake koja je potrebna iznosi

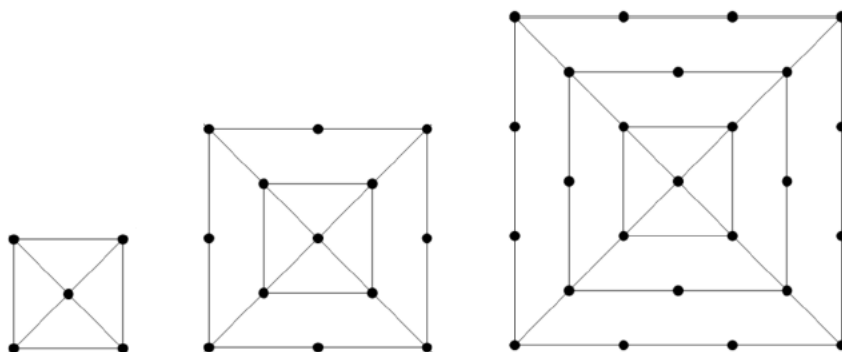
$$50 \cdot (4a + 5a + 6a + 7a) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 50 \cdot 22 \cdot a = 110\,000 \text{ cm} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 110 \text{ m.} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

10. Na slici je prikazan niz likova. Svaki lik ima nekoliko istaknutih točaka, npr. prvi lik ima 5 istaknutih točaka, drugi lik ima 13 istaknutih točaka itd. Ako bi se niz takvih likova nastavio, koliko bi istaknutih točaka imao dvadesettreći lik u tom nizu?



**Prvo rješenje.**

Uočimo da svaki novi lik nastaje od prethodnog tako da damo neki broj istaknutih točaka koje formiraju vanjski kvadrat novog lika. 1 BOD

Na točku u središtu dodajemo 4 točke i dobivamo prvi lik, pa nakon toga dodajemo 8 točaka i dobivamo drugi lik, pa dodajemo 12 točaka i dobivamo treći lik. 1 BOD

U svakom koraku smo dodali 4 točke više jer se broj točaka na stranici vanjskog kvadrata povećava za jedan. 2 BODA

Tada je broj istaknutih točaka dvadesettrećeg lika u nizu:

$$1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \dots + 4 \cdot 23 \quad \text{2 BODA}$$

$$1 + 4 \cdot (1 + 2 + \dots + 23) \quad \text{1 BOD}$$

Primjenom Gaussove dosjetke na  $1 + 2 + \dots + 23$  dobivamo:

$$(1 + 2 + \dots + 22) + 23 = 11 \cdot 23 + 23 = 253 + 23 = 276 \quad \text{2 BODA}$$

$$\text{Traženi broj je } 1 + 4 \cdot 276 = 1105. \quad \text{1 BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

Uočimo da broj točaka u nekom liku možemo dobiti tako da gledamo koliko ima točaka na pravcima koji su paralelni dijagonali. 2 BODA

Dvadesettreći lik će imati  $2 \cdot 23 + 1 = 47$  točaka na jednoj dijagonali. 1 BOD

Ako krenemo od jednog vrha do dijagonale imat ćemo redom 1, 3, 5, ..., 47 točaka. 1 BOD

Nakon toga je broj točaka 45, 43, ..., 5, 3, 1. 1 BOD

Stoga je traženi broj

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \dots + 2 \cdot 45 + 47$$

$$2 \cdot (1 + 3 + 5 + \dots + 45) + 47 \quad \text{1 BOD}$$

Primjenom Gaussove dosjetke na  $1 + 3 + \dots + 45$  dobivamo:

$$1 + 3 + \dots + 45 =$$

$$= (1 + 2 + \dots + 45) - 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 22)$$

$$= 1035 - 2 \cdot 253 = 529 \quad \text{3 BODA}$$

$$\text{Traženi broj je } 2 \cdot 529 + 47 = 1105. \quad \text{1 BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA



ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Odredi četiri najmanja uzastopna prirodna broja takva da je prvi djeljiv s 2, drugi s 3, treći sa 7, a četvrti s 5.

**Prvo rješenje.**

Prvi broj je paran jer je djeljiv s 2, a kako su brojevi uzastopni, onda je drugi neparan, treći paran, a četvrti neparan. 2 BODA

Četvrti broj je djeljiv s 5 i neparan je pa mu je zadnja znamenka 5. 1 BOD

To znači da je zadnja znamenka trećeg broja 4, a kako je djeljiv sa 7, onda to mogu biti brojevi  $2 \cdot 7 = 14$ ,  $12 \cdot 7 = 84$ ,  $22 \cdot 7 = 154$ , ... 2 BODA

Naime, 10 uzastopnih višekratnika broja 7, počevši od najmanjega prirodnog, završavaju redom znamenkama 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0. 1 BOD

U tom slučaju drugi broj može biti 13, 83, 153, ... 1 BOD

Najmanji među njima koji je djeljiv s 3 je broj 153. 2 BODA

Zato su traženi brojevi 152, 153, 154 i 155. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

Prvi broj je paran jer je djeljiv s 2, a kako su brojevi uzastopni, onda je drugi neparan, treći paran, a četvrti neparan. 2 BODA

Četvrti broj je djeljiv s 5 i neparan je pa mu je zadnja znamenka 5. 1 BOD

To znači da je zadnja znamenka trećeg broja 4, a kako je djeljiv sa 7, onda to mogu biti brojevi  $2 \cdot 7 = 14$ ,  $12 \cdot 7 = 84$ ,  $22 \cdot 7 = 154$ , ... 2 BODA

Naime, 10 uzastopnih višekratnika broja 7, počevši od najmanjega prirodnog, završavaju redom znamenkama 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0. 1 BOD

Ako je treći broj 14, onda je drugi 13, ali nije djeljiv s 3. 1 BOD

Ako je treći broj 84, onda je drugi 83, ali nije djeljiv s 3. 1 BOD

Ako je treći broj 154, onda je drugi 153 i djeljiv je s 3. 1 BOD

Traženi brojevi su 152, 153, 154 i 155. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Treće rješenje.**

Prvi broj je paran jer je djeljiv s 2, a kako su brojevi uzastopni, onda je drugi neparan, treći paran, a četvrti neparan. 2 BODA

Četvrti broj je djeljiv s 5 i neparan je pa mu je zadnja znamenka 5. 1 BOD

Posljednja znamenka drugog broja mora biti 3, a djeljiv je s 3. 1 BOD

Ako je drugi broj jednoznamenkast, to je broj 3. Onda bi treći broj bio 4, ali nije djeljiv sa 7. 1 BOD

Ako je drugi broj dvoznamenkast, onda je oblika  $\overline{a3}$  gdje je  $a \in \{3, 6, 9\}$ . Onda bi treći broj mogao biti 34, 64 ili 94, ali niti jedan od njih nije djeljiv sa 7. 1 BOD

Ako je drugi broj troznamenkast, onda je oblika  $\overline{ab3}$ , gdje je  $a + b$  djeljivo s 3. 1 BOD

Tražimo najmanje rješenje pa gledamo redom.

Za  $a = 1, b = 2$ , treći broj bi bio 124, ali nije djeljiv sa 7. 1 BOD

Za  $a = 1, b = 5$ , treći broj bi bio 154 i djeljiv je sa 7 pa smo pronašli rješenje. 1 BOD

Traženi brojevi su 152, 153, 154, 155. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**2.** Za koji četveroznamenasti broj  $\overline{abcd}$  vrijedi  $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2023$  ?

**Rješenje.**

$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2023$$

Lijevu stranu jednakosti raspišimo u dekadskom rastavu.

$$(1000a + 100b + 10c + d) + (100a + 10b + c) + (10a + b) + a = 2023 \quad 1 \text{ BOD}$$

Imamo:

$$1111a + 111b + 11c + d = 2023, \text{ pri čemu su } a, b, d, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, a \neq 0. \quad 1 \text{ BOD}$$

Znamenka  $a$  ne može biti veća od 1 jer bi u protivnom broj na lijevoj strani bio veći od 2023. Stoga je  $a = 1$ . 1 BOD

Tada je:

$$1111 + 111b + 11c + d = 2023$$

$$111b + 11c + d = 912$$

Zaključujemo da je  $b < 9$  jer bi u protivnom broj na lijevoj strani bio veći od 999. 1 BOD

Ako je  $b = 8$ , slijedi:

$$888 + 11c + d = 912$$

$$11c + d = 24 \quad 1 \text{ BOD}$$

Ako je  $b = 7$ , slijedi:

$$777 + 11c + d = 912$$

$$11c + d = 135$$

Nemoguće, najveća je znamenka 9 pa je  $11c + d$  najviše 108. Dakle,  $b$  ne može biti 7 niti manje od 7.

1 BOD

To znači da je  $b = 8$ .

Tada je  $11c + d = 24$ , pa je  $c \leq 2$ .

1 BOD

Ako je  $c = 2$ , onda je:

$$22 + d = 24$$

$$d = 24 - 22$$

$$d = 2$$

1 BOD

Ako je  $c = 1$ , onda je:

$$11 + d = 24$$

$$d = 24 - 11$$

$$d = 13$$

Nemoguće, najveća je znamenka 9 pa je  $11 + d$  najviše 20. Dakle,  $d$  ne može biti 1 niti manje od 1.

1 BOD

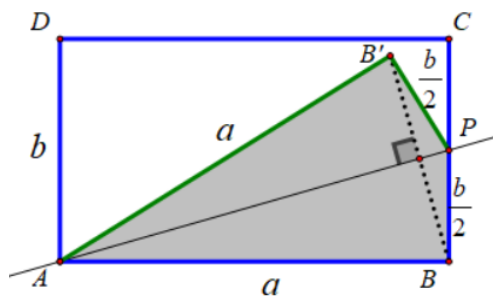
Konačno,  $a = 1$ ,  $b = 8$ ,  $c = 2$  i  $d = 2$  pa je traženi broj 1822.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je  $ABCD$  pravokutnik čije su duljine stranica, izražene u centimetrima, prirodni brojevi. Točka  $P$  je polovište stranice  $\overline{BC}$ , a točka  $B'$  je osnosimetrična slika točke  $B$  s obzirom na pravac  $AP$ . Ako opseg četverokuta  $ABPB'$  iznosi 15 cm, koliko najmanje, a koliko najviše može iznositi površina pravokutnika  $ABCD$ ?

**Rješenje.**



1 BOD

Označimo  $|AB| = a$  i  $|AD| = b$  pa vrijedi:

zadanom osnom simetrijom dužina  $\overline{AB}$  preslika se u  $\overline{AB'}$ , a dužina  $\overline{BP}$  preslika se u  $\overline{PB'}$ .

Stoga za duljine stranica četverokuta  $ABPB'$  vrijedi  $|AB| = |AB'| = a$  i  $|BP| = |PB'| = \frac{b}{2}$ .

1 BOD

Sada je:

$$o_{ABPB'} = 2 \cdot a + 2 \cdot \frac{b}{2}$$

$$o_{ABPB'} = 2a + b$$

$$2a + b = 15$$

1 BOD

Kako je  $b = 15 - 2a$ , a  $a, b \in \mathbb{N}$  onda imamo sljedeće mogućnosti:

$a$	$b$	$P_{ABCD}$	
1	13	$13 \text{ cm}^2$	1 BOD
2	11	$22 \text{ cm}^2$	1 BOD
3	9	$27 \text{ cm}^2$	1 BOD
4	7	<b><math>28 \text{ cm}^2</math> najveća moguća površina</b>	1 BOD
5	5	$25 \text{ cm}^2$	1 BOD
6	3	$18 \text{ cm}^2$	1 BOD
7	1	<b><math>7 \text{ cm}^2</math> najmanja moguća površina</b>	1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Marko i Luka su se našli na početku staze duge 1800 m. Marko vozi bicikl, a Luka trči te se obojica kreću stalnim brzinama. Kad stignu do kraja staze, okreću se i bez stajanja nastavljaju u suprotnom smjeru. U 30 minuta Marko je prešao 9 km, a Luka 4.5 km. Na kojoj udaljenosti će biti jedan od drugoga 30 minuta nakon početka treninga, a na kojoj udaljenosti od početka staze su se prvi put susreli?

**Prvo rješenje.**

Marko je u zadanom vremenu, vozeći bicikl stalnom brzinom, prešao put od 9 km = 9000 m što znači da je s prešao  $9000 : 1800 = 5$  duljina staze.

Luka je u zadanom vremenu, trčeći stalnom brzinom, prešao put od 4.5 km = 4500 m što znači da je prešao  $4500 : 1800 = 2.5$  duljine staze. 1 BOD

Nakon 30 minuta od početka treninga Marko je na kraju staze, a Luka je na polovini staze što znači da su međusobno udaljeni 900 m. 2 BODA

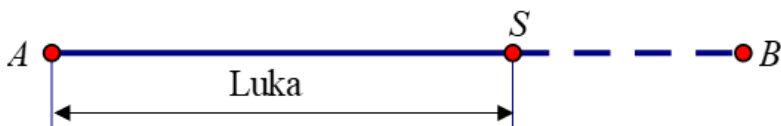
Za 30 minuta Marko je prešao dvostruko više od Luke i obojica se kreću stalnim brzinama. Prvi su se puta susreli kad je Luka išao prema kraju staze, a Marko se vraćao prema njenom početku. 1 BOD

Neka je  $A$  - početak staze,  $B$  - kraj staze i  $S$  - mjesto prvog susreta.



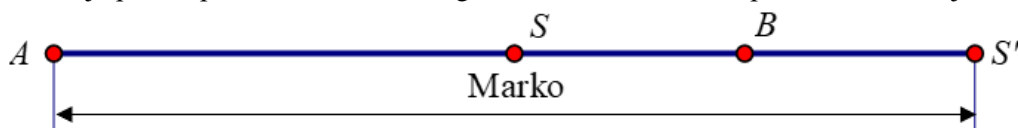
Prikažimo crtežom put koji je prešao svaki od njih.

Luka je prešao put od  $A$  do  $S$ .



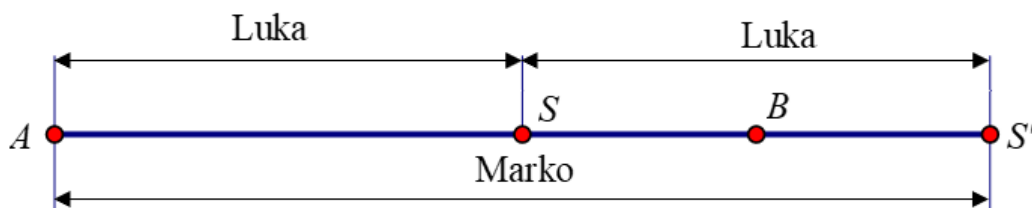
1 BOD

Marko je prešao put od  $A$  do  $B$  te natrag od  $B$  do  $S$ , što se može prikazati i na ovaj način:



1 BOD

No put koji je prešao Marko je dvostruko veći, pa je put od  $S$  do  $B$  te natrag od  $B$  do  $S$  jednak putu od  $A$  do  $S$ .



1 BOD

To znači da je put od  $S$  do  $B$  jednak polovini puta od  $A$  do  $S$ , što znači da je mjesto njihovog susreta na  $\frac{2}{3}$  staze.



2 BODA

Po prvi put su se susreli na  $\frac{2}{3}$  od 1800 m, što je 1200 m od početka staze.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

### Drugo rješenje.

Marko je u zadanom vremenu, vozeći bicikl stalnom brzinom, prešao put od 9 km = 9000 m što znači da je s prešao  $9000 : 1800 = 5$  duljina staze.

Luka je u zadanom vremenu, trčeći stalnom brzinom, prešao put od 4.5 km = 4500 m što znači da je prešao  $4500 : 1800 = 2.5$  duljine staze.

1 BOD

Nakon 30 minuta od početka treninga Marko je na kraju staze, a Luka je na polovini staze što znači da su međusobno udaljeni 900 m.

2 BODA

Marko prijeđe stazu za  $30 : 5 = 6$  minuta, a Luka za  $30 : 2.5 = 12$  minuta.

Ako Marku treba 6 minuta za cijelu stazu od 1800 metara, onda vozi stalnom brzinom od  $1800 : 6 = 300$  metara u minuti. Ako Luki treba 12 minuta za tu stazu, onda trči stalnom brzinom od  $1800 : 12 = 150$  metara u minuti.

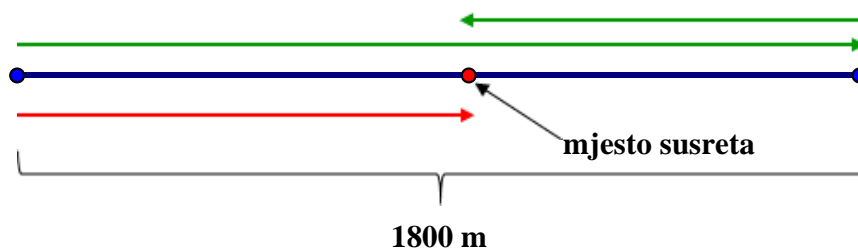
2 BODA

Dalje zaključujemo da je u trenutku susreta Marko na povratku prema početku staze, a Luka još trči prema kraju staze. Znači da će do točke susreta zajedno prijeći dvije duljine staze tj. 3600 m. Neka je do prvog susreta prošlo  $t$  minuta.

1 BOD

Do tog trenutka Marko će prijeći put od  $300t$  metara, a Luka  $150t$  metara.

1 BOD



$$300t + 150t = 3600$$

$$450t = 3600$$

$$t = \frac{3600}{450} = 8$$

2 BODA

Po prvi put su se susreli 8 minuta nakon početka treninga i to na udaljenosti od  $150 \cdot 8 = 1200$  metara od početka staze.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Treće rješenje.**

Marko je u zadanom vremenu, vozeći bicikl stalnom brzinom, prešao put od 9 km = 9000 m što znači da je s prešao  $9000 : 1800 = 5$  duljina staze.

Luka je u zadanom vremenu, trčeći stalnom brzinom, prešao put od 4.5 km = 4500 m što znači da je prešao  $4500 : 1800 = 2.5$  duljine staze.

1 BOD

Nakon 30 minuta od početka treninga Marko je na kraju staze, a Luka je na polovini staze što znači da su međusobno udaljeni 900 m.

2 BODA

Za 30 minuta Marko je prešao dvostruko više od Luke.

To znači, ako je Luka do prvog susreta prešao  $x$  dijelova staze, onda je Marko prešao  $2x$  dijelova staze.

1 BOD

No Marko je do prvog susreta prešao cijelu stazu i još  $(1 - x)$  dijelova, tj.  $1 + 1 - x = (2 - x)$  dijelova staze.

2 BODA

$$2x = 2 - x$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

2 BODA

Luka je prešao  $\frac{2}{3}$  staze što znači da su se po prvi put susreli na  $\frac{2}{3}$  od 1800 m što je 1200 m od početka staze.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Nakon što je prekontrolirao karte svim putnicima u tri vagona, kondukter Mirko je zaključio: Da se u prvi vagon ukrcalo 55 putnika više, onda bi u prvom vagonu bio isti broj putnika kao u drugom i trećem zajedno. Da se u drugi vagon ukrcalo 33 putnika više, onda bi u drugom vagonu bio isti broj putnika kao u prvom i trećem zajedno. Broj putnika u prvom vagonu manji je od četvrtine broja putnika u trećem vagonu. Koliko je najviše putnika moglo biti u ta tri vagona?

**Prvo rješenje.**

Očito je broj putnika u 1. vagonu manji od broja putnika u drugom vagonu.

Prikažimo grafički broj putnika u 1., 2. i 3. vagonu pri čemu uočimo da je za taj prikaz svejedno je li broj putnika u 3. vagonu veći ili manji od broja putnika u većem od preostala dva.

I. 

II. 

III. 

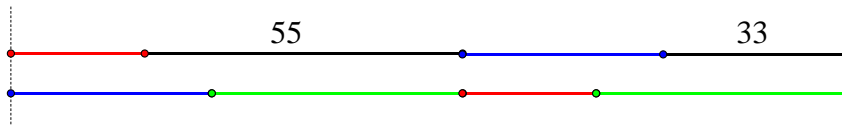
1 BOD

U skladu s oznakama vrijedi:



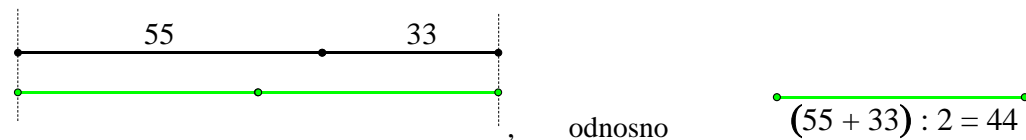
2 BODA

To znači da je:



1 BOD

iz čega se dobije:



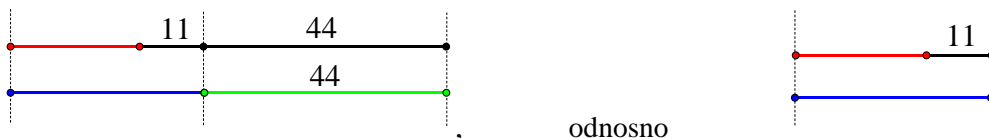
odnosno

$$(55 + 33) : 2 = 44$$

U trećem vagonu bilo je 44 putnika.

2 BODA

Sada dobijemo:



odnosno

1 BOD

Kako je broj putnika u prvom vagonu manji od  $\frac{1}{4}$  od 44, što je 11, zaključujemo da je u prvom vagonu najviše 10 putnika.

1 BOD

To znači da je u 2. vagonu najviše  $10 + 11 = 21$  putnik.

1 BOD

U ta tri vagona moglo je biti najviše  $44 + 21 + 10 = 75$  putnika.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

### Drugo rješenje.

Očito je broj putnika u 1. vagonu manji od broja putnika u drugom vagonu.

Označimo s  $x$ ,  $y$ ,  $z$  redom broj putnika u 1., 2. i 3. vagonu pri čemu uočimo da je za taj prikaz svejedno je li broj putnika u 3. vagonu veći ili manji od broja putnika u većem od preostala dva.

1 BOD

Sada vrijedi:

$$x + 55 = y + z$$

$y + 33 = x + z, y > x.$  2 BODA

Zbrajanjem ovih jednakosti dobijemo:

$x + 55 + y + 33 = y + z + x + z, y > x.$  1 BOD

Odavde je  $88 = 2 \cdot z$ , pa je  $z = 44$ .

U trećem je vagonu bilo 44 putnika. 2 BODA

Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu dobijemo:

$x + 55 = y + 44, y > x.$

To možemo zapisati na način:

$x + 11 + 44 = y + 44, y > x$ , odnosno  $x + 11 = y, y > x.$  1 BOD

Kako je broj putnika u prvom vagonu manji od  $\frac{1}{4}$  od 44, što je 11, zaključujemo da je  $x < 11$  pa je najveća moguća vrijednost  $x = 10$ . 1 BOD

Onda je najveća moguća vrijednost za  $y$  jednaka  $10 + 11 = 21$ . 1 BOD

U ta tri vagona moglo je biti najviše  $44 + 21 + 10 = 75$  putnika. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA



ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. U novčaniku se nalazi šest međusobno različitih kovanica centa i eura (5 centi, 10 centi, 20 centi, 50 centi, 1 € i 2 €). Iz novčanika se, istovremeno i bez gledanja, izvlače tri kovanice. Na koliko se različitih načina mogu izvući kovanice tako da je njihova ukupna vrijednost veća od 85 centi?

**Prvo rješenje.**

Budući da je zbroj vrijednosti svih kovanica u centima  $5 + 10 + 20 + 50 = 85$  centi, zaključujemo da zbroj vrijednosti bilo koje od te tri kovanice nikad neće biti veći od 85 centi.

Kako bi zbroj vrijednosti kovanica bio veći od 85 centi, barem jedna od tri kovanice mora biti kovanica od 1 € ili 2 €.

1 BOD

Kovanice izvlačimo istovremeno pa nije bitan redoslijed zapisivanja izvučenih kovanica.

Mogućnosti za izvučene kovanice s traženim svojstvom su:

{1 €, 5 centi, 10 centi}	{1 €, 5 centi, 20 centi}	{1 €, 5 centi, 50 centi}
{1 €, 10 centi, 20 centi}	{1 €, 10 centi, 50 centi}	{1 €, 20 centi, 50 centi}
{2 €, 5 centi, 10 centi}	{2 €, 5 centi, 20 centi}	{2 €, 5 centi, 50 centi}
{2 €, 10 centi, 20 centi}	{2 €, 10 centi, 50 centi}	{2 €, 20 centi, 50 centi}
{2 €, 1 €, 5 centi}	{2 €, 1 €, 10 centi}	
{2 €, 1 €, 20 centi}	{2 €, 1 €, 50 centi}	

8 BODOVA

**(Napomena:** Za svake dvije točno napisane mogućnosti dodjeljuje se 1 BOD. Broj dodijeljenih bodova mora biti cjelobrojan.)

Takve se kovanice mogu izvući na 16 različitih načina.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

Budući da je zbroj vrijednosti svih četiriju kovanica u centima  $5 + 10 + 20 + 50 = 85$  centi, zaključujemo da zbroj vrijednosti bilo koje od te tri kovanice nikad neće biti veći od 85 centi.

Kako bi zbroj vrijednosti kovanica bio veći od 85 centi, barem jedna od tri kovanice mora biti kovanica od 1 € ili 2 €.

1 BOD

Razlikujemo tri slučaja.

1. *slučaj*: jedna kovanica je od 1 €, a među preostale dvije nije kovanica od 2 €.

Od preostale četiri kovanice (5 centi, 10 centi, 20 centi, 50 centi) izvlačimo dvije kovanice. Prvu možemo izvući na 4 načina, a drugu na 3 načina. 2 BODA

Kako redoslijed izvlačenja nije bitan, ukupan broj mogućnosti je  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ . 1 BOD

2. *slučaj*: jedna kovanica je od 2 €, a među preostale dvije nije kovanica od 1 €.

Ovaj slučaj je analogan prethodnome. Od preostale četiri kovanice (5 centi, 10 centi, 20 centi, 50 centi) izvlačimo dvije kovanice. Kako redoslijed izvlačenja nije bitan, ukupan broj mogućnosti je  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ . 3 BODA

3. *slučaj*: izvučena je jedna kovanica od 1 € i jedna kovanica od 2 €.

Treća kovanica može biti bilo koja od preostale četiri kovanice (5 centi, 10 centi, 20 centi, 50 centi) pa su to 4 mogućnosti. 2 BODA

Ukupan broj mogućnosti za izvučene kovanice je  $6 + 6 + 4 = 16$ . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Mika je postavio točno vrijeme na svom ručnom satu u podne. Točno sat vremena nakon toga na svom je ručnom satu očitao 12 h 57 minuta 36 s. Ako pretpostavimo da njegov ručni sat nastavlja kasniti na isti način, koje je stvarno vrijeme ako ručni sat pokazuje 19 h 30 minuta? Vrijeme izrazi u satima, minutama i sekundama.

**Prvo rješenje.**

Nakon 60 minuta na Mikiu je satu prošlo 57 minuta i 36 sekundi 1 BOD

ili  $57 \frac{36}{60} = 57 \frac{6}{10} = 57.6$  minuta. 1 BOD

(**Napomena:** Drugi bod donosi zapis proteklog vremena na Mikiu ručnom satu u obliku mješovitog ili decimalnog broja.)

Od podne do 19 sati 30 minuta na Mikiu će satu proći 7 sati 30 minuta = 450 minuta. 1 BOD

Stvarno se vrijeme i vrijeme na Mikiu satu povećava proporcionalno.

Neka je  $k$  koeficijent proporcionalnosti. 1 BOD

Od 12 sati do 19 sati 30 minuta na Mikiu se satu vrijeme povećalo  $k = \frac{450}{57.6} = 7.8125$  puta. 1 BOD

Do 19 sati 30 minuta sati stvarno će proći  $x$  minuta.

$x = 60 \cdot 7.8125$  minuta 1 BOD

$x = 468.75$  minuta 1 BOD

$x = 7$  h 48.75 minuta 1 BOD

$x = 7$  h 48 minuta 45 s 1 BOD

Mika je postavio točno vrijeme na svom ručnom satu u podne.

Od onda je prošlo 7 h 48 minuta 45 s pa je stvarno vrijeme 19 h 48 minuta 45 s. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

Nakon 60 minuta na Mikiu je satu prošlo 57 minuta i 36 sekundi. 1 BOD

To znači da u jednom satu Mikiu ručni sat kasni 2 minute 24 sekundi ili 144 sekundi. 1 BOD

(**Napomena:** Drugi bod donosi izražavanje vremena kašnjenja u sekundama.)

To je 144 sekundi kašnjenja na 3600 sekundi koje su protekle.

$$\frac{144}{3600} = 0.04 = 4 \%$$

Zaključujemo da ručni sat kasni 4 % proteklog stvarnog vremena. 1 BOD

Od 12 sati do 19 sati 30 minuta na Mikiu će satu proći 7 sati 30 minuta = 450 minuta. 1 BOD

Tih 450 minuta je 96 % stvarnog vremena koje je proteklo od podneva.

Označimo s  $x$  stvarno vrijeme u minutama.

Vrijedi:

96 % od  $x$  je 450 1 BOD

$x = 450 : 0.96$  1 BOD

$x = 468.75$  1 BOD

$x = 7 \text{ h } 48.75 \text{ minuta}$  1 BOD

$x = 7 \text{ h } 48 \text{ minuta } 45 \text{ s}$  1 BOD

Mika je postavio točno vrijeme na svom ručnom satu u podne.

Od onda je prošlo 7 h 48 minuta 45 s pa je stvarno vrijeme 19 h 48 minuta 45 s. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. U jednoj velikoj tvrtki na računalima se proširio računalni virus. U siječnju je virusom zaraženo 30 % svih računala. U veljači je s 30 % zaraženih računala uklonjen virus, a 30 % u tom trenutku nezaraženih računala je zaraženo virusom. U ožujku je s 30 % zaraženih računala uklonjen virus, a na 30 % u tom trenutku nezaraženih računala se pojavio virus. Koliki postotak računala u toj tvrtki nije zaražen virusom na početku travnja?

**Rješenje.**

Računala u tvrtki su ili zaražena ili nisu zaražena.

Neka je  $x$  broj svih računala te tvrtke.

U siječnju: 30 % od  $x$  ili  $0.3x$  je zaraženo. 70 % od  $x$  ili  $0.7x$  nije zaraženo.

U veljači:  $0.3 \cdot 0.7x = 0.21x$  je zaraženo.

1 BOD

$0.3 \cdot 0.3x = 0.09x$  više nije zaraženo.

1 BOD

$0.3x - 0.09x = 0.21x$  je još uvijek zaraženo.

1 BOD

$$0.7x - 0.21x = 0.49x \text{ i dalje nije zaraženo.}$$

1 BOD

$$\text{Ukupno } 0.21x + 0.21x = 0.42x \text{ je zaraženo.}$$

1 BOD

$$\text{Ukupno } 0.09x + 0.49x = 0.58x \text{ nije zaraženo.}$$

1 BOD

$$\text{U ožujku: } 0.3 \cdot 0.58x = 0.174x \text{ je zaraženo.}$$

1 BOD

$$0.3 \cdot 0.42x = 0.126x \text{ više nije zaraženo.}$$

1 BOD

$$0.58x - 0.174x = 0.406x \text{ i dalje nije zaraženo.}$$

1 BOD

$$\text{Ukupno } 0.126x + 0.406x = 0.532x \text{ nije zaraženo.}$$

Na početku travnja u toj tvrtki virusom nije zaraženo 53.2 % računala.

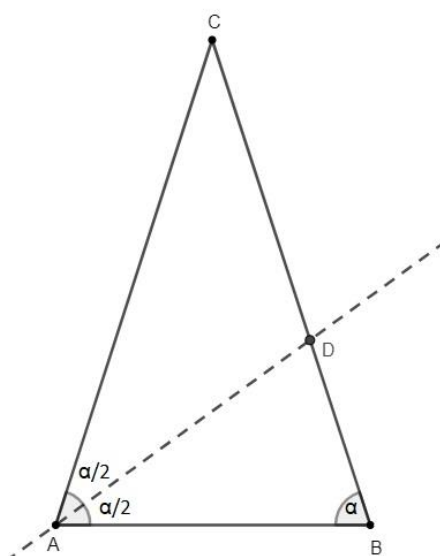
1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Zadan je jednakokračan trokut  $ABC$  s osnovicom  $\overline{AB}$  koja je kraća od kraka. Točka  $D$  je sjecište simetrale kuta  $\angle BAC$  i kraka  $\overline{BC}$ . Odredi veličine kutova trokuta  $ABC$  ako je trokut  $ABD$  jednakokračan.

**Rješenje.**

Skica:



1 BOD

Neka je  $|\angle BAC| = |\angle CBA| = \alpha$ . Tada je  $|\angle BAD| = |\angle DAC| = \frac{\alpha}{2}$ .

Kako je  $\angle CDA$  vanjski kut trokuta  $ABD$ , slijedi da je  $|\angle CDA| = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}\alpha$ . 2 BODA

Prema uvjetu zadatka trokut  $ABD$  jednakokratan. Promotrimo koje stranice mogu biti krakovi trokuta  $ABD$ .

Promatramo tri slučaja.

1. slučaj:

Neka je  $|AD| = |BD|$ .

Kako je  $|\angle DBA| = \alpha > \frac{\alpha}{2} = |\angle BAD|$ , slijedi da je  $|AD| > |BD|$  pa stranice  $\overline{AD}$  i  $\overline{BD}$  ne mogu biti krakovi trokuta  $ABD$ . 1 BOD

2. slučaj:

Neka je  $|AB| = |BD|$ .

Tada je  $|\angle ADB| = |\angle BAD| = \frac{\alpha}{2}$ .

Kutovi  $\angle CDA$  i  $\angle ADB$  su sukuti pa je

$$|\angle CDA| + |\angle ADB| = \frac{3}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha = 180^\circ$$

tj.

$$\alpha = 90^\circ$$

To nije moguće jer trokut ne može imati dva prava kuta.

Stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{BD}$  ne mogu biti krakovi trokuta  $ABD$ . 1 BOD

(Ili: Da bi bilo  $|AB| = |BD|$ , točka  $D$  mora ležati na visini iz vrha  $C$  na osnovicu jednakokrakog trokuta  $ABC$ , što je nemoguće jer je  $D$  na kraku između točaka  $B$  i  $C$ . 1 BOD)

3. slučaj:

Neka je  $|AB| = |AD|$

Tada je  $|\angle ADB| = |\angle DBA| = \alpha$ .

Kako je zbroj veličina kutova u trokutu  $180^\circ$ , za trokut  $ABD$  vrijedi

$$\frac{\alpha}{2} + \alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 72^\circ$$

2 BODA

Nadalje,

$$|\angle ACB| = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ$$

2 BODA

Veličine unutarnjih kutova trokuta  $ABC$  su  $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ .

1 BOD

**(Napomena:** Ako učenik dobije točno rješenje promatrajući samo jednakokratan trokut  $ABD$  s krakovima  $\overline{AB}$  i  $\overline{AD}$ , a nije utvrdio da nema drugih rješenja (odbacivanje slučajeva da su krakovi  $\overline{AD}$  i  $\overline{BD}$ , tj.  $\overline{AB}$  i  $\overline{BD}$ ) može dobiti najviše 8 BODOVA.)

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Ako nekom troznamenkastom prirodnom broju s različitim znamenkama dodamo troznamenasti broj zapisan istim znamenkama u obrnutom redoslijedu i umanjen za 50 %, dobit ćemo novi troznamenasti broj. Koji troznamenasti broj treba odabrati kako bi dobiveni broj nakon provedenih računskih radnji bio najveći mogući?

**Rješenje.**

Neka je  $\overline{abc}$  traženi troznamenasti broj gdje su  $a$ ,  $b$  i  $c$  znamenke takve da je  $a \neq 0$ .

Tada je  $\overline{cba}$  troznamenasti broj čije su znamenke u obrnutom redoslijedu,  $c \neq 0$ .

$\overline{cba} = 100c + 10b + a$  pa je za 50 % manji od njega (njegova polovina) broj oblika  $50c + 5b + 0.5a$ .  
1 BOD

Promatrani zbroj je

$$\overline{abc} + \frac{1}{2}\overline{cba} = 100a + 10b + c + 50c + 5b + 0.5a = 100.5a + 15b + 51c.$$

1 BOD

Budući da zbroj treba biti prirodan troznamenasti broj, tada  $0.5a$ , tj.  $100.5a$  mora biti prirodan broj. Zato  $a$  mora biti paran.

Dakle,  $a \in \{2, 4, 6, 8\}$ .  
1 BOD

1. slučaj

Neka je  $a = 2$ .

Tada je promatrani zbroj  $201 + 15b + 51c$ .

Zbroj ima najveću vrijednost ako je  $c = 9$  i  $b = 8$ ,  $201 + 120 + 459 = \mathbf{780}$ .  
1 BOD

2. slučaj

Neka je  $a = 4$ .

Tada je promatrani zbroj  $402 + 15b + 51c$ .

Zbroj ima najveću vrijednost ako je  $c = 9$  i  $b = 8$ ,  $402 + 120 + 459 = \mathbf{981}$ .  
1 BOD

3. slučaj

Neka je  $a = 6$ .

Tada je promatrani zbroj  $603 + 15b + 51c$ .

$$603 + 15b + 51c \leq 999$$

$$15b + 51c \leq 396$$

$$15b \leq 396 - 51c$$

$c$	$51c$	$396 - 51c$	
7	357	39	$b = 2$
6	306	90	$b = 6$
5	255	141	$b = 9$

Najveći zbroj je kad je  $c = 6$ ,  $b = 6$ , ali  $b = c$  pa taj slučaj odbacujemo.

Sljedeći najveći zbroj je za  $c = 5$ ,  $b = 9$ ,  $603 + 255 + 135 = \mathbf{993}$ .  
2 BODA

(Napomena 1: Učenik koji na bilo koji način pokaže koji slučaj odbacuje te kada se postiže i koliki je najveći zbroj, dobiva 2 BODA.)

4. slučaj

Neka je  $a = 8$ .

Tada je promatrani zbroj  $804 + 15b + 51c$ .

$$804 + 15b + 51c \leq 999$$

$$15b + 51c \leq 195$$

$$15b \leq 195 - 51c$$

$c$	$51c$	$195 - 51c$	
3	153	42	$b = 2$
2	102	93	$b = 6$
1	51	144	$b = 9$

Zbroj ima najveću vrijednost ako je  $c = 2$ ,  $b = 6$ ,  $804 + 90 + 102 = \mathbf{996}$ . 2 BODA

(Napomena 2: Učenik koji na bilo koji način pokaže kada se postiže i koliki je najveći zbroj, dobiva 2 BODA.)

Od svih mogućnosti, najveći troznamenkasti zbroj dobiva se ako odaberemo broj **862**. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj vrijednost izraza:

$$\frac{(\sqrt{666} + \sqrt{888})^2 - \sqrt{666^2 + 888^2}}{444}.$$

**Prvo rješenje.**

Računamo redom:

$$(\sqrt{666} + \sqrt{888})^2 =$$

$$666 + 2 \cdot \sqrt{666} \cdot \sqrt{888} + 888 = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1554 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{111} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{111} = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1554 + 222\sqrt{48} = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1554 + 222 \cdot 4\sqrt{3} =$$

$$1554 + 888\sqrt{3} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\sqrt{666^2 + 888^2} =$$

$$\sqrt{6^2 \cdot 111^2 + 8^2 \cdot 111^2} = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\sqrt{111^2 \cdot (6^2 + 8^2)} = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$111 \cdot \sqrt{100} = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$1110 \quad 1 \text{ BOD}$$

Konačno:

$$\frac{(\sqrt{666} + \sqrt{888})^2 - \sqrt{666^2 + 888^2}}{444} =$$

$$\frac{1554 + 888\sqrt{3} - 1110}{444} =$$

$$\frac{444 + 888\sqrt{3}}{444} =$$

$$1 + 2\sqrt{3}. \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Drugo rješenje.**

$$\frac{(\sqrt{666} + \sqrt{888})^2 - \sqrt{666^2 + 888^2}}{444} = \frac{(\sqrt{111 \cdot 6} + \sqrt{111 \cdot 8})^2 - \sqrt{(111 \cdot 6)^2 + (111 \cdot 8)^2}}{111 \cdot 4}$$

2 BODA



$$= \frac{(\sqrt{111} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{111} \cdot \sqrt{8})^2 - \sqrt{111^2 \cdot 6^2 + 111^2 \cdot 8^2}}{111 \cdot 4}$$

$$= \frac{(\sqrt{111} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{8}))^2 - \sqrt{111^2 \cdot (6^2 + 8^2)}}{111 \cdot 4}$$

2 BODA

$$= \frac{\sqrt{111}^2 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{8})^2 - \sqrt{111^2 \cdot (36 + 64)}}{111 \cdot 4}$$

$$= \frac{111 \cdot (6 + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} + 8) - 111\sqrt{100}}{111 \cdot 4}$$

2 BODA

$$= \frac{111 \cdot (14 + 2\sqrt{48}) - 111 \cdot 10}{111 \cdot 4}$$

$$= \frac{111 \cdot (14 + 2\sqrt{16 \cdot 3} - 10)}{111 \cdot 4}$$

2 BODA

$$= \frac{4 + 8\sqrt{3}}{4}$$

$$= 1 + 2\sqrt{3}$$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Pronađi sve parove prirodnih brojeva čija je razlika kvadrata 2023.

**Rješenje.**

Ako su  $a$  i  $b$  prirodni brojevi, onda vrijedi  $a^2 - b^2 = 2023$ .

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17 \quad 2 \text{ BODA}$$

S obzirom da vrijedi  $a + b > a - b$ , imamo 3 rješenja:\* 1 BOD

$$\text{I. } (a + b)(a - b) = 2023 \cdot 1$$

$$a + b = 2023$$

$$\underline{a - b = 1}$$

$$2a = 2024$$

$$a = 1012 \quad b = 1011 \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\text{II. } (a + b)(a - b) = 289 \cdot 7$$

$$a + b = 289$$

$$\underline{a - b = 7}$$

$$2a = 296$$

$$a = 148 \quad b = 141 \quad 2 \text{ BODA}$$

III.  $(a + b)(a - b) = 119 \cdot 17$

$a + b = 119$

$a - b = 17$

$2a = 136$

$a = 68 \quad b = 51$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

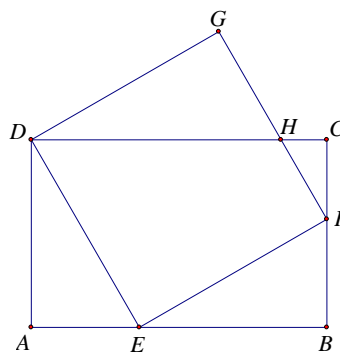
**\*Primjedba.** Umjesto da koristimo  $a + b > a - b$ , alternativno se mogu ispitati 3 slučaja u kojima je  $a + b < a - b$  i dobiti da u ta 3 slučaja nema rješenja.

Ukoliko učenik ne napomene da, zbog uvjeta  $a + b > a - b$ , možemo promatrati samo 3 slučaja ili alternativno ne provjeri svih 6 mogućnosti, ne može dobiti taj bod, tj. ukupno može dobiti najviše 9 bodova.

3. Zadan je pravokutnik  $ABCD$ . Za kvadrat  $DEFG$  vrijedi da je točka  $D$  vrh pravokutnika, točka  $E$  pripada dužini  $\overline{AB}$ , točka  $F$  pripada dužini  $\overline{BC}$  i  $|\angle BEF| = 30^\circ$ . Ako je površina kvadrata  $DEFG$   $36 \text{ cm}^2$ , izračunaj opseg i površinu presjeka pravokutnika  $ABCD$  i kvadrata  $DEFG$ .

**Rješenje.**

Točka  $H$  je presjek dužina  $\overline{DC}$  i  $\overline{FG}$ .



Površina kvadrata je  $36 \text{ cm}^2$ , pa je duljina stranice kvadrata  $6 \text{ cm}$ .

1 BOD

$|\angle BEF| = 30^\circ$  i  $|\angle FED| = 90^\circ$ , pa je  $|\angle DEA| = 60^\circ$ .

$|\angle BEF| = 30^\circ$  i  $|\angle FBE| = 90^\circ$ , pa je  $|\angle EFB| = 60^\circ$ .

$|\angle DEA| = 60^\circ$  i  $|\angle EAD| = 90^\circ$ , pa je  $|\angle ADE| = 30^\circ$ .

Trokuti  $\triangle AED$  i  $\triangle EBF$  su polovine jednakostraničnog trokuta u kojem vrijedi da je duljina hipotenuze dvostruko dulja od kraće katete.

1 BOD

Kako je  $|DE| = |EF| = 6$ , slijedi da je  $|AE| = |BF| = 3$ .

1 BOD

Neka je  $|AD| = |EB| = x$ .

Primjenom Pitagorina poučka slijedi:

$$x^2 + 3^2 = 6^2$$

$$x = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Znači, } |AD| = |EB| = 3\sqrt{3}.$$

1 BOD

$|\angle EFB| = 60^\circ$  i  $|\angle GFE| = 90^\circ$ , pa je  $|\angle CFH| = 30^\circ$ .

$|\angle CFH| = 30^\circ$  i  $|\angle HCF| = 90^\circ$ , pa je  $|\angle FHC| = 60^\circ$ .

Trokut  $\triangle HFC$  je također polovina jednakokraknog trokuta.

1 BOD

$$|FC| = |BC| - |BF| = 3\sqrt{3} - 3.$$

Neka je  $|HF| = 2|CH| = 2y$ .

Iz Pitagorinog poučka slijedi  $y^2 + (3\sqrt{3} - 3)^2 = 4y^2$ , odnosno  $(3\sqrt{3} - 3)^2 = 3y^2$ , pa je

$$y^2 = \frac{(3\sqrt{3} - 3)^2}{3}$$

i nadalje

$$y = \frac{3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}} = 3 - \sqrt{3}.$$

1 BOD

Stoga je

$$|HF| = 2y = 6 - 2\sqrt{3} \text{ i}$$

1 BOD

$$|DH| = |DC| - |HC| = 3 + 3\sqrt{3} - (3 - \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}.$$

1 BOD

Presjek pravokutnika i kvadrata je trapez  $DEFH$ .

Opseg iznosi:

$$o = |DE| + |EF| + |HF| + |DH| = 6 + 6 + 6 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (18 + 2\sqrt{3}) \text{ cm.}$$

1 BOD

Površina možemo izračunati tako da od površine pravokutnika  $ABCD$  oduzmemo površine dvaju sukladnih pravokutnih trokuta  $\triangle AED$  i  $\triangle EBF$  i površinu pravokutnog trokuta  $\triangle FCH$ :

$$\begin{aligned} P &= (3 + 3\sqrt{3}) \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} - \frac{(3 - \sqrt{3})(3\sqrt{3} - 3)}{2} \\ &= 9\sqrt{3} + 27 - 9\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3} - 9 - 9 + 3\sqrt{3}}{2} \\ &= 27 - \frac{12\sqrt{3} - 18}{2} \\ &= 27 - 6\sqrt{3} + 9 \\ &= (36 - 6\sqrt{3}) \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

1 BOD

(Alternativno, površinu možemo računati koristeći formulu za površinu trapeza:

$$P = \frac{|DE| + |HF|}{2} \cdot |EF| = \frac{6 + 6 - 2\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = (36 - 6\sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

1 BOD)

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. U grupi se nalazi 6 Varaždinaca, 6 Zadrana i 6 Osječana. Na koliko se načina oni mogu podijeliti u:
- 6 skupina od 3 osobe tako da se u svakoj skupini nalazi po jedan Varaždinac, jedan Zadrana i jedan Osječanin?
  - 3 skupine od 6 osoba tako da se u svakoj skupini nalaze po dva Varaždince, dva Zadrana i dva Osječanina?

**Rješenje.**

**a) Prvi način.**

Izbor jednog od šest Varaždinaca u prvu skupinu možemo napraviti na 6 načina, a na jednako načina i izbor jednog od šest Zadrana te jednog od šest Osječana pa to ukupno možemo napraviti na  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$  načina.

1 BOD

Nakon toga izbor za drugu skupinu možemo napraviti na  $5^3$  načina, za treću na  $4^3$ , potom na  $3^3$  pa na  $2^3$  načina, odnosno ukupno na  $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^3 = 720^3$  načina.

1 BOD

No, nama nije bitan poredak tih skupina, jer su jednakopravne, a kako šest skupina možemo poredati na  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$  načina, onda je ukupni broj rasporeda  $\frac{720^3}{720} = 720^2$ . 2 BODA

Ukupno, broj rasporeda je  $720^2 = 518\,400$ .

**a) Drugi način.**

Najprije fiksirajmo izbor svih Varaždinaca u svaku od šest skupina, jer nam nije bitan poredak tih skupina. 2 BODA

Potom izbor jednog od šest Osječana u prvu skupinu možemo napraviti na 6 načina, a na jednako načina i izbor jednog od šest Zadrana pa to ukupno možemo napraviti na  $6 \cdot 6 = 6^2$  načina. 1 BOD

Nakon toga izbor za drugu skupinu možemo napraviti na  $5^2$  načina, za treću na  $4^2$ , potom na  $3^2$  pa na  $2^2$  načina, odnosno ukupno na  $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^2 = 720^2 = 518\,400$  načina. 1 BOD

**b)** Izbor dva od šest Varaždinaca u prvu skupinu možemo napraviti na  $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$  načina, a na jednako načina i izbor dva od šest Zadrana i dva od šest Osječana pa to ukupno možemo napraviti na  $15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^3$  načina. 2 BODA

Izbor sljedeća dva od šest Varaždinaca u drugu skupinu možemo napraviti na  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  načina, a na jednako toliko načina i izbor od sljedeća dva od šest Zadrana i sljedeća dva od šest Osječana pa to ukupno možemo napraviti na  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$  načina. 1 BOD

Preostala su dva Varaždina, dva Osječana i dva Zadrana pa njih možemo jednoznačno rasporediti u treću skupinu.

Ukupno se raspored u tri skupine može napraviti na  $(15 \cdot 6)^3 = 90^3$  načina. 1 BOD

No, nama nije bitan poredak tih skupina, jer su jednakopravne, a kako tri skupine možemo poredati na  $3 \cdot 2 = 6$  načina, onda je ukupni broj rasporeda  $\frac{90^3}{6}$ . 2 BODA

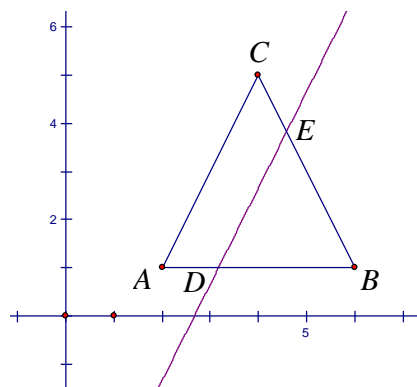
Ukupno, broj rasporeda je  $\frac{90^3}{6} = 121\,500$ .

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. U koordinatnoj ravnini zadan je jednakokračni trokut  $\triangle ABC$  s vrhovima  $A(2, 1)$ ,  $B(6, 1)$  i  $C(4, 5)$ .  
Odredi jednadžbe svih pravaca koji su paralelni s nekim od krakova i dijele trokut na dva dijela jednakih površina.

**Prvo rješenje.**

Pravac dijeli trokut na trapez i jednakokračan trokut.



Trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle DBE$  su slični prema poučku KK s koeficijentom sličnosti  $k$ , a omjer površina je  $k^2$ .

1 BOD

Površina trokuta  $\triangle ABC$  dva je puta veća od površine trokuta  $\triangle DBE$  pa je  $k^2 = 2$ , a  $k = \sqrt{2}$ .

1 BOD

Iz  $|AB| = 4$  i  $k = \sqrt{2}$  slijedi

$$\frac{|AB|}{|DB|} = \sqrt{2} \text{ pa je } |DB| = \frac{|AB|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

1 BOD

Znači, koordinate točke  $D$  su  $D(6 - 2\sqrt{2}, 1)$ .

1 BOD

Jednadžbu pravca  $AC$  dobijemo rješavanjem sustava:

$$A(2, 1), C(4, 5); \quad y = ax + b$$

$$1 = 2a + b$$

$$5 = 4a + b$$

$$y = 2x - 3$$

2 BODA

**(Primjedba.** Za dobiti ova 2 BODA dovoljno je odrediti da je  $a = 2$ .)

Traženi pravac paralelan je s pravcem  $AC$  pa ima isti nagib i prolazi točkom  $D$ .

$$D(6 - 2\sqrt{2}, 1), a = 2; \quad y = ax + b$$

$$1 = 2(6 - 2\sqrt{2}) + b$$

$$b = -11 + 4\sqrt{2}$$

$$y = 2x - 11 + 4\sqrt{2}$$

1 BOD

Analogno se dobije pravac paralelan s krakom  $BC$  koji prolazi točkom  $(2 + 2\sqrt{2}, 1)$ .

Jednadžbu pravca  $BC$  dobijemo rješavanjem sustava:

$$B(6, 1), C(4, 5); \quad y = ax + b$$

$$1 = 6a + b$$

$$5 = 4a + b$$

$$y = -2x + 13$$

2 BODA

**(Primjedba.** Za dobiti ova 2 BODA dovoljno je odrediti da je  $a = -2$ . To slijedi iz simetrije s prethodnim slučajem pa uz taj zaključak nije potrebno ponovo računati  $a$ .)

Traženi pravac paralelan je s pravcem  $AC$  pa ima isti nagib i prolazi točkom  $(2 + 2\sqrt{2}, 1)$ .

$$(2 + 2\sqrt{2}, 1), a = -2; \quad y = ax + b$$

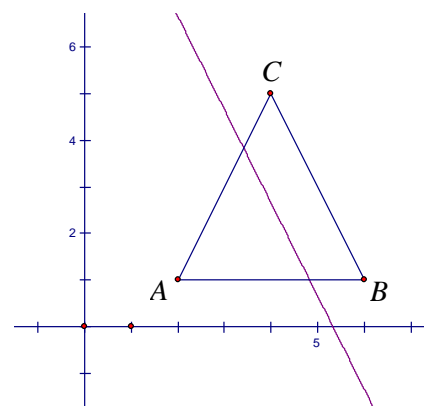
$$1 = -2(2 + 2\sqrt{2}) + b$$

$$b = 5 + 4\sqrt{2}$$

$$y = -2x + 5 + 4\sqrt{2}$$

1 BOD

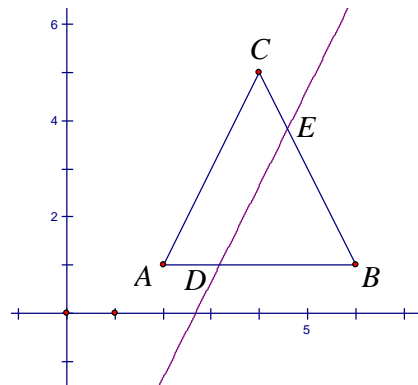
..... UKUPNO 10 BODOVA



**Drugo rješenje.**

Prvi slučaj:

Pravac dijeli trokut na trapez i jednakokračan trokut.



U trokutu  $\triangle ABC$  je  $|AB| = 4$ .

Duljina visine iz vrha  $C$  na osnovicu  $\overline{AB}$  je  $v_1 = 4$ .

Trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle DBE$  su slični prema poučku KK s koeficijentom sličnosti  $k$ , a omjer površina je  $k^2$ . 1 BOD

Površina trokuta  $\triangle ABC$  dva je puta veća od površine trokuta  $\triangle DBE$  pa je  $k^2 = 2$ , a  $k = \sqrt{2}$ . 1 BOD

Iz  $|AB| = 4$  i  $k = \sqrt{2}$  slijedi

$$\frac{|AB|}{|DB|} = \sqrt{2} \text{ pa je } |DB| = \frac{|AB|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Znači, koordinate točke  $D$  su  $D(6 - 2\sqrt{2}, 1)$ . 1 BOD

Duljina visine trokuta  $\triangle DBE$  iz vrha  $E$  na osnovicu  $\overline{DB}$  je

$$v_2 = \frac{v_1}{k} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Apscisa točke  $E$  je aritmetička sredina apscisa točaka  $D$  i  $B$ , a ordinata je  $v_2 + 1 = 2\sqrt{2} + 1$ , dakle  $E(6 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 1)$ . 1 BOD

Pravac kroz točke  $D$  i  $E$ :

$$D(6 - 2\sqrt{2}, 1), E(6 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 1); \quad y = ax + b$$

$$1 = (6 - 2\sqrt{2})a + b$$

$$2\sqrt{2} + 1 = (6 - \sqrt{2})a + b$$

Oduzmemo jednadžbe:

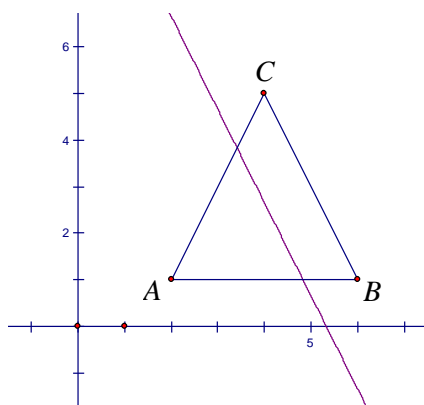
$$\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$$

$$a = 2$$

$$b = 1 - 12 + 4\sqrt{2} = -11 + 4\sqrt{2}$$

Jednadžba pravca je  $y = 2x - 11 + 4\sqrt{2}$ . 2 BODA

Drugi slučaj:



Analogno se odrede točke  $D(2 + 2\sqrt{2}, 1)$  i  $E(2 + \sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 1)$  po simetriji te jednadžba drugog pravca  $y = -2x + 5 + 4\sqrt{2}$ .

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA