

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. siječnja 2023.

4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijede jednakosti: $\square \cdot \square \cdot \bigcirc = 252$

$\triangle \cdot \triangle = 81$

$\triangle \cdot \square = 27$

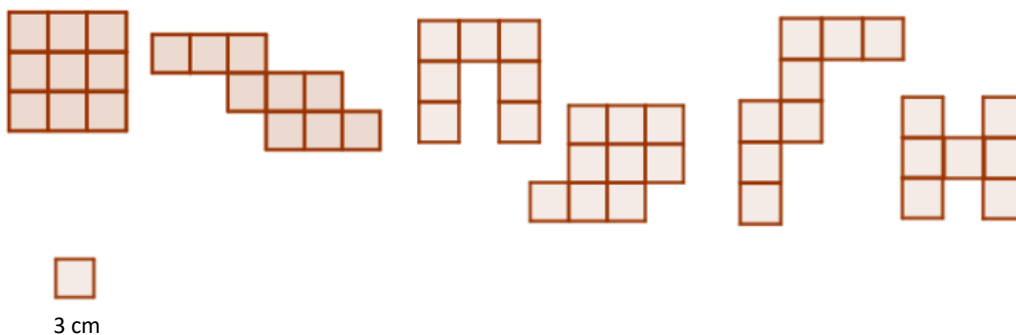
Odredi: $\square + \bigcirc \cdot \triangle = ?$

Rješenje.

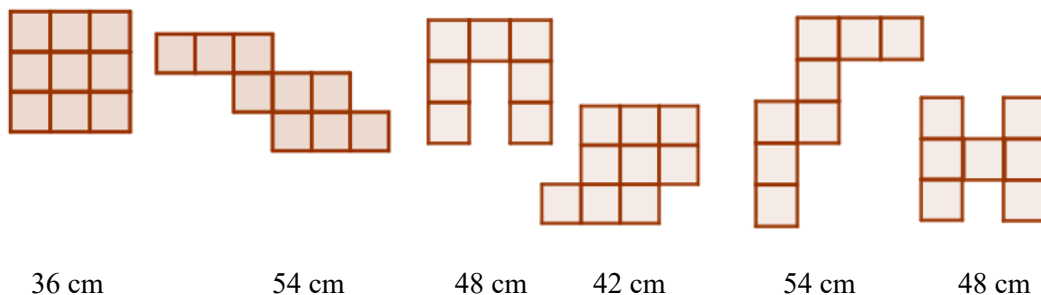
Iz	$\triangle \cdot \triangle = 81$	slijedi da je	$\triangle = 9$	1 BOD
Iz	$\triangle \cdot \square = 27$	slijedi da je	$\square = 27 : 9 = 3$	1 BOD
Iz	$\square \cdot \square \cdot \bigcirc = 252$	slijedi da je	$\bigcirc = 252 : 9 = 28$	2 BODA
Slijedi:	$\square + \bigcirc \cdot \triangle$	$= 3 + 28 \cdot 9 = 3 + 252$		1 BOD
		$= 255$		1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Na slici je zadano 6 likova. Odredi njihove opsege ako je duljina stranice kvadratića 3 cm.



Rješenje.



Svaki točan izračun opsega nosi 1 BOD. Bodovi se ne skidaju u nedostatku mjerne jedinice.

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Ana je već osam godina pretplaćena na jedan časopis. Prve je godine pretplata bila 120 kn. Sljedećih je šest godina rasla za 4 kn godišnje. Ako je Ana u osam godina platila ukupno 1084 kn, za koliko je pretplata porasla u osmoj godini?

Rješenje.

Prve godine pretplata je bila 120 kn,

pa je druge godine bila $120 + 4 = 124$ kn, treće godine $124 + 4 = 128$ kn.

1 BOD

Četvrte godine je bila $128 + 4 = 132$ kn, pete godine $132 + 4 = 136$ kn,

1 BOD

šeste godine $136 + 4 = 140$ kn, a sedme $140 + 4 = 144$ kn.

1 BOD

U tih sedam godina platila je ukupno $120 + 124 + 128 + 132 + 136 + 140 + 144 = 924$ kn.

1 BOD

što znači da je osme godine pretplata bila $1084 \text{ kn} - 924 \text{ kn} = 160$ kn.

1 BOD

U osmoj je godini pretplata porasla za $160 - 144 = 16$ kuna.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Na Ivanovoj kući stoji neparni troznamenkasti broj. Znamenka desetica je dvostruko veća od znamenke jedinica. Znamenka stotica je zbroj znamenaka desetice i jedinice. Odredi sve mogućnosti za Ivanov kućni broj koji je djeljiv brojem 9.

Rješenje.

Na Ivanovoj je kući neparan broj pa zaključujemo da znamenka jedinica može biti 1, 3, 5, 7 ili 9. 1 BOD

Znamenka desetica je dvostruko veća od znamenke jedinica, a znamenka stotica je zbroj znamenaka desetice i jedinice pa imamo dvije mogućnosti:

Znamenka jedinica 1, desetica 2, stotica 3 tj. broj 321.

1 BOD

Znamenka jedinica 3, desetica 6, stotica 9 tj. broj 963.

1 BOD

Ako bi znamenka jedinica bila 5, 7 ili 9 onda bi znamenka desetica bila 10, 14 ili 18 što je nemoguće.

1 BOD

Kako je kućni broj Ivanove kuće djeljiv s 9 slijedi da je točan broj 963.

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik koji ne razmotri i odbaci mogućnost znamenke jedinica 5, 7 ili 9 može ostvariti najviše 5 BODOVA.

5. Na tri stabla bilo je 60 ptica. Nakon nekog vremena s prvog stabla odletjelo je 6 ptica, s drugog stabla 8 ptica, a s trećeg stabla odletjele su 4 ptice. Tada je na svakom stablu ostao isti broj ptica. Koliko je ptica bilo na svakom stablu na početku?

Prvo rješenje.

Sa sva tri stabla ukupno je odletjelo $6 + 8 + 4 = 18$ ptica. 1 BOD

Na stablima su ostale $60 - 18 = 42$ ptice. 1 BOD

Kako je na svakom od tri stabla ostao jednak broj ptica slijedi da je na svakom stablu ostalo $42 : 3 = 14$ ptica. 1 BOD

Dakle, na prvom stablu je bilo $14 + 6 = 20$ ptica, 1 BOD

na drugom stablu $14 + 8 = 22$ ptice, 1 BOD

a na trećem stablu je bilo $14 + 4 = 18$ ptica. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Neka je x broj ptica koje su ostale na stablu nakon što su neke odletjele. Tada je broj ptica na početku:

1.stablo: $x + 6$

2.stablo: $x + 8$

3.stablo: $x + 4$ 1 BOD

Ukupno je bilo 60 ptica pa imamo jednadžbu

$$x + 6 + x + 8 + x + 4 = 60 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$3 \cdot x = 60 - 18$$

$$3 \cdot x = 42$$

$$x = 14 \quad 1 \text{ BOD}$$

Dakle, na prvom stablu je bilo $14 + 6 = 20$ ptica, 1 BOD

na drugom stablu $14 + 8 = 22$ ptice, 1 BOD

a na trećem stablu je bilo $14 + 4 = 18$ ptica. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Iz dvije cijevi stalno istječe voda. Iz jedne cijevi istječe 148 litara vode za 1 sat, a iz druge istječe 148 litara vode za 15 minuta. Koliko vode istječe iz obje cijevi za 12 sati i 45 minuta?

Prvo rješenje. Kako za 1 sat iz prve cijevi istječe 148 litara vode,

slijedi da za 15 minuta (četvrtina sata) istječe $148 : 4 = 37$ litara vode. 1 BOD

Slijedi da za 45 minuta istječe $37 \cdot 3 = 111$ litara vode. 1 BOD

Za 6 sati iz prve cijevi istječe $6 \cdot 148 = 888$ litara vode,

a za 12 sati dvostruko više, odnosno $2 \cdot 888 = 1\,776$ litara vode. 1 BOD

Dakle, za 12 sati i 45 minuta iz prve cijevi istječe $1\,776 + 111 = 1\,887$ litara vode. 1 BOD

Iz druge cijevi za 15 minuta istječe 148 litara vode iz čega slijedi da za 45 minuta istječe

$$3 \cdot 148 = 444 \text{ litre vode, a za 1 sat } 4 \cdot 148 = 592 \text{ litre vode.} \quad 2 \text{ BODA}$$

Za 6 sati iz druge cijevi istječe $6 \cdot 592 = 3\,552$ litre vode,

a za 12 sati dvostruko više, odnosno $2 \cdot 3\,552 = 7\,104$ litre vode. 1 BOD

Dakle, za 12 sati i 45 minuta iz druge cijevi istječe $7\,104 + 444 = 7\,548$ litara vode. 1 BOD

Iz obje cijevi za 12 sati i 45 minuta istječe: $1\,887 + 7\,548 = 9\,435$ litara vode. 2 BODA

.....UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje. Kako za 1 sat iz prve cijevi isteče 148 litara vode,
slijedi da za 15 minuta (četvrtina sata) isteče $148 : 4 = 37$ litara vode. 1 BOD
Iz druge cijevi za 15 minuta isteče 148 litara vode iz čega slijedi da
za 15 minuta iz obje cijevi zajedno isteče $148 + 37 = 185$ litara vode. 2 BODA
1 sat jednako je 4 puta po 15 minuta pa je 12 sati 48 puta po 15 minuta, 2 BODA
a 45 minuta jednako je 3 puta po 15 minuta. 1 BOD
U 12 sati i 45 minuta je sadržano $48 + 3 = 51$ puta po 15 minuta. 2 BODA
U 5 puta po 15 minuta iz obje cijevi zajedno isteče $185 \cdot 5 = 925$ litara vode.
U 50 puta po 15 minuta iz obje cijevi zajedno isteče $925 \cdot 10 = 9\,250$ litara vode.
U 51 puta po 15 minuta iz obje cijevi zajedno isteče $9\,250 + 185 = 9\,435$ litara vode.
Dakle, iz obje cijevi zajedno isteče 9 435 litara vode. 2 BODA
.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Posljednji bod (u oba rješenja) dodjeljuje se za pisani odgovor.

Napomena 2: Do izračuna je moguće doći i na druge načine koristeći distributivnost množenja prema zbrajanju ili asocijativnost množenja, kao i množenjem višeznamenastih brojeva.

7. Na natjecanju iz matematike sudjelovala su 23 učenika četvrtog razreda. Neki od njih trebali su toga dana imati četiri, a neki pet sati. Koliko je bilo onih sa četiri, a koliko s pet sati ako su svi zajedno izostali sa 101 sata?

Prvo rješenje.

4 sata nastave	5 sati nastave	Ukupno sati nastave
5 učenika 20 sati	$23 - 5 = 18$ učenika ... 90 sati	110 sati
6 učenika 24 sati	$23 - 6 = 17$ učenika ... 85 sati	109 sati
7 učenika 28 sati	$23 - 7 = 16$ učenika ... 80 sati	108 sati
8 učenika 32 sati	$23 - 8 = 15$ učenika ... 75 sati	107 sati
9 učenika 36 sati	$23 - 9 = 14$ učenika ... 70 sati	106 sati
10 učenika 40 sati	$23 - 10 = 13$ učenika ... 65 sati	105 sati
...

Potrebno je izračunati najmanje 3 retka u nizu kako bi se uočilo pravilo povećavanja i smanjivanja ukupnog broja sati koje potom treba objasniti. 3 BODA

Objašnjenje: Svaki učenik više u razredu s 4 sata nastave smanjuje ukupni broj sati za jedan. 4 BODA
(Može i obratno: Svaki učenik više u razredu s 5 sati nastave povećava ukupni broj sati za jedan.)

$105 - 101 = 4$ sata manje znači 4 učenika više. 1 BOD

Dakle bilo je $10 + 4 = 14$ učenika u razredu s 4 sata nastave, 1 BOD

i $23 - 14 = 9$ učenika u razredu s 5 sati nastave. 1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako nema objašnjenja, tada u tablici moraju biti ispisane sve mogućnosti za maksimalan broj (8 BODOVA) u tom dijelu zadatka. 2 BODA nosi pisani odgovor o broju učenika u oba razreda.

Drugo rješenje.

Kada bi sva 23 učenika imala po 4 sata, ukupni broj izostanaka bio bi $23 \cdot 4 = 92$ sata. 2 BODA

Budući da je broj izostanaka za $101 - 92 = 9$ veći, 1 BOD

a razlika u broju sati između razreda je $5 - 4 = 1$ sat u danu, 1 BOD

to znači da je 9 izostanaka više imalo 9 učenika koji su toga dana imali 5 sati. 5 BODOVA

Četiri sata je onda imalo $23 - 9 = 14$ učenika. 1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Analogno se vrednuje i ako učenik krene od pretpostavke da su svi učenici imali 5 sati toga dana.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. siječnja 2023.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vlak prosječno prijeđe 357 km u tri sata. Koliko traje putovanje ako vlak istom prosječnom brzinom prijeđe 2023 km s jednim stajanjem od 3 sata i 50 min i sedam kraćih stajanja od po 10 minuta?

Rješenje.

$$357 : 3 = 119$$

1 BOD

Vlak prijeđe 119 km za 1 sat.

$$2023 : 119 = 17 \text{ sati}$$

1 BOD

Ako vlak vozi tom prosječnom brzinom od 119 km na sat za 2023 km, trebat će mu 17 sati.

Sedam kraćih stajanja po 10 minuta ukupno je

$$7 \cdot 10 \text{ min} = 70 \text{ min.}$$

1 BOD

Ukupno stajanje u minutama, preračunamo u sate i pribrojimo stajanju u satima:

$$70 \text{ min} + 50 \text{ min} = 120 \text{ min} = 2 \text{ sata}$$

1 BOD

$$3 \text{ sata} + 2 \text{ sata} = 5 \text{ sati}$$

1 BOD

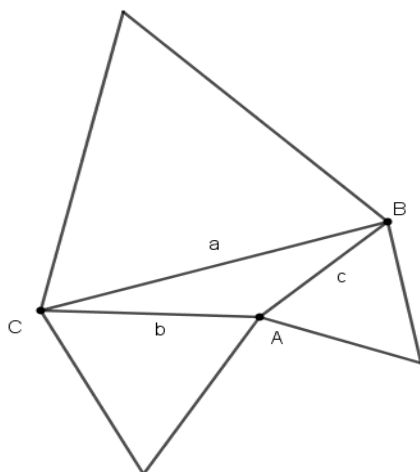
Zbrojimo vrijeme vožnje i vrijeme stajanja:

$$\text{putovanje traje } 17 + 5 = 22 \text{ sata.}$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. U trokutu ABC duljina stranice b je za 14 cm manja od duljine stranice a i za 4 cm veća od duljine stranice c . Nad svakom od stranica trokuta nacrtani su jednakostranični trokuti, kao na slici. Opseg tako dobivenog lika je 140 cm. Izračunaj duljine stranica trokuta ABC .



Prvo rješenje.

$$b = a - 14 \Rightarrow a = b + 14$$

$$b = c + 4 \Rightarrow c = b - 4$$

1 BOD

$$2a + 2b + 2c = 140$$

1 BOD

$$2(a + b + c) = 140$$

$$a + b + c = 70$$

$$b + 14 + b + b - 4 = 70$$

1 BOD*

$$3b + 10 = 70$$

$$3b = 70 - 10$$

$$3b = 60$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

1 BOD

$$a = b + 14 = 20 + 14 = 34 \text{ cm}$$

1 BOD

$$c = b - 4 = 20 - 4 = 16 \text{ cm}$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

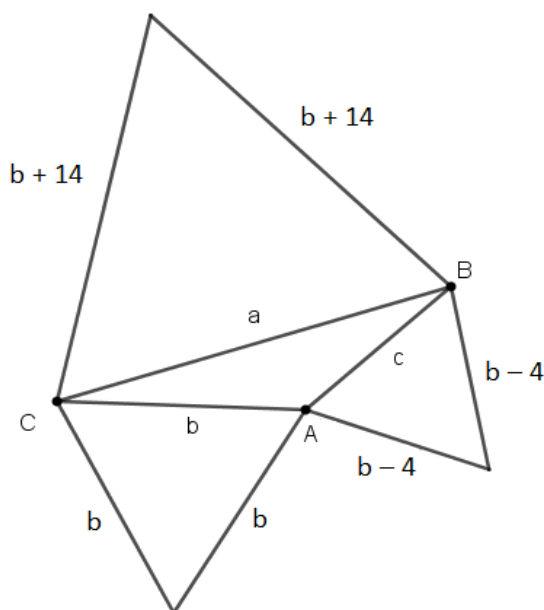
Napomena: Kod boda označenog zvjezdicom (*) nije nužno da učenik izlučuje zajednički faktor. Bodovati ako je do rješenja došao i uz uvjet $2a + 2b + 2c = 140$.

Drugo rješenje.

$$b = a - 14 \Rightarrow a = b + 14$$

$$b = c + 4 \Rightarrow c = b - 4$$

1 BOD



Oznake na skici:

1 BOD

Iz označene skice slijedi zaključak:

$$b + 14 + b + 14 + b + b + b - 4 + b - 4 = 140$$

1 BOD

$$6b + 20 = 140$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

1 BOD

$$a = b + 14 = 20 + 14 = 34 \text{ cm}$$

1 BOD

$$c = a - 4 = 20 - 4 = 16 \text{ cm}$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Zbroj tri peteroznamenasta broja oblika $\overline{mat31}$, $\overline{mat41}$, $\overline{mat51}$ je 202023.
Koliko je $m + a + t$?

Prvo rješenje.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & m & a & t & 3 & 1 \\
 & m & a & t & 4 & 1 \\
 + & m & a & t & 5 & 1 \\
 \hline
 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3
 \end{array}$$

$$1 + 1 + 1 = 3$$

$3 + 4 + 5 = 12$, pišemo 2, a 1 pribrađamo lijevom stupcu i dobijemo

$3 \cdot t + 1$ što može biti ili 10 ili 20 ili 30 (više ne može jer su t znamenke). 1 BOD

Ako je $3 \cdot t + 1 = 30$ onda je $3 \cdot t = 29$, što ne može biti jer se 29 ne može bez ostatka podijeliti s 3.

Ako je $3 \cdot t + 1 = 20$ onda je $3 \cdot t = 19$, što ne može biti jer se 19 ne može bez ostatka podijeliti s 3.

Ako je $3 \cdot t + 1 = 10$ onda je $3 \cdot t = 9$, iz čega slijedi da je $t = 3$. 1 BOD

Iz zbroja $t + t + t + 1 = 10$, pišemo 0, a 1 pribrađamo lijevom stupcu i dobijemo

$3 \cdot a + 1$ što može biti ili 2 (ne može jer je premalo) ili 12 ili 22 ili 32 (više ne može jer je a znamenka). 1 BOD

Ako je $3 \cdot a + 1 = 12$ onda je $3 \cdot a = 11$, što ne može biti jer se 11 ne može bez ostatka podijeliti s 3.

Ako je $3 \cdot a + 1 = 32$ onda je $3 \cdot a = 31$, što ne može biti jer se 31 ne može bez ostatka podijeliti s 3.

Ako je $3 \cdot a + 1 = 22$ onda je $3 \cdot a = 21$, pa je $a = 7$. 1 BOD

Iz zbroja $a + a + a + 1 = 22$, pišemo 2, i 2 pribrađamo lijevom stupcu te dobijemo

$m + m + m + 2 = 20$, iz čega slijedi $3 \cdot m = 18$, odnosno $m = 6$. 1 BOD

Tada je $m + a + t = 6 + 7 + 3 = 16$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Kako je $31 + 41 + 51 = 123$, 1 BOD

zbroj $\overline{mat00} + \overline{mat00} + \overline{mat00}$ je za 123 manji od 202023. 1 BOD

$202023 - 123 = 201900$ 1 BOD

Trostruka vrijednost broja \overline{mat} je tada 2019 1 BOD

pa je $\overline{mat} = 2019 : 3 = 673$. 1 BOD

$m + a + t = 6 + 7 + 3 = 16$ 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Elementi skupova A , B i C su neki prirodni brojevi koji su veći od 20 i manji od 30.

Pri tome vrijedi:

$$A \cap B = \{23, 28\},$$

$$A \cap C = \{28, 29\},$$

$$B \cap C = \{28\},$$

$$A \cup B = \{21, 22, 23, 24, 28, 29\},$$

$$A \cup C = \{21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29\} \text{ i}$$

$$B \cup C = \{n \in \mathbb{N} : 23 \leq n < 30\}.$$

Odredi skupove A , B i C .

Rješenje.

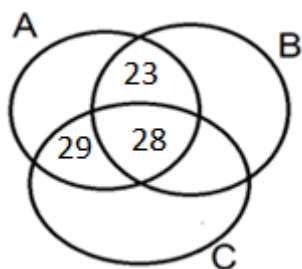
Zadatak se može rješavati pomoću Vennovih dijagrama ili nekom drugom metodom. Ukoliko je neka druga metoda onda se za smisljeno objašnjenje daju 2 boda koja su ovdje pridružena Vennovim dijagramima.

Odredimo elemente skupa $B \cup C$.

$$B \cup C = \{23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\}$$

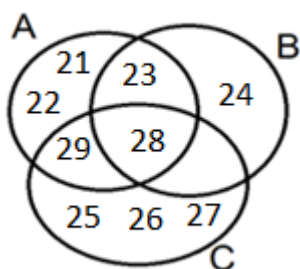
1 BOD

Iz zadanih presjeka $A \cap B = \{23, 28\}$, $A \cap C = \{28, 29\}$, $B \cap C = \{28\}$, vidljivo je da je 28 element sva tri presjeka. Ucrtamo i preostale elemente presjeka.



1 BOD

Iz zadanih unija skupova ucrtamo elemente u dijagram.



1 BOD

$$A = \{21, 22, 23, 28, 29\}$$

1 BOD

$$B = \{23, 24, 28\}$$

1 BOD

$$C = \{25, 26, 27, 28, 29\}$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Mauro, Teo, Bruno i Leo kupili su loptu, kapu, majicu i knjigu. Cijene tih proizvoda su: 4 €, 5 €, 6 € i 7 €. Koji je dječak kupio koji proizvod i koja je cijena pojedinog proizvoda ako se zna sljedeće:

Leov proizvod je skuplji od majice,
 kapu je kupio Teo,
 majica je skuplja od Brunovog proizvoda,
 cijena kape je za 2 eura manja od cijene Maurovog proizvoda,
 cijena kape je za 1 euro manja od cijene lopte.

Rješenje.

Učenik može zadatak rješavati na različite načine. Za svaku točno određenu trojku rješenja dobiva po 1 BOD. Preostala 2 BODA dobiva ako je rješenje pojašnjeno bilo riječima ili tablicom integrirano.

Trojke rješenja za koje dobiva po 1 BOD su:

Mauro	majica	6 €	1 BOD
Teo	kapa	4 €	1 BOD
Bruno	lopta	5 €	1 BOD
Leo	knjiga	7 €	1 BOD

Preostala dva boda učenik može ostvariti na više načina.

Prvi način.

Primjer rasprave/pojašnjenja:

Iz prva tri uvjeta vidimo da majicu nije kupio niti Leo, niti Teo, niti Bruno pa je majicu kupio Mauro.

Leov proizvod je skuplji od majice pa cijena majice ne može biti 7 €.

Majica je skuplja od Brunovog proizvoda pa cijena majice ne može biti 4 €.

Cijena majice je 5 € ili 6 €. Cijena kape je za 2 € manja od cijene majice pa cijena majice ne može biti 5 € jer je $5 - 2 = 3$.

Cijena majice je 6 €, a cijena kape je 4 €.

Cijena Leovog proizvoda je 7 € jer je skuplji od majice pa je cijena Brunovog proizvoda 5 €.

Cijena kape je za 1 € manja od cijene lopte pa je cijena lopte 5 €.

Bruno je kupio loptu.

Leo je kupio knjigu za 7 €.

2 BODA

Drugi način.

Primjer rasprave/pojašnjenja:

Iz zadatka je vidljiv podatak da je Teo kupio kapu.

Leov proizvod je skuplji od majice, a majica je skuplja od Brunovog proizvoda znači da cijena majice može biti 5 ili 6 eura (majica ne može biti niti najskuplja niti najjeftinija).

Ako je Maurov proizvod za 2 eura skuplji od Teovog (kape), znači da je Mauro kupio proizvod po cijeni od 6 ili 7 eura, a cijena kape može biti 4 ili 5 eura.

No, cijena kape je za 1 euro manja od cijene lopte, znači da je cijena lopte 5 ili 6 eura.

Ako je cijena lopte 6 eura, tada je kapa 5 eura, no tada cijena majice ne može biti 5 ili 6 eura.

Slijedi da je cijena lopte 5 eura. Tada je cijena kape 4 eura, cijena majice 6 eura i cijena knjige 7 eura.

Ako je Teo kupio kapu (4 €) slijedi da je Mauro kupio majicu ($4 + 2 = 6$ €).

Leov proizvod je skuplji od majice (7 €), pa je to knjiga.

I ostaje Brunov proizvod jeftiniji od majice (4 ili 5 €), a to ne može biti kapa (4 €), pa je lopta (5 €).

2 BODA

Treći način.

Primjer rješavanja pomoću tablice (integrirano):

Tablica se formira tako da svaki objekt iste skupine ima direktan dodir sa svim preostalim objektima iz zadatka. U zadatku su objekti imena dječaka, proizvodi i cijene. Tablica npr. može izgledati ovako:

	lopta	kapa	majica	knjiga	Mauro	Teo	Bruno	Leo
4 €								
5 €								
6 €								
7 €								
Mauro								
Teo								
Bruno								
Leo								

Popunjavanje može krenuti od prve tvrdnje „Leov proizvod je skuplji od majice“. Iz nje zaključujemo da Leo nije kupio majicu, da Leov proizvod nije najjeftiniji (4 €) i da majica nije najskuplja (7 €). Stavljamo znakove – u presjecima tih stupaca i redaka u tablici.

	lopta	kapa	majica	knjiga	Mauro	Teo	Bruno	Leo
4 €								-
5 €								
6 €								
7 €			-					
Mauro								
Teo								
Bruno								
Leo			-					

Iz tvrdnje „kapu je kupio Teo“, stavlja se znak + u spoju stupca i retka koji povezuju tu tvrdnju. Preostala polja istog retka i stupca označe se znakom – jer nisu moguća.

	lopta	kapa	majica	knjiga	Mauro	Teo	Bruno	Leo
4 €								-
5 €								
6 €								
7 €			-					
Mauro		-						
Teo	-	+	-	-				
Bruno		-						
Leo		-	-					

Iz tvrdnje „majica je skuplja od Brunovog proizvoda“, može se zaključiti da majica ne može koštati 4 €, da Brunov proizvod nije najskuplji (7 €) i da Bruno nije kupio majicu. Stavljamo znakove – u presjecima tih stupaca i redaka u tablici.

	lopta	kapa	majica	knjiga	Mauro	Teo	Bruno	Leo
4 €			-					-
5 €								
6 €								
7 €			-				-	
Mauro		-						
Teo	-	+	-	-				
Bruno		-	-					
Leo		-	-					

Iz tvrdnje „cijena kape je za 2 eura manja od cijene Maurovog proizvoda“, zaključujemo da Maurov proizvod nije najjeftiniji (4 €), da kapa nije najskuplja (7 €) i da Mauro nije kupio kapu. Također, kako je cijena kape za 2 € manja od neke druge cijene, onda kapa ne može koštati 6 ili 7 €. Nadalje, već znamo da je kapu kupio Teo, pa Teov proizvod nije 6 ili 7 € i Maurov proizvod ne može imati cijenu 4 ili 5 €.

	lopta	kapa	majica	knjiga	Mauro	Teo	Bruno	Leo
4 €			-		-			-
5 €					-			
6 €		-				-		
7 €		-	-			-	-	
Mauro		-						
Teo	-	+	-	-				
Bruno		-	-					
Leo		-	-					

Iz tvrdnje „cijena kape je za 1 euro manja od cijene lopte“, zaključujemo da kapa nije najskuplji proizvod (7 €), da lopta nije najjeftiniji (4 €). Stavljamo znakove – u presjecima tih stupaca i redaka u tablici.

	lopta	kapa	majica	knjiga	Mauro	Teo	Bruno	Leo
4 €	-		-		-			-
5 €					-			
6 €		-				-		
7 €		-	-			-	-	
Mauro		-						
Teo	-	+	-	-				
Bruno		-	-					
Leo		-	-					

Kako je cijena kape za 1 € manja od cijene lopte, iz tablice je vidljivo da cijena lopte ne može biti 7 €. Iz tablice je sada vidljivo da je Mauro kupio majicu. Također, cijena majice ne može biti 7 € pa ni Maurov proizvod nema cijenu 7 €.

	lopta	kapa	majica	knjiga	Mauro	Teo	Bruno	Leo
4 €	-		-		-			-
5 €					-			
6 €		-				-		
7 €	-	-	-		-	-	-	
Mauro	-	-	+	-				
Teo	-	+	-	-				
Bruno		-	-					
Leo		-	-					

Na isti način nastavljamo popunjavati tablicu. Vidljivo je da je cijena knjige 7 € i da je Leov proizvod 7 €, pa onda znači da je Leo kupio knjigu. Označimo ta polja sa +, a preostala u stupcima i recima sa –.

	lopta	kapa	majica	knjiga	Mauro	Teo	Bruno	Leo
4 €	-		-	-	-			-
5 €				-	-			-
6 €		-		-		-		-
7 €	-	-	-	+	-	-	-	+
Mauro	-	-	+	-				
Teo	-	+	-	-				
Bruno		-	-	-				
Leo	-	-	-	+				

Vidljivo je: Bruno je kupio loptu i Maurov proizvod ima cijenu 6 €. Cijena lopte može biti jedino 5 €. I na kraju popunimo preostala polja znakom +:

	lopta	kapa	majica	knjiga	Mauro	Teo	Bruno	Leo
4 €	-	+	-	-	-	+	-	-
5 €	+	-	-	-	-	-	+	-
6 €	-	-	+	-	+	-	-	-
7 €	-	-	-	+	-	-	-	+
Mauro	-	-	+	-				
Teo	-	+	-	-				
Bruno	+	-	-	-				
Leo	-	-	-	+				

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Ivana je odlučila kupiti neke proizvode u internetskoj trgovini. U košarici već ima 4 proizvoda čija je ukupna cijena 30 €. Ako tim proizvodima doda jaknu, onda će prosječna cijena svih odabranih proizvoda biti 20 €. Kad bi umjesto jakne odabrala čizme i hlače, prosječna bi cijena također bila 20 €. Zna se da je cijena čizama za 54 € veća od cijene hlača. Odredi cijenu jakne, cijenu čizama i cijenu hlača.

Rješenje.

Označimo s j cijenu jakne.

Ako je prosječna cijena 5 proizvoda 20 € onda to možemo zapisati ovako:

$$a + b + c + d = 30$$

$$(a + b + c + d + j) : 5 = 20$$

$$(30 + j) : 5 = 20$$

1 BOD

$$30 + j = 20 \cdot 5$$

$$30 + j = 100$$

1 BOD

$$j = 100 - 30$$

$$j = 70$$

1 BOD

Cijena jakne je 70 €.

Ako umjesto jakne odabere čizme i hlače, prosječna cijena ostaje 20 €.

Označimo sa \check{c} cijenu čizama, a sa h cijenu hlača.

$$a + b + c + d = 30$$

$$(a + b + c + d + \check{c} + h) : 6 = 20$$

$$(30 + \check{c} + h) : 6 = 20$$

1 BOD

$$30 + \check{c} + h = 20 \cdot 6$$

$$30 + \check{c} + h = 120$$

1 BOD

$$\check{c} + h = 120 - 30$$

$$\check{c} + h = 90$$

1 BOD

Znamo li da je cijena čizama za 54 € veća od cijene hlača možemo zapisati:

$$\check{c} = h + 54$$

$$\check{c} + h = 90$$

$$h + 54 + h = 90$$

1 BOD

$$2h = 90 - 54$$

$$2h = 36$$

1 BOD

$$h = 18$$

1 BOD

Cijena hlača je 18 €.

$$\check{c} = h + 54$$

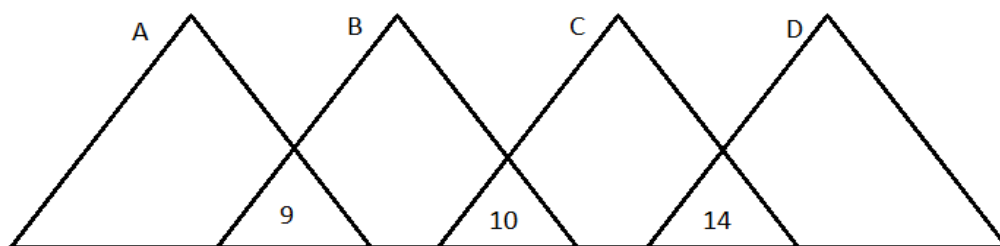
$$\check{c} = 72$$

1 BOD

Cijena čizama je 72 €.

.....UKUPNO 10 BODOVA

7. Svakom od trokuta A , B , C i D dodijeljena je vrijednost koja je prirodan broj od 1 do 9. Dodijeljene su vrijednosti međusobno različite. Zbrojevi vrijednosti pojedinih trokuta zapisane su u njihovim presjecima. Odredi sve mogućnosti za vrijednost trokuta B .



Rješenje.

Znamo da je:

$$A + B = 9$$

$$B + C = 10$$

$$C + D = 14$$

1 BOD

Da bi učenik došao do svih rješenja mora ispitivati uvjete koji su zadani.

Način ispitivanja vrijednosti trokuta učenik provodi s obzirom na jednu od tri mogućnosti ispitivanja. Raspravu može zapisivati u obliku tablice ili bez nje, ali mora biti smisljena. Smislenu raspravu vrednovati s 8 BODOVA, a rješenje s 1 BODOM.

Primjeri rasprava i njihova bodovanja navedeni su u nastavku.

Prvi način.

Ako učenik krene od uvjeta da je $A + B = 9$, mora uočiti i zapisati koje sve vrijednosti može poprimiti A , a koje B (8 mogućnosti). 2 BODA

Iz $C = 10 - B$ treba uočiti da $B = C = 5$ ne može biti rješenje. 1 BOD

Iz $D = 14 - C$ treba eliminirati još 4 mogućnosti. 2 BODA

Konačno, treba uočiti da postoje 3 mogućnosti za koje vrijede postavljene uvjeti. 3 BODA

Učenik raspravu može zapisivati riječima ili tablicom.

Primjer zapisivanja rasprave riječima:

Ako je $A + B = 9$ onda može biti:

$$A = 1, B = 8$$

Tada bi bilo: $8 + C = 10, C = 2$, a iz $2 + D = 14, D = 12$. $12 > 9$, pa odbacujemo tu varijantu.

$$\text{Ako je: } A = 2, B = 7$$

Tada bi bilo: $7 + C = 10, C = 3$, a iz $3 + D = 14, D = 11$. $11 > 9$, pa odbacujemo tu varijantu.

$$\text{Ako je } A = 3, B = 6$$

Tada bi bilo: $6 + C = 10, C = 4$, a iz $4 + D = 14, D = 10$. $10 > 9$, pa odbacujemo tu varijantu.

$$\text{Ako je: } A = 4, B = 5$$

Tada bi bilo: $5 + C = 10, C = 5$, a kako svi trokuti imaju različite vrijednosti odbacujemo i tu varijantu.

$$\text{Ako je: } A = 5, B = 4$$

Tada bi bilo: $4 + C = 10, C = 6$, a iz $6 + D = 14, D = 8$. Svi trokuti imaju različite vrijednosti od 1 do 9, pa je ovo jedno rješenje.

$$\text{Ako je } A = 6, B = 3$$

Tada bi bilo: $3 + C = 10, C = 7$, a iz $7 + D = 14, D = 7$. Tada je $C = D = 7$, pa odbacujemo tu varijantu jer svi trokuti imaju različite vrijednosti.

Ako je: $A = 7, B = 2$

Tada bi bilo: $2 + C = 10, C = 8$, a iz $8 + D = 14, D = 6$. Svi trokuti imaju različite vrijednosti od 1 do 9, pa je ovo još jedno rješenje.

Ako je: $A = 8, B = 1$

Tada bi bilo: $1 + C = 10, C = 9$, a iz $9 + D = 14, D = 5$. Svi trokuti imaju različite vrijednosti od 1 do 9, pa je ovo još jedno rješenje.

Primjer zapisivanja rasprave tablicom uz istu početnu pretpostavku:

$A = 1$	$B = 8$	$C = 2$	$D = 12 > 9$ ne može
$A = 2$	$B = 7$	$C = 3$	$D = 11 > 9$ ne može
$A = 3$	$B = 6$	$C = 4$	$D = 10 > 9$ ne može
$A = 4$	$B = 5$	$C = 5 = B$ ne može (svi trokuti imaju različite vrijednosti)	
$A = 5$	$B = 4$	$C = 6$	$D = 8$ prvo rješenje
$A = 6$	$B = 3$	$C = 7$	$D = 7 = C$ ne može (svi trokuti imaju različite vrijednosti)
$A = 7$	$B = 2$	$C = 8$	$D = 6$ drugo rješenje
$A = 8$	$B = 1$	$C = 9$	$D = 5$ treće rješenje

Dakle, imamo tri moguća rješenja:

$B = 4$

$B = 2$

$B = 1$

1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Analogno bodujemo načine rješavanja kojima se ispituje sve mogućnosti obzirom na uvjet $B + C = 10$ ili uvjet $C + D = 14$.

Iz $B + C = 10$ treba uočiti 7 različitih mogućnosti za B i C .

2 BODA

$B = C = 5$ je jedna mogućnost koju odbacujemo.

1 BOD

Za vrijednosti A i D postoje 3 mogućnosti koje odbacujemo.

2 BODA

Zaključno, treba uočiti da postoje 3 mogućnosti koje mogu biti rješenje.

3 BODA

Učenik raspravu može zapisivati riječima ili tablicom.

$B = 1$	$C = 9$	$A = 8$	$D = 5$ prvo rješenje
$B = 9$	$C = 1$	$A = 0$, ne može jer 0 nije prirodan broj	
$B = 8$	$C = 2$	$A = 1$	$D = 12 > 9$ ne može
$B = 2$	$C = 8$	$A = 7$	$D = 6$ drugo rješenje
$B = 4$	$C = 6$	$A = 5$	$D = 8$ treće rješenje
$B = 6$	$C = 4$	$A = 3$	$D = 10 > 9$ ne može
$B = 5$	$C = 5$, ne može (svi trokuti imaju različite vrijednosti)		

Iz $C + D = 14$ treba uočiti 5 mogućnosti.

2 BODA

$C = D = 7$ nije moguće.

1 BOD

Dalje, za vrijednosti A, B postoji 1 kombinacija koje nije rješenje.

2 BODA

Zaključno, treba uočiti da postoje 3 kombinacije koje mogu biti rješenje.

3 BODA

Učenik raspravu može zapisivati riječima ili tablicom.

$C = 5$	$D = 9$	$B = 5$ ne može (svi trokuti imaju različite vrijednosti)	
$C = 9$	$D = 5$	$B = 1$	$A = 8$ prvo rješenje
$C = 6$	$D = 8$	$B = 4$	$A = 5$ drugo rješenje
$C = 8$	$D = 6$	$B = 2$	$A = 7$ treće rješenje
$C = 7$	$D = 7$, ne može (svi trokuti imaju različite vrijednosti)		

Drugi način.

A je vrijednost prvog trokuta.

$B = 9 - A$ je vrijednost drugog trokuta.

$C = A + 1$ je vrijednost trećeg trokuta.

$D = 13 - A$ je vrijednost četvrtog trokuta.

1 BOD

Zbog $D = 13 - A$ slijedi $A > 3$ (jer bi u suprotnom bio $D > 9$, što ne može biti zbog uvjeta zadatka).

2 BODA

$C = B = 5$ ne može biti rješenje.

1 BOD

$D = C = 7$ ne može biti rješenje.

1 BOD

Zaključno, treba uočiti da postoje 3 kombinacije koje mogu biti rješenje.

3 BODA

Primjer zapisivanja rasprave tablicom uz istu početnu pretpostavku:

$A = 4$	$B = 5$	$C = 5 = B$ svi trokuti moraju imati različite vrijednosti pa odbacujemo ovu varijantu.		
$A = 5$	$B = 4$	$C = 6$	$D = 8$	Prvo rješenje
$A = 6$	$B = 3$	$C = 7$	$D = 7 = C$ svi trokuti moraju imati različite vrijednosti pa odbacujemo ovu varijantu.	
$A = 7$	$B = 2$	$C = 8$	$D = 6$	Drugo rješenje
$A = 8$	$B = 1$	$C = 9$	$D = 5$	Treće rješenje

Dakle, imamo tri moguća rješenja, tj. B može iznositi 1, 2 ili 4.

1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. siječnja 2023.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zapiši u obliku potencije broja 2 vrijednost izraza

$$2^3 \cdot [-2022 : (2 + 0 + 2 + 2) - 2023 : (-2 - 0 - 2 - 3)] : (-3).$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} & 2^3 \cdot [-2022 : (2 + 0 + 2 + 2) - 2023 : (-2 - 0 - 2 - 3)] : (-3) \\ &= 8 \cdot [-2022 : 6 - 2023 : (-7)] : (-3) && 1 \text{ BOD} \\ &= 8 \cdot [-337 + 289] : (-3) && 2 \text{ BODA} \\ &= 8 \cdot (-48) : (-3) \\ &= -384 : (-3) && 1 \text{ BOD} \\ &= 128 && 1 \text{ BOD} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 && 1 \text{ BOD} \\ & \dots\dots\dots \text{UKUPNO 6 BODOVA} \end{aligned}$$

Primjedba.

Ukoliko učenik ne zapisuje vrijednosti potencija i ne zapisuje umnožak jednakih faktora, bodovanje se vrši analogno:

$$\begin{aligned} & 2^3 \cdot [-2022 : (2 + 0 + 2 + 2) - 2023 : (-2 - 0 - 2 - 3)] : (-3) \\ &= 2^3 \cdot [-2022 : 6 - 2023 : (-7)] : (-3) && 1 \text{ BOD} \\ &= 2^3 \cdot [-337 + 289] : (-3) && 2 \text{ BODA} \\ &= 2^3 \cdot (-48) : (-3) \\ &= 2^3 \cdot 16 && 1 \text{ BOD} \\ &= 2^3 \cdot 2^4 && 1 \text{ BOD} \\ &= 2^7 && 1 \text{ BOD} \\ & \dots\dots\dots \text{UKUPNO 6 BODOVA} \end{aligned}$$

2. Goran je na tržnicu donio 525 kg lješnjaka. Prodao je $\frac{3}{5}$ ukupne količine lješnjaka po cijeni 3 €/kg, $\frac{4}{5}$ ostatka po cijeni 5 €/kg, a trećinu novog ostatka po cijeni 6 €/kg. Za koliko eura po kilogramu je Goran prodao preostale lješnjake ako je ukupno dobio 2023 €?

Rješenje.

$\frac{3}{5}$ od 525 kg je 315 kg. Ostalo je $525 \text{ kg} - 315 \text{ kg} = 210 \text{ kg}$. 1 BOD

$\frac{4}{5}$ od 210 kg je 168 kg. Ostalo je $210 \text{ kg} - 168 \text{ kg} = 42 \text{ kg}$. 1 BOD

Trećina od 42 je $42 : 3 = 14 \text{ kg}$. Ostalo je $42 \text{ kg} - 14 \text{ kg} = 28 \text{ kg}$. 1 BOD

(Napomena: S 3 BODA se boduje i ovaj postupak:

Ako je prodao $\frac{3}{5}$ ukupne količine lješnjaka, ostale su mu $\frac{2}{5}$ ukupne količine lješnjaka tj. $\frac{2}{5}$ od 525 kg, što je 210 kg.

Ako je prodao $\frac{4}{5}$ ostatka, tada mu je ostala $\frac{1}{5}$ ostatka lješnjaka tj. $\frac{1}{5}$ od 210 kg, što je 42 kg.

Ako je prodao trećinu novog ostatka, onda je preostalo $\frac{2}{3}$ novog ostatka, tj. $\frac{2}{3}$ od 42 kg, što je 28 kg.)

Neka je x cijena po kojoj je prodao preostalih 28 kg lješnjaka.

Vrijedi:

$$315 \cdot 3 + 168 \cdot 5 + 14 \cdot 6 + 28x = 2023 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$945 + 840 + 84 + 28x = 2023$$

$$1869 + 28x = 2023 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$28x = 2023 - 1869$$

$$28x = 154$$

$$x = 154 : 28$$

$$x = 5.5$$

Ostatak lješnjaka treba prodati za 5.50 €/kg. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini duljine jedinične dužine 2 cm nacrtan je kvadrat. Izračunaj opseg i površinu kvadrata ako je točka $(8, 2)$ jedan njegov vrh, a točka $(2, -4)$ sjecište njegovih dijagonala.

Prvo rješenje.

Kvadrat je osnosimetričan lik s obzirom na simetrale svojih stranica.

Istaknimo na slici kvadrat $SGCH$.

1 BOD

Duljina njegove stranice iznosi $8 - 2 = 6$ jediničnih duljina,

1 BOD

odnosno 12 cm.

1 BOD

Duljina stranice kvadrata $ABCD$ je 24 cm.

1 BOD

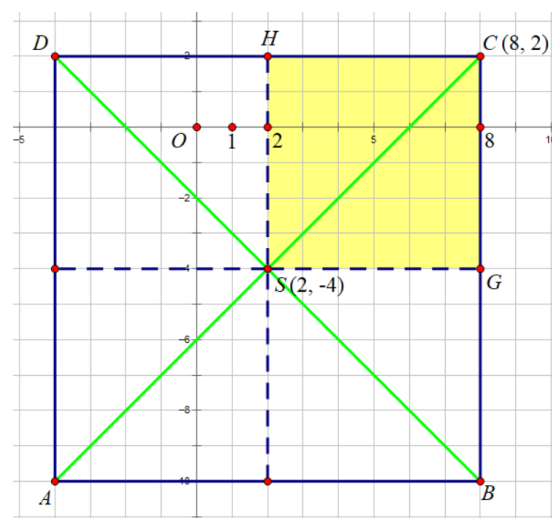
Opseg kvadrata $ABCD$ je $4 \cdot 24 = 96 \text{ cm}$.

1 BOD

Površina kvadrata $ABCD$ je $24^2 = 576 \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA



Drugo rješenje.

Promotrimo sliku i istaknimo kvadrat $SGCH$.

Kvadrat je osnosimetričan lik s obzirom na simetrale svojih stranica.

1 BOD

Zato je opseg kvadrata $ABCD$ dvostruko veći od opsega kvadrata $SGCH$, a površina kvadrata $ABCD$ četiri puta veća od površine kvadrata $SGCH$.

1 BOD

Duljina stranice kvadrata $SGCH$ je $8 - 2 = 6$ jediničnih duljina,

1 BOD

odnosno 12 cm,

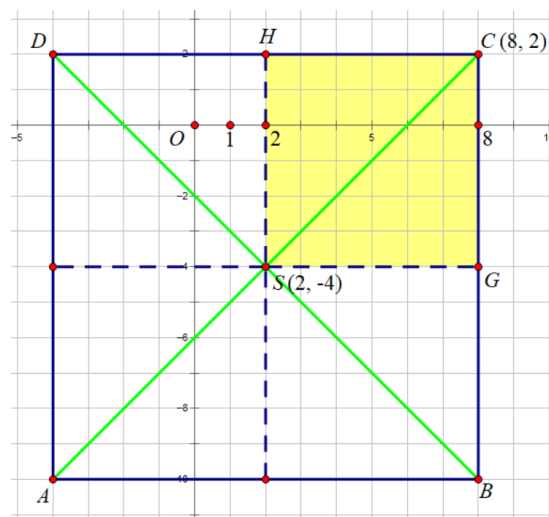
1 BOD

pa mu je opseg 48 cm, a površina 144 cm^2 .

1 BOD

Zato je opseg kvadrata $ABCD$ 96 cm, a površina 576 cm^2 .

1 BOD



UKUPNO 6 BODOVA

Napomena (za 1. i 2. rješenje): Ako učenik ne nacrtava sliku već iz koordinata jednog vrha i sjecišta dijagonala zaključi i argumentira da je duljina stranice kvadrata koji čini četvrtinu zadanog jednaka razlici apscisa tih točaka tj. $8 - 2 = 6$, dobiva 3 BODA.

Treće rješenje.

Kvadrat je osnosimetričan lik s obzirom na simetrale svojih stranica.

Odredimo koordinate preostala tri vrha:

$A(-4, -10)$, $B(8, -10)$, $D(-4, 2)$.

2 BODA

Duljina njegove stranice iznosi $8 - (-4) = 12$ jediničnih duljina,

1 BOD

odnosno 24 cm.

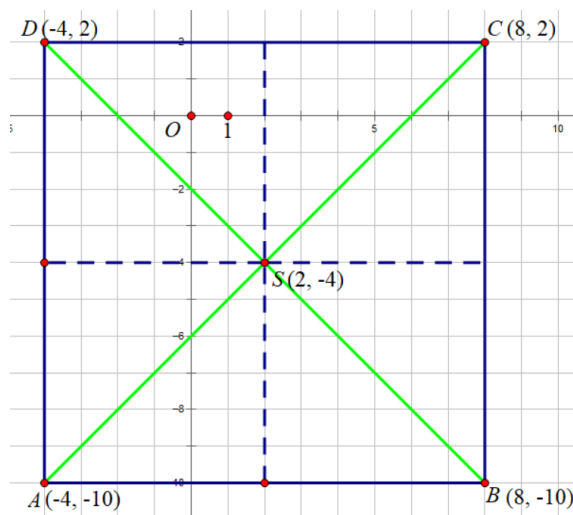
1 BOD

Opseg kvadrata $ABCD$ je $4 \cdot 24 = 96 \text{ cm}$.

1 BOD

Površina kvadrata $ABCD$ je $24^2 = 576 \text{ cm}^2$.

1 BOD



UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik opseg i površinu izrazi u jedinicama duljine i kvadratnim jedinicama umjesto u centimetrima, skinuti JEDAN BOD od ukupno ostvarenog broja bodova.

4. Broj 2090 zapisan je kao umnožak šest različitih cijelih brojeva. Odredi najmanju vrijednost zbroja tih brojeva.

Rješenje.

Rastavimo broj 2090 na proste faktore:

$$2090 = 209 \cdot 10$$

$$= 11 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 5$$

1 BOD

Ako je broj zapisan kao umnožak šest različitih cijelih brojeva, a ima četiri prosta faktora, onda su dva faktora tog umnoška brojevi 1 i -1.

2 BODA

Kako je broj pozitivan, a želimo najmanju vrijednost zbroja, onda trebamo imati paran broj negativnih faktora i faktori najveće apsolutne vrijednosti trebaju biti negativni.

$$2090 = (-19) \cdot (-11) \cdot (-5) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 1$$

2 BODA

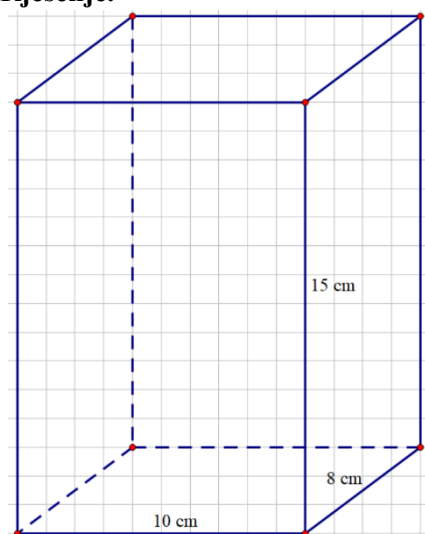
Najmanja vrijednost zbroja je $-19 + (-11) + (-5) + 2 + (-1) + 1 = -33$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Drveni kvadar ima bridove duljine 8, 10 i 15. Iz dva njegova vrha izrezana je po jedna kocka čije su duljine bridova prirodni brojevi. Najprije je iz kvadra izrezana jedna kocka najvećeg mogućeg volumena, a zatim jedna kocka najmanjeg mogućeg volumena. Koliki je postotak volumena kvadra izrezan?

Rješenje.



Kako su duljine bridova izrezanih kocaka prirodni brojevi, onda izrezana kocka najvećeg mogućeg volumena ima brid duljine 8 cm, a ona najmanjeg mogućeg volumena ima brid duljine 1 cm.

1 BOD

Jedan od mogućih načina prikazan je na slici desno.

Volumen kvadra je $8 \cdot 10 \cdot 15 = 1200 \text{ cm}^3$.

1 BOD

Volumen kocke najvećeg mogućeg volumena je $8^3 = 512 \text{ cm}^3$.

1 BOD

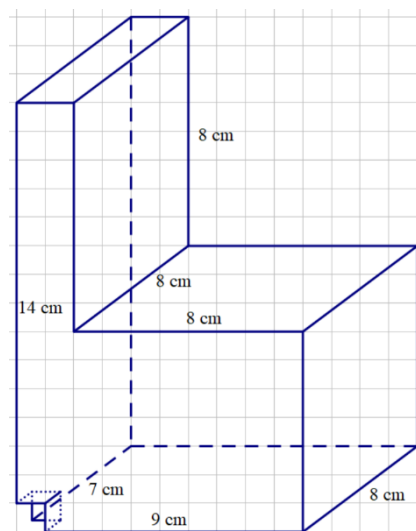
Volumen kocke najmanjeg mogućeg volumena je $1^3 = 1 \text{ cm}^3$.

1 BOD

Volumen izrezanog dijela 513 cm^3 .

Postotak izrezanog dijela $\frac{513}{1200} = \frac{171}{400} = 42.75\%$.

2 BODA



..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik pogrešno zaključi da mora ostati „rubni dio kvadra“ te umjesto duljine brida kocke najvećeg mogućeg volumena 8 koristi vrijednost 7, oduzima se 1 BOD i dalje se boduje po principu „slijedi grešku“.

No za ostale pogrešne vrijednosti duljina najmanjeg ili najvećeg mogućeg brida oduzimaju se 2 odnosno 3 BODA (jer su to veće pogreške u razumijevanju zadatka) i to 1 BOD za određivanje tih duljina i po 1 BOD za svaki od pogrešno određenih volumena. Ostatak se boduje principom „slijedi grešku“.

6. Devetero učenika se natjecalo u rješavanju pet matematičkih zadataka od kojih svaki donosi po deset bodova. Osmero učenika je postiglo jednak broj bodova, a Ema je postigla veći broj bodova od ostalih natjecatelja. Ako je prosjek bodova svih učenika koji su se natjecali 24, koliko je bodova mogla osvojiti Ema?

Rješenje.

Neka je x broj bodova koje je postigao svaki od osam učenika koji su postigli jednak broj bodova, a y broj bodova koje je osvojila Ema.

Kako je Ema postigla veći broj bodova od ostalih natjecatelja, treba vrijediti $y > x$, pa y mora biti veći od 0. 1 BOD

Maksimalan broj bodova je $5 \cdot 10 = 50$, pa y nije veći od 50. 1 BOD

Prosijek bodova svih natjecatelja je 24, pa vrijedi:

$$\frac{8x + y}{9} = 24$$

$$8x + y = 216. \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako su $8x$ i 216 djeljivi s 8, onda i y mora biti djeljivo s 8, tj. y je višekratnik broja 8. 1 BOD

y	$x = \frac{216 - y}{8}$	moгуći broj bodova	bodovanje
8	26	Ne, jer $y < x$	1 BOD
16	25	Ne, jer $y < x$	1 BOD
24	24	Ne, jer $y = x$	1 BOD
32	23	Da	1 BOD
40	22	Da	1 BOD
48	21	Da	1 BOD

Ema je mogla osvojiti 32, 40 ili 48 bodova.

..... UKUPNO 10 BODOVA

Primjedba.

Učenici mogu i na drugačiji način određivati mogućnosti za broj Eminih bodova, npr. bez određivanja uvjeta prije formiranja liste kandidata. U tom slučaju, za dobivanje svih bodova potrebno je ili ispisati sve mogućnosti i eliminirati one koje nisu cjelobrojne, odnosno ne zadovoljavaju ostale uvjete zadatka, ili nakon uočavanja pravilnosti zapisati obrazloženja. Analogno se boduje postupak ako se redom ispisuju vrijednosti varijable x i računaju te komentiraju vrijednosti varijable y .

Primjer:

$$\frac{8x + y}{9} = 24$$

$$8x + y = 216 \quad 1 \text{ BOD}$$

y	$x = \frac{216 - y}{8}$	moгуći broj bodova	bodovanje
0	27	Ne, jer $y < x$, a Ema ima više bodova od ostalih.	1 BOD
1	$\frac{215}{8}$	Ne, jer $x \notin \mathbb{N}$	

2	$\frac{214}{8}$	Ne, jer $x \notin \mathbb{N}$	
3	$\frac{213}{8}$	Ne, jer $x \notin \mathbb{N}$	
4	$\frac{212}{8}$	Ne, jer $x \notin \mathbb{N}$	
5	$\frac{211}{8}$	Ne, jer $x \notin \mathbb{N}$	
6	$\frac{210}{8}$	Ne, jer $x \notin \mathbb{N}$	
7	$\frac{209}{8}$	Ne, jer $x \notin \mathbb{N}$	
8	26	Ne, jer $y < x$, a Ema ima više bodova od ostalih.	1 BOD
Brojnici razlomaka u 2. stupcu se smanjuju za 1 pa će se sljedeći prirodan broj dobiti kad vrijednost y povećamo za 8.			1 BOD
16	25	Ne, jer $y < x$, a Ema ima više bodova od ostalih.	1 BOD
24	24	Ne, jer $y = x$, a Ema ima više bodova od ostalih.	1 BOD
32	23	Da	1 BOD
40	22	Da	1 BOD
48	21	Da	1 BOD
56		Ne, jer $y > 50$, a najveći mogući broj bodova je $5 \cdot 10 = 50$.	1 BOD

Ema je mogla osvojiti 32, 40 ili 48 bodova.

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Koliko ima četveroznamenastih brojeva \overline{abcd} takvih da je troznamenasti broj \overline{abc} djeljiv s 4 i troznamenasti broj \overline{bcd} djeljiv s 3?

Rješenje.

\overline{abcd} je četveroznamenasti broj, a \overline{abc} i \overline{bcd} su troznamenasti brojevi pa vrijedi $a, b \neq 0$.

1 BOD

Ako je \overline{abc} djeljiv s 4, onda je dvoznamenkasti završetak \overline{bc} djeljiv s 4, pa dvoznamenkasti završeci mogu biti:

12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96.

2 BODA

Za osam dvoznamenkastih završetaka, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 i 96, vrijedi da im je zbroj znamenaka djeljiv s 3 pa znamenku d možemo izabrati na četiri načina, tj. $d \in \{0, 3, 6, 9\}$. 1 BOD

Kako znamenku a možemo izabrati na 9 načina takvih četveroznamenkastih brojeva ima $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$. 2 BODA

Za preostalih četrnaest dvoznamenkastih završetaka vrijedi da im zbroj znamenaka nije djeljiv s 3 pa znamenku d možemo izabrati na 3 načina, tj. $d \in \{1, 4, 7\}$ ili $d \in \{2, 5, 8\}$. 1 BOD

Kako znamenku a možemo izabrati na 9 načina takvih četveroznamenkastih brojeva ima $14 \cdot 9 \cdot 3 = 378$. 2 BODA

Takvih četveroznamenkastih brojeva ima $288 + 378 = 666$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik ne ispiše dvoznamenkaste brojeve \overline{bc} djeljive s 4 nego argumentira da ih ima 22, a među njima ima 8 djeljivih i s 3, dobiva 3 BODA.

Npr.: Prvi dvoznamenkasti broj djeljiv s četiri je 12, a posljednji 96.

Kako je $12 = 3 \cdot 4$, a $96 = 24 \cdot 4$, ukupno ima $24 - 2 = 22$ takva višekratnika broja četiri.

Od tih 22 višekratnika broja četiri, svaki treći je i višekratnik broja tri. Prvi takav je 12, a posljednji 96.

Kako je $12 = 3 \cdot 4 = (1 \cdot 3) \cdot 4$, a $96 = 24 \cdot 4 = (8 \cdot 3) \cdot 4$, ukupno ima 8 takvih višekratnika broja tri.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. siječnja 2023.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I Taj postupak BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je

$$S = \frac{1}{2}, E = \frac{\frac{3}{7} + 1}{\frac{3}{7} - 1}, D = -2 : \frac{5}{3} + 1.1, A = 3 - 0.2 \cdot 2, M = 100 \cdot 0.03 - 5.25 : \frac{1}{2}.$$

Izračunaj vrijednost izraza $S + E : D - A \cdot M$.

Prvo rješenje.

$$E = \frac{\frac{3}{7} + 1}{\frac{3}{7} - 1} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{-4}{7}} = \frac{-5}{2} = -2.5$$

1 BOD

$$D = -2 : \frac{5}{3} + 1.1 = -2 \cdot \frac{3}{5} + 1.1 = -\frac{6}{5} + 1.1 = -1.2 + 1.1 = -0.1$$

1 BOD

$$A = 3 - 0.2 \cdot 2 = 3 - 0.4 = 2.6$$

1 BOD

$$M = 100 \cdot 0.03 - 5.25 : \frac{1}{2} = 3 - 5.25 \cdot 2 = 3 - 10.5 = -7.5$$

1 BOD

Vrijednost izraza $S + E : D - A \cdot M$ je

$$0.5 + (-2.5) : (-0.1) - 2.6 \cdot (-7.5) = 0.5 + 25 + 19.5$$

1 BOD

$$= 45$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Vrijednost izraza $S + E : D - A \cdot M$ je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{7} + 1}{\frac{3}{7} - 1} : \left(-2 : \frac{5}{3} + 1.1 \right) - (3 - 0.2 \cdot 2) \cdot \left(100 \cdot 0.03 - 5.25 : \frac{1}{2} \right) = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{-5}{2} : \left(-\frac{1}{10} \right) - \frac{26}{10} \cdot \left(-\frac{15}{2} \right) \end{aligned}$$

4 BODA

(Napomena: Prethodna 4 BODA dodjeljuju se za točno određene vrijednosti izraza E, D, A, M kao u prvom rješenju.)

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} + 25 + 19 \frac{1}{2} \\ & = 45 \end{aligned}$$

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Cijena ulaznice za odraslu osobu u kazalištu „Vesela sova“ za 50 % je veća od cijene ulaznice za dijete. Ako ukupna cijena ulaznica za petero odraslih i četvero djece iznosi 39.79 €, kolika je ukupna cijena ulaznica za osmero odraslih i šestero djece?

Prvo rješenje.

Neka je x cijena ulaznice za dijete. Tada je $1.5x$ cijena ulaznice za odraslu osobu. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka je

$$5 \cdot 1.5x + 4x = 39.79$$

1 BOD

$$11.5x = 39.79$$

$$x = 3.46$$

1 BOD

Cijena ulaznice za dijete je 3.46 €.

Cijena ulaznice za odraslu osobu je 5.19 €.

1 BOD

Tada je

$$8 \cdot 5.19 + 6 \cdot 3.46 = 41.52 + 20.76 = 62.28$$

1 BOD

Ukupna cijena ulaznica za osmero odraslih i šestero djece je 62.28 €.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Neka je x cijena ulaznice za dijete. Tada je $1.5x$ cijena ulaznice za odraslu osobu. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka je

$$5 \cdot 1.5x + 4x = 39.79$$

1 BOD

$$11.5x = 39.79$$

$$x = 3.46$$

1 BOD

Cijena ulaznice za dijete je 3.46 €.

Budući da je cijena za odraslu osobu $1.5x$, tada je cijena za osam odraslih i šestero djece jednaka

$$8 \cdot 1.5x + 6 \cdot x = 12x + 6x = 18x$$

1 BOD

Cijena ulaznice za dijete je 3.46 € pa je ukupna cijena za osam odraslih i šestero djece

$$18 \cdot 3.46 = 62.28$$

1 BOD

Ukupna cijena ulaznica za osmero odraslih i šestero djece je 62.28 €.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Treće rješenje.

Neka je x cijena ulaznice za odraslu osobu. Tada je $\frac{2}{3}x$ cijena ulaznice za dijete. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka je

$$5x + 4 \cdot \frac{2}{3}x = 39.79$$

1 BOD

$$5x + \frac{8}{3}x = 39.79$$

$$x = 5.19$$

1 BOD

Cijena ulaznice za odraslu osobu je 5.19 €.

Budući da je cijena za odraslu osobu $1.5x$, tada je cijena za osam odraslih i šestero djece jednaka

$$8 \cdot x + 6 \cdot \frac{2}{3}x = 8x + 4x = 12x$$

1 BOD

Cijena ulaznice za odraslu osobu je 5.19 € pa je ukupna cijena za osam odraslih i šestero djece

$$12 \cdot 5.19 = 62.28$$

1 BOD

Ukupna cijena ulaznica za osmero odraslih i šestero djece je 62.28 €.

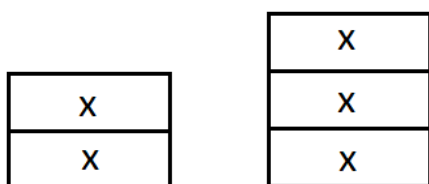
1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Četvrto rješenje.

Neka je $2x$ cijena ulaznice za dijete. Tada je $3x$ cijena ulaznice za odraslu osobu.

1 BOD



Iz uvjeta zadatka je

$$5 \cdot 3x + 4 \cdot 2x = 39.79$$

1 BOD

$$23x = 39.79$$

$$x = 1.73$$

1 BOD

Tada je ukupna cijena za osam odraslih i šestero djece

$$8 \cdot 3x + 6 \cdot 2x = 24x + 12x = 36x$$

1 BOD

tj.

$$36 \cdot 1.73 = 62.28$$

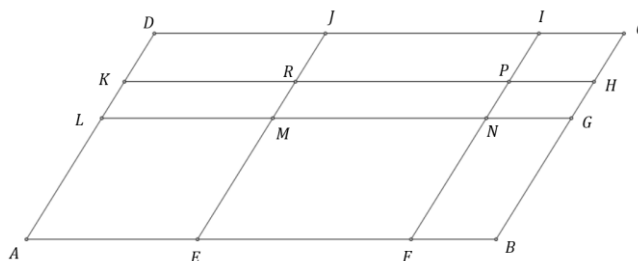
1 BOD

Ukupna cijena ulaznica za osmero odraslih i šestero djece je 62.28 €.

1 BOD

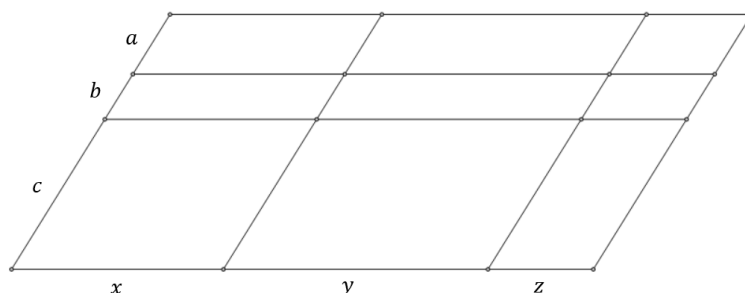
..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Paralelogram $ABCD$ podijeljen je dužinama \overline{LG} , \overline{KH} , \overline{EJ} i \overline{FI} na paralelograme (vidi sliku). Opseg paralelograma $KRJD$ je 32 cm, paralelograma $EFNM$ je 5 dm, a paralelograma $ABCD$ je 1 m. Izračunaj opseg paralelograma $NGHP$.



Prvo rješenje.

Neka je $|KD| = a$, $|LK| = b$, $|AL| = c$, $|AE| = x$, $|EF| = y$, $|FB| = z$.



Uz uvedene oznake, opseg paralelograma $NGHP$ je $2b + 2z$.

1 BOD

Izrazimo li opsege paralelograma $KRJD$, $EFNM$ i $ABCD$ u centimetrima, tada je

$$2a + 2x = 32$$

$$2c + 2y = 50$$

$$2a + 2b + 2c + 2x + 2y + 2z = 100$$

3 BODA

Napomena 1: Svaki točno zapisani izraz kojim je naveden opseg odgovarajućeg paralelograma boduje se s 1 BODOM.

Zbrajanjem prvih dviju jednadžbi i uvrštavanjem u treću, dobivamo

$$32 + 50 + 2b + 2z = 100$$

1 BOD

$$2b + 2z = 18$$

Opseg paralelograma $NGHP$ je 18 cm.

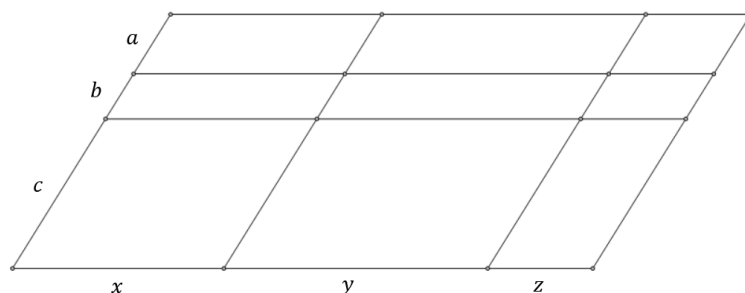
1 BOD

Napomena 2: Bodovi se ne skidaju u nedostatku mjerne jedinice.

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Neka je $|KD| = a$, $|LK| = b$, $|AL| = c$, $|AE| = x$, $|EF| = y$, $|FB| = z$.



Uz uvedene oznake, opseg paralelograma $NGHP$ je $2b + 2z$.

1 BOD

Izrazimo li opsege paralelograma $KRJD$, $EFNM$ i $ABCD$ u centimetrima, tada je

$$a + x = 16$$

$$c + y = 25$$

$$a + b + c + x + y + z = 50$$

3 BODA

Napomena 1: Svaki točno zapisani izraz kojim je naveden opseg odgovarajućeg paralelograma boduje se s 1 BODOM.

Zbrajanjem prvih dviju jednadžbi i uvrštavanjem u treću, dobivamo

$$16 + 25 + b + z = 50$$

1 BOD

$$b + z = 9$$

Opseg paralelograma $NGHP$ je 18 cm.

1 BOD

Napomena 2: Bodovi se ne skidaju u nedostatku mjerne jedinice.

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Razlika dvaju racionalnih brojeva je -371.52 . Ako se umanjeniku pomakne decimalna točka za jedno mjesto ulijevo, dobije se umanjitelj. Koliki je umanjenik, a koliki umanjitelj?

Prvo rješenje.

Neka je x umanjitelj.

1 BOD

Ako se umanjitelj dobije tako da se umanjeniku pomakne decimalna točka za jedno mjesto ulijevo, tada je umanjenik $10x$.

1 BOD

$$10x - x = -371.52$$

1 BOD

$$9x = -371.52$$

$$x = -41.28$$

1 BOD

$$10x = -412.8$$

1 BOD

Umanjitelj je -41.28 , a umanjenik -412.8 .

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Neka je $\overline{abc.d}$ umanjenik. Tada je $\overline{ab.cd}$ umanjitelj.

Razlika apsolutnih vrijednosti tih dvaju brojeva je 371.52 .

$$\begin{array}{r} abc.d \\ - ab.cd \\ \hline 371.52 \end{array}$$

pa je $2 + d = 10$ ili $10 - d = 2$.

Dakle, $d = 8$.

1 BOD

$$\begin{array}{r} abc.8 \\ - ab.c8 \\ \hline 371.52 \end{array}$$

Tada je $5 + c + 1 = 8$ ili $8 - (c + 1) = 5$.

Dakle, $c = 2$.

1 BOD

$$\begin{array}{r} ab2.8 \\ - ab.28 \\ \hline 371.52 \end{array}$$

Tada je $1 + b = 2$ ili $2 - b = 1$.

Dakle, $b = 1$.

1 BOD

$$\begin{array}{r} a12.8 \\ - a1.28 \\ \hline 371.52 \end{array}$$

Tada je $37 + a = \overline{a1}$ ili $\overline{a1} - a = 37$.

Dakle, $a = 4$.

1 BOD

$$\begin{array}{r} a12.8 \\ - a1.28 \\ \hline 371.52 \end{array}$$

Apsolutna vrijednost umanjenika je 412.8, a umanjitelja 41.28. 1 BOD
 Umanjitelj je -41.28 , a umanjenik -412.8 . 1 BOD
 UKUPNO 6 BODOVA

5. Na koliko načina možemo odabrati dva različita broja između prva 2023 prirodna broja tako da njihov zbroj bude paran? Rješenje zapiši u obliku kvadrata prirodnog broja.

Rješenje.

Zbroj dva prirodna broja je paran ako su oba parna ili oba neparna. 1 BOD
 Među prva 2023 prirodna broja ima 1011 parnih i 1012 neparnih brojeva. 1 BOD
 Parove parnih brojeva možemo odabrati na $\frac{1011 \cdot 1010}{2} = 1011 \cdot 505$ načina. 1 BOD
 Parove neparnih brojeva možemo odabrati na $\frac{1012 \cdot 1011}{2} = 506 \cdot 1011$ načina. 1 BOD
 Ukupan broj načina je $1011 \cdot 505 + 506 \cdot 1011$ 1 BOD
 $= 1011 \cdot (505 + 506) = 1011^2$ načina. 1 BOD
 UKUPNO 6 BODOVA

6. Neka su a, b, c nenegativni racionalni brojevi. Ako je $a(b + c) = 36$, $b(a + c) = 50$ i $c(a + b) = 56$, koliko je abc ?

Prvo rješenje.

Zadane su jednakosti

$$\begin{aligned} ab + ac &= 36 \\ ab + bc &= 50 \\ ac + bc &= 56. \end{aligned}$$

1 BOD

Zbrajanjem prethodnih triju jednakosti dobivamo:

$$ab + ac + ab + bc + ac + bc = 142$$

1 BOD

$$2(ab + ac + bc) = 142$$

$$ab + ac + bc = 71$$

1 BOD

Oduzmemo li od posljednje jednakosti, redom, tri zadane jednakosti, dobivamo:

$$bc = 71 - 36$$

$$bc = 35$$

1 BOD

$$ac = 71 - 50$$

$$ac = 21$$

1 BOD

$$ab = 71 - 56$$

$$ab = 15$$

1 BOD

Umnožak dobivenih jednakosti

$$ab \cdot ac \cdot bc = 15 \cdot 21 \cdot 35$$

1 BOD

jednak je

$$ab \cdot ac \cdot bc = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7$$

1 BOD

$$abc \cdot abc = (3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7)$$

$$abc \cdot abc = 105 \cdot 105.$$

1 BOD

Budući da su a, b, c nenegativni racionalni brojevi, abc ne može iznositi -105 , pa zaključujemo da vrijedi $abc = 105$.

1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju odredimo da je $ab = 15$, $bc = 35$ i $ac = 21$.

6 BODOVA

Iz $ab = 15$, $ac = 21$ slijedi

$$\frac{ab}{ac} = \frac{15}{21},$$

odnosno

$$\frac{b}{c} = \frac{5}{7}.$$

Slijedi

$$b = \frac{5}{7}c.$$

1 BOD

Uvrštavanjem u $bc = 35$ dobijemo

$$\frac{5}{7}c \cdot c = 35,$$

odnosno $c^2 = 49$.

1 BOD

Odavde zbog $c \geq 0$ slijedi $c = 7$, pa je $b = 5$ i $a = 3$.

1 BOD

Stoga je $abc = 105$.

1 BOD

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Da bismo izračunali vrijednosti izraza ab , ac i bc , umjesto zbroja triju zadanih jednakosti možemo računati bilo koju razliku dviju zadanih jednakosti. Na primjer, oduzmemo li od druge jednakosti prvu, dobivamo

$$bc - ac = 14.$$

1 BOD

Ako toj jednakosti dodamo treću, dobivamo

$$2bc = 70$$

1 BOD

$$bc = 35.$$

1 BOD

Uvrstimo li $bc = 35$ u drugu jednakost, dobivamo $ab = 15$.

1 BOD

Uvrstimo li $ab = 15$ u prvu ili $bc = 35$ u treću jednakost, dobivamo $ac = 21$.

1 BOD

Napomena 2: Ukoliko učenik ne uzima u obzir nenegativnost brojeva a, b i c ili ne odbaci negativno rješenje, može dobiti najviše 9 BODOVA.

7. Odredi sve prirodne brojeve oblika \overline{abcdef} takve da u zapisu imaju znamenke 1, 2, 3, 4, 5 i 6 od kojih se niti jedna ne ponavlja te da vrijedi:

\overline{ab} je djeljiv s 2,
 \overline{abc} je djeljiv s 3,
 \overline{abcd} je djeljiv s 4,
 \overline{abcde} je djeljiv s 5,
 \overline{abcdef} je djeljiv sa 6.

Prvo rješenje.

Budući da na raspolaganju imamo znamenke od 1 do 6 te da je broj \overline{abcde} djeljiv s 5, tada znamenka e mora biti 5.

$$e = 5$$

1 BOD

Brojevi \overline{ab} , \overline{abcd} i \overline{abcdef} djeljivi su s 2 pa znamenke b , d i f mogu biti 2, 4 ili 6. Znamenke a i c mogu biti 1 ili 3.

$$b, d, f \in \{2, 4, 6\}$$

$$a, c \in \{1, 3\}$$

2 BODA

Promotrimo slučajeve koje dobijemo odabirom znamenke $b \in \{2, 4, 6\}$.

Prvi slučaj.

Neka je $b = 2$.

Tada je broj oblika $\overline{a2cd5f}$.

Budući da je broj $\overline{a2c}$ djeljiv s 3, tada zbroj njegovih znamenaka $a + 2 + c$ mora biti djeljiv s 3.

Jedina mogućnost je da znamenke a i c budu 1 ili 3.

Ako je $a = 1$ i $c = 3$, tada je broj oblika $\overline{123d5f}$.

Ako je $a = 3$ i $c = 1$, tada je broj oblika $\overline{321d5f}$.

1 BOD

Brojevi $\overline{123d}$ i $\overline{321d}$ moraju biti djeljivi s 4. To je moguće jedino ako je $d = 6$.

1 BOD

U tom slučaju bi bilo $f = 4$.

1 BOD

Brojevi 123654 i 321654 su djeljivi sa 6 jer su parni i zbroj znamenaka im je 21 pa je djeljiv s 3.

2 BODA

Traženi brojevi su 123654 i 321654.

Drugi slučaj.

Neka je $b = 4$.

Tada je broj oblika $\overline{a4cd5f}$.

Budući da je broj $\overline{a4c}$ djeljiv s 3, tada zbroj njegovih znamenaka $a + 4 + c$ mora biti djeljiv s 3.

Ne postoje znamenke a i c koje zadovoljavaju taj uvjet.

1 BOD

Napomena 1: Učeniku se dodjeljuje 1 BOD ako na bilo koji način argumentira da je $b \neq 4$.

Treći slučaj.

Neka je $b = 6$.

Tada je broj oblika $\overline{a6cd5f}$.

Budući da je broj $\overline{a6c}$ djeljiv s 3, tada zbroj njegovih znamenaka $a + 6 + c$ mora biti djeljiv s 3.

Ne postoje znamenke a i c koje zadovoljavaju taj uvjet.

1 BOD

Napomena 2: Učeniku se dodjeljuje 1 BOD ako na bilo koji način argumentira da je $b \neq 6$.

.....UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je $e = 5$, $b, d, f \in \{2, 4, 6\}$ i $a, c \in \{1, 3\}$. 3 BODA

Kako je $a, c \in \{1, 3\}$, a broj \overline{abc} je djeljiv s 3, zbroj njegovih znamenaka $4 + b$ mora biti djeljiv s 3.

Jedina mogućnost za to je da je $b = 2$. 2 BODA

Promotrimo slučajeve koje dobijemo odabirom znamenke $d \in \{4, 6\}$.

Prvi slučaj.

Neka je $d = 4$.

Tada je broj oblika $\overline{a2c45f}$.

Brojevi 1234 i 3214 moraju biti, a nisu djeljivi s 4.

Dakle, $d \neq 4$. 1 BOD

Napomena 3: Učeniku se dodjeljuje 1 BOD ako na bilo koji način argumentira da je $d \neq 4$.

Drugi slučaj.

Neka je $d = 6$.

Tada je broj oblika $\overline{a2c65f}$.

Brojevi 1236 i 3216 djeljivi su s 4. 1 BOD

Dakle, u oba slučaja mora biti $f = 4$. 1 BOD

Brojevi 123654 i 321654 su djeljivi sa 6 jer su parni i zbroj znamenaka im je 21 pa je djeljiv s 3.

2 BODA

Traženi brojevi su 123654 i 321654.

.....UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je $e = 5$, $b, d, f \in \{2, 4, 6\}$ i $a, c \in \{1, 3\}$. 3 BODA

Promotrimo slučajeve $a = 1$, $c = 3$, odnosno $a = 3$, $c = 1$.

Tada je broj oblika $\overline{1b3d5f}$, odnosno $\overline{3b1d5f}$. 1 BOD

Budući da je broj $\overline{1b3}$ (odnosno $\overline{3b1}$) djeljiv s 3, tada zbroj njegovih znamenaka $1 + b + 3$

(odnosno $3 + b + 1$) mora biti djeljiv s 3. 1 BOD

To je moguće, i u jednom i u drugom slučaju, samo ako je $b = 2$. 1 BOD

Brojevi $\overline{123d}$ i $\overline{321d}$ moraju biti djeljivi s 4. To je moguće jedino ako je $d = 6$. 1 BOD

Tada mora biti $f = 4$. 1 BOD

Brojevi 123654 i 321654 su djeljivi sa 6 jer su parni i zbroj znamenaka im je 21 pa je djeljiv s 3.

2 BODA

Traženi brojevi su 123654 i 321654.

.....UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 4: Ako učenik samo napiše da su traženi brojevi 123654 i 321654, dobiva 0 BODOVA, a ako provjeri da zadovoljavaju svojstva djeljivosti, dobiva 2 BODA.

Dokaz da nema drugih brojeva nosi 8 BODOVA.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. siječnja 2023.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}.$$

Prvo rješenje.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

2 BODA

$$= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2} + \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}$$

2 BODA

$$= \frac{2}{2-1} + \frac{2}{3-1} = 2 + 1 = 3$$

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

2 BODA

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2} - \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2} + \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2} - \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-1^2}$$

2 BODA

$$= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2} + \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1^2}$$

$$= \frac{2}{2-1} + \frac{2}{3-1} = 2 + 1 = 3$$

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Ako je zbroj opsega dva kvadrata jednak 8 i razlika njihovih površina jednaka 3, odredi duljine stranica obaju kvadrata.

Rješenje.

Označimo duljinu stranica većeg kvadrata s x , a duljinu stranice manjeg kvadrata s y .

Tada je, prema uvjetima zadatka,

$$4x + 4y = 8 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{ i } x^2 - y^2 = 3. \quad 1 \text{ BOD}$$

Iz prve jednadžbe zaključujemo da je $x + y = 2$. (1)

Budući da je $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, dobivamo da je $3 = 2(x - y)$,

$$\text{ tj. } x - y = \frac{3}{2} \quad (2) \quad 1 \text{ BOD}$$

Iz (1) i (2) dobivamo da je tada

$$x = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} \quad 2 \text{ BODA}$$

(ocijeniti s 1 BODOM u slučaju računske pogreške)

$$\text{ i } y = 2 - x = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Bazen zapremnine 18 500 litara puni se iz tri otvorene cijevi. Prvom cijevi u minuti proteče 32 litre vode. Drugom cijevi u dvije minute proteče koliko i prvom cijevi u 3 minute. Trećom cijevi u 5 minuta proteče koliko i drugom cijevi u 4 minute. Ako su sve tri cijevi otvorene istovremeno, za koliko vremena će se bazen napuniti do vrha? Odgovor izrazi u satima, minutama i sekundama.

Prvo rješenje.

1. cijev: u 1 minuti 32 l vode

2. cijev: u 2 minute $3 \cdot 32 = 96$ l vode, dakle

u 1 minuti 48 l vode 1 BOD

3. cijev: u 5 minuta $4 \cdot 48 = 192$ l vode (ili $2 \cdot 96 = 192$ l vode), dakle

u 1 minuti 38.4 l vode 1 BOD

sve tri cijevi zajedno: u 1 minuti $32 + 48 + 38.4 = 118.4$ l vode 1 BOD

Da bi se napunio cijeli bazen potrebno je

$$18\,500 : 118.4 = 185\,000 : 1184 = \frac{185\,000}{1184} = \frac{5000}{32} = \frac{625}{4} = 156.25 \text{ minuta,}$$

2 BODA

odnosno

$$156.25 = 120 + 36 + \frac{1}{4} = 2 \text{ h } 36 \text{ min } 15 \text{ s.} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Računamo protok vode u jednom satu, tj. u 60 minuta.

1. cijev: u 60 minuta $60 \cdot 32 = 1920$ l vode;

2. cijev: u 2 minute $3 \cdot 32 = 96$ l vode, a u 60 minuta $30 \cdot 96 = 2880$ l vode; 1 BOD

3. cijev: u 5 minuta $4 \cdot 48 = 192$ l vode (ili $2 \cdot 96 = 192$ l vode),

a u 60 minuta $12 \cdot 192 = 2304$ l vode; 1 BOD

sve tri cijevi zajedno: u 60 minuta $1920 + 2880 + 2304 = 7104$ l vode.

1 BOD

Da bi se napunio cijeli bazen potrebno je

$$18\,500 : 7104 = \frac{18\,500}{7104} = \frac{500}{192} = \frac{125}{48} = 2\frac{29}{48} \text{ sati,}$$

2 BODA

odnosno

$$2 \text{ h} + \frac{29}{48} \cdot 60 \text{ min} = 2 \text{ h} + \frac{145}{4} \text{ min} = 2 \text{ h} + 36 \text{ min} + \frac{1}{4} \text{ min} = 2 \text{ h} 36 \text{ min} 15 \text{ s.}$$

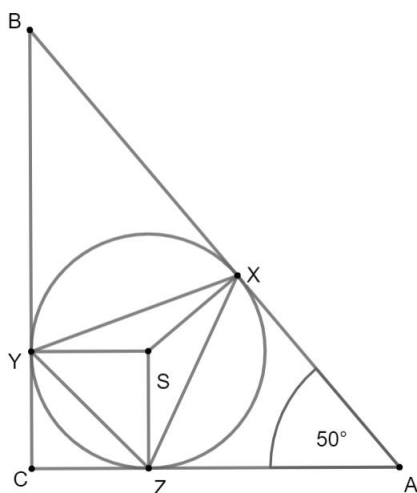
1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Jedan kut pravokutnog trokuta iznosi 50° . Neka su X , Y i Z točke u kojima trokutu upisana kružnica dodiruje stranice trokuta. Izračunaj veličine kutova trokuta $\triangle XYZ$.

Prvo rješenje.

Skica:



Budući da je jedan šiljasti kut pravokutnog trokuta 50° , drugi šiljasti kut mora biti 40° jer je zbroj kutova uz hipotenuzu 90° .

1 BOD

Okomice iz središta S sijeku stranice trokuta u točkama X , Y i Z i vrijedi da su dužine \overline{SX} , \overline{SY} i \overline{SZ} jednake duljine jer je središte upisane kružnice jednako udaljeno od svih triju stranica trokuta.

1 BOD

Kako je zbroj veličina kutova u četverokutu jednak 360° , a u četverokutu $ZAXS$ poznate veličine kutova su 50° , 90° i 90° , slijedi da je veličina kuta pri vrhu S jednaka 130° .

U četverokutu $XBYS$ poznate veličine kutova su 40° , 90° i 90° pa je veličina kuta pri vrhu S jednaka 140° .

Četverokut $YCZS$ je kvadrat pa su svi kutovi pravi.

1 BOD

Promatramo trokute ZXS , $XY S$ i YZS koji su **jednakokrani** jer su stranice \overline{SX} , \overline{SY} i \overline{SZ} jednake duljine pa su to ujedno i krakovi tih trokuta.

1 BOD

Kako je zbroj veličina kutova u trokutu jednak 180° , zaključujemo da su veličine kutova uz osnovicu u trokutu ZXS jednake $(180^\circ - 130^\circ) : 2 = 25^\circ$,

u trokutu $XY S$ su $(180^\circ - 140^\circ) : 2 = 20^\circ$

i u trokutu YZS su $(180^\circ - 90^\circ) : 2 = 45^\circ$.

1 BOD

Prema tome su veličine kutova trokuta XYZ jednake

$$20^\circ + 25^\circ = 45^\circ,$$

$$20^\circ + 45^\circ = 65^\circ \text{ i}$$

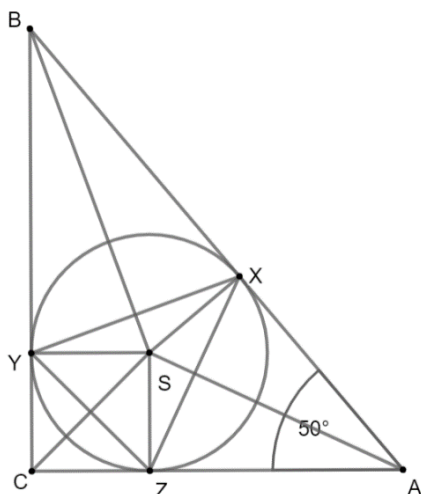
$$25^\circ + 45^\circ = 70^\circ.$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Skica:



Budući da je jedan šiljasti kut pravokutnog trokuta 50° , drugi šiljasti kut mora biti 40° jer je zbroj kutova uz hipotenuzu 90° .

1 BOD

Trokuti CZY , ZAX i XBZ su jednakokračni, jer je $|CY| = |CZ|$, $|AZ| = |AX|$ i $|BX| = |BY|$ (što slijedi iz sukladnosti trokuta CZS i SYC , zatim ZAS i AXS te XBS i BYS , a i inače je poznata činjenica koja se može koristiti bez dokaza).

1 BOD

Zato je

$$|\angle CYZ| = |\angle YZC| = \frac{180^\circ - |\angle ZCY|}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ,$$

$$|\angle AZX| = |\angle ZXA| = \frac{180^\circ - |\angle XAZ|}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ$$

i

$$|\angle BXY| = |\angle XYB| = \frac{180^\circ - |\angle YBX|}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

2 BODA

(1 BOD za parcijalne zaključke $|\angle CYZ| = |\angle YZC|$, $|\angle AZX| = |\angle ZXA|$ i $|\angle BXY| = |\angle XYB|$)

Zato su traženi kutovi

$$|\angle ZYX| = 180^\circ - |\angle CYZ| - |\angle XYB| = 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ = 65^\circ,$$

$$|\angle YXZ| = 180^\circ - |\angle BXY| - |\angle ZXA| = 180^\circ - 70^\circ - 65^\circ = 45^\circ,$$

$$|\angle XZY| = 180^\circ - |\angle AZX| - |\angle YZC| = 180^\circ - 65^\circ - 45^\circ = 70^\circ$$

$$(\text{ili } |\angle XZY| = 180^\circ - |\angle ZYX| - |\angle YXZ| = 180^\circ - 65^\circ - 45^\circ = 70^\circ).$$

2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

5. Koliki je zbroj svih znamenki broja

$$10^1 - 10^2 + 10^3 - 10^4 + 10^5 - \dots - 10^{2022} + 10^{2023} ?$$

Rješenje.

$$10^1 - 10^2 + 10^3 - 10^4 + 10^5 - \dots - 10^{2022} + 10^{2023} =$$

$$= 10^1 + (10^3 - 10^2) + (10^5 - 10^4) + \dots + (10^{2023} - 10^{2022}) \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 10 + 900 + 90\,000 + \dots + 9 \cdot 10^{2022} = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 909090 \dots 90910 \quad 1 \text{ BOD}$$

Taj broj ima 2023 znamenke. 1 BOD

Od toga je 1011 znamenki 9, 1011 znamenki 0 i jedna jedinica (predzadnja znamenka). 1 BOD

Zbroj svih znamenki tog broja je

$$1011 \cdot 9 + 1 = 9099 + 1 = 9100. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Zbroj nekih 50 uzastopnih prirodnih brojeva je potpuni kvadrat. Kolika su dva najmanja moguća zbroja takvih 50 uzastopnih brojeva?

Prvo rješenje.

Neka je

$$n - 24, n - 23, \dots, n - 1, n, n + 1, n + 24, n + 25$$

pedeset uzastopnih prirodnih brojeva, $n \geq 25$. 2 BODA

Tada je

$$n - 24 + n - 23 + \dots + n - 1 + n + n + 1 + \dots + n + 24 + n + 25 = 50n + 25, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\text{tj. } 50n + 25 = 25(2n + 1). \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako je 25 potpuni kvadrat, onda i $2n + 1$ mora biti potpuni kvadrat uz uvjet $n \geq 25$. 1 BOD

Iz $2n + 1 \geq 51$ i $2n + 1$ je neparan broj slijedi da je najmanji potpuni kvadrat 81. 2 BODA

$$\text{Znači, } 2n + 1 = 81 \text{ pa je zbroj } 25(2n + 1) = 25 \cdot 81 = 2025. \quad 1 \text{ BOD}$$

Uz iste uvjete za $2n + 1$, sljedeći po veličini potpuni kvadrat je 121, 1 BOD

$$\text{a zbroj je } 25(2n + 1) = 25 \cdot 121 = 3025. \quad 1 \text{ BOD}$$

Dva najmanja moguća zbroja su 2025 i 3025.

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Neka je $n, n + 1, \dots, n + 49$ pedeset uzastopnih prirodnih brojeva, $n \geq 1$. 1 BOD

$$\text{Tada je } n + n + 1 + \dots + n + 49 = 50n + \frac{49 \cdot 50}{2} = 50n + 49 \cdot 25, \quad 2 \text{ BODA}$$

$$\text{tj. } 50n + 49 \cdot 25 = 25(2n + 49). \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako je 25 potpuni kvadrat, onda i $2n + 49$ mora biti potpuni kvadrat uz uvjet $n \geq 1$. 1 BOD

Iz $2n + 49 \geq 51$ i $2n + 49$ je neparan broj slijedi da je najmanji potpuni kvadrat 81. 2 BODA

$$\text{Znači, } 2n + 49 = 81 \text{ pa je zbroj } 25(2n + 49) = 25 \cdot 81 = 2025. \quad 1 \text{ BOD}$$

Uz iste uvjete za $2n + 49$, sljedeći po veličini potpuni kvadrat je 121, 1 BOD

$$\text{a zbroj je } 25(2n + 49) = 25 \cdot 121 = 3025. \quad 1 \text{ BOD}$$

Dva najmanja moguća zbroja su 2025 i 3025.

..... UKUPNO 10 BODOVA

Primjedba. Do zbroja pedeset uzastopnih brojeva (prva 4 BODA) se u drugom načinu rješavanja može doći i malo izravnije: 50 uzastopnih brojeva $n, n + 1, \dots, n + 49$ napišemo kao

$$(n + n + 49) + (n + 1 + n + 48) + \dots + (n + 24 + n + 25) = 25(2n + 49)$$

iako je u to osnovi istovjetna ideja.

7. Na koliko različitih načina možemo u 9 polja tablice dimenzija 3×3 upisati prvih 9 prirodnih brojeva (po jedan u svako polje) tako da zbrojevi upisanih brojeva u svakom retku te tablice budu međusobno jednaki?

Rješenje.

Kako je zbroj prvih 9 brojeva jednak 45, zbroj brojeva u svakom retku mora biti jednak 15.

1 BOD

Najprije analizirajmo na koliko se načina prvih 9 prirodnih brojeva može podijeliti u skupine od po tri broja čiji je zbroj jednak 15. Svaku takvu trojku brojeva ćemo upisivati u jedan redak.

U skupini u kojoj je broj 9, zbroj preostalih brojeva mora biti 6 pa su jedine dvije mogućnosti da su u toj skupini 9, 5, 1 ili 9, 4, 2.

Potom promotrimo skupinu u kojoj se nalazi broj 8; kako zbroj preostala dva broja mora biti 7, preostaju tri mogućnosti: 8, 6, 1 ili 8, 5, 2 ili 8, 4, 3.

Ukoliko jednu skupinu čine 9, 5, 1, onda druga skupina mora sadržavati 8, 4, 3, a treća 7, 6, 2.

Ukoliko jednu skupinu čine 9, 4, 2, onda druga skupina mora sadržavati 8, 6, 1, a treća je tada 7, 5, 3.

Dakle, jedine dvije moguće podjele u tri skupine su:

- 9, 5, 1; 8, 4, 3; 7, 6, 2
- 9, 4, 2; 8, 6, 1; 7, 5, 3

3 BODA

(S 1 BODOM treba vrednovati nalaženja obje gornje mogućnosti, a s 2 BODA objašnjenje/dokaz da nema drugih mogućnosti.)

Tri broja u jedan redak tablice 3×3 možemo upisati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina.

1 BOD

Kako imamo tri retka, za fiksiran raspored brojeva po recima, tri retka možemo ispuniti na $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ načina,

1 BOD

a kako tri retka možemo poredati na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina,

1 BOD

za fiksiranu podjelu u tri skupine imamo $216 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ mogućnosti upisivanja.

1 BOD

Ukupno, s obzirom da imamo dvije mogućnosti podjele u skupine, broj mogućnosti je $2 \cdot 6^4 = 2592$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA