

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2021/2022

Srednje škole - 4. grupa

## Rješenja i upute za bodovanje

**VAŽNO:** Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

### 1. zadatak (16 bodova)

Smjer dulje stranice pravokutnika možemo prozvati  $\hat{x}$  smjerom, a smjer kraće duljine  $\hat{y}$  smjerom. Zamislimo li prvo situaciju u kojoj se elektron može kretati samo u jednoj dimenziji duljine  $L$  znamo da je njegov impuls kvantiziran restrikcijom da je njegova De Broglijeva valna duljina jednaka  $\lambda = 2L/n$ , tj. impuls može poprimiti vrijednosti:

$$p_n = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2L}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad [3 \text{ boda}] \quad (1)$$

Generalizacijom na dvije dimenzije slijedi da su obje komponente impulsa kvantizirane, što znači da je i ukupni impuls kvantiziran i jednak:

$$p_{n_1, n_2} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\left(\frac{n_1 h}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n_2 h}{2b}\right)^2}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}. \quad [3 \text{ boda}] \quad (2)$$

Energija je onda jednostavno:

$$E_{n_1, n_2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right). \quad [2 \text{ boda}] \quad (3)$$

S obzirom da je  $a = 1.5b$  prva tri pobuđena stanja su dana sa  $(n_1, n_2) = \{(2, 1), (1, 2), (3, 1)\}$ , a osnovno sa  $(n_1, n_2) = (1, 1)$ . [2 boda]

Potrebne energije fotona su tada:

$$E_1 = E_{2,1} - E_{1,1} = \frac{h^2}{8m} \cdot \frac{3}{a^2} = 31 \text{ meV}, \quad [2 \text{ boda}] \quad (4)$$

$$E_2 = E_{1,2} - E_{1,1} = \frac{h^2}{8m} \cdot \frac{3}{b^2} = 71 \text{ meV}, \quad [2 \text{ boda}] \quad (5)$$

$$E_3 = E_{3,1} - E_{1,1} = \frac{h^2}{8m} \cdot \frac{8}{a^2} = 84 \text{ meV}. \quad [2 \text{ boda}] \quad (6)$$

### 2. zadatak (14 bodova)

a.) Za impulse i ukupne energije pozitrona i elektrona vrijedi:

$$p_{\pm} = m\gamma_{\pm}v_{\pm} \rightarrow E_{\pm} = \sqrt{m^2c^4 + p_{\pm}^2c^2} = mc^2\gamma_{\pm}, \quad \gamma_{\pm} = \left(1 - \frac{v_{\pm}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad [2 \text{ boda}] \quad (7)$$

pa zbog zakona očuvanja energije i impulsa (po komponentama) vrijedi:

$$E_f = mc^2(\gamma_+ + \gamma_-), \quad [1 \text{ bod}] \quad (8)$$

$$p_f = \frac{E_f}{c} = m(v_+\gamma_+ \cos \phi + v_-\gamma_- \cos \theta), \quad 0 = m(v_+\gamma_+ \sin \phi - v_-\gamma_- \sin \theta), \quad [1 \text{ bod}] \quad (9)$$

gdje su  $E_f$  i  $p_f$  energija i impuls fotona. Uvrštavanjem (8) u prvi izraz iz (9) slijedi:

$$mc^2 (\gamma_+ + \gamma_-) = mc (v_+ \gamma_+ \cos \phi + v_- \gamma_- \cos \theta). \quad [1 \text{ bod}] \quad (10)$$

Očito je da gornja jednakost ne može biti zadovoljena zbog  $v_{\pm} < c$  i  $\cos \theta, \cos \phi < 1$ , pa zaključujemo da se proces ne može ostvariti u vakuumu. **[2 boda]**

b.) Intenzitet zračenja nakon prolaska kroz olovo debljine 5 mm je jednostavno:

$$I = I_0 \exp(-\mu x) = 0.1 \text{ Wm}^{-2} \cdot \exp(-1.05 \text{ cm}^{-1} \cdot 0.5 \text{ cm}) = 0.059 \text{ Wm}^{-2}. \quad [3 \text{ boda}] \quad (11)$$

c.) Energija deponirana u olovu je jednaka umnošku površine olovnog komada, razlike početnog i krajnjeg intenziteta, te vremenu izloženosti zračenju:

$$E = (I_0 - I) \cdot S \cdot t = (0.1 - 0.059) \text{ Wm}^{-2} \cdot (0.05 \text{ m})^2 \cdot 18000 \text{ s} = 1.84 \text{ J}. \quad [4 \text{ boda}] \quad (12)$$

### 3. zadatak (20 bodova)

a.) Iz priložene slike vidimo da mora vrijediti:

$$n \sin \beta = \sin \alpha, \quad [1 \text{ bod}] \quad (13)$$

$$n \sin(\alpha - \beta) = \sin \theta. \quad [1 \text{ bod}] \quad (14)$$

Raspisivanjem lijeve strane u (14) dolazimo do:

$$n \sin \alpha \cos \beta - n \sin \beta \cos \alpha = \sin \theta. \quad (15)$$

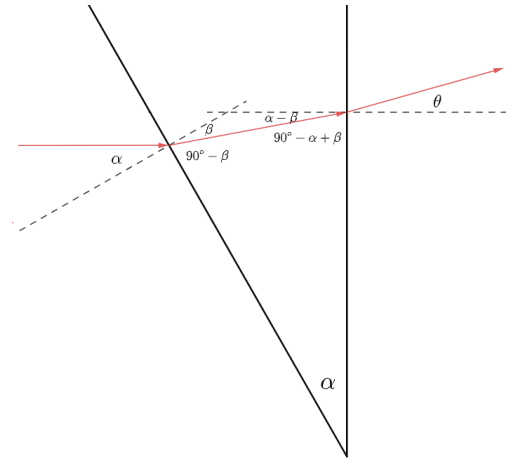
Koristeći (13) i  $\cos \beta = (1 - \sin^2 \beta)^{-1/2}$  slijedi:

$$\sin \theta = \sin \alpha \left( \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right), \quad (16)$$

tj. za  $\theta$  vrijedi:

$$\theta = \arcsin \left[ \sin \alpha \left( \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \right]. \quad (17)$$

**[2 boda]**



Slika 1: Skica koja prikazuje dva uzastopna loma upadne zrake na prizmi.

b.) Možemo promotriti sliku 2. Impuls fotona (iznos) u reflektiranoj i lomljenoj zruci jednak je početnom (koji iznosi  $E/c$  gdje je  $E$  energija fotona), pa slijedi da je:

$$\Delta \vec{p}_r = \frac{E}{c} [(-1 - \cos 2\alpha) \hat{x} - \sin 2\alpha \hat{y}], \quad \Delta \vec{p}_l = \frac{E}{c} [(\cos \theta - 1) \hat{x} + \sin \theta \hat{y}]. \quad [2 \text{ boda}] \quad (18)$$

Sila na prizmu je jednostavno dana ukupnom promjenom impulsa u vremenu. Promjena impulsa prizme suprotna je promjeni impulsa fotona, pa vrijedi:

$$\vec{F} = \frac{N(\Delta t) \Delta \vec{p}_{prizma}}{\Delta t} = \frac{N(\Delta t) E}{c \Delta t} \{ [(1 - \eta)(1 + \cos 2\alpha) + \eta(1 - \cos \theta)] \hat{x} + [(1 - \eta) \sin 2\alpha - \eta \sin \theta] \hat{y} \}, \quad (19)$$

gdje je  $N(\Delta t)$  broj fotona koji udari prizmu u vremenu  $\Delta t$ . **[1 bod]**

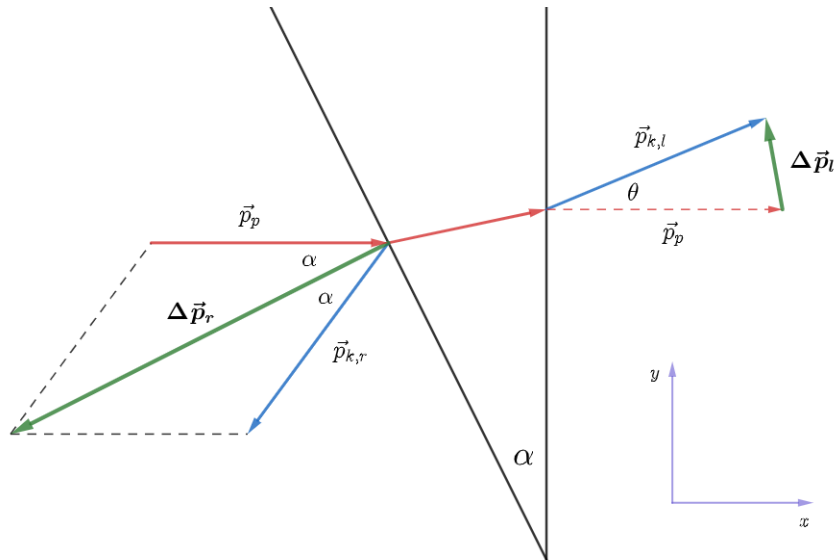
Također vrijedi da je ukupna snaga zračenja koje upada na prizmu jednaka:

$$P = \frac{N(\Delta t) E}{\Delta t} = \bar{I} S = \frac{kh^2 v}{2}, \quad [3 \text{ boda}] \quad (20)$$

gdje je  $\bar{I}$  srednji intenzitet zračenja na prizmu.

Iz ovoga možemo dobiti omjer  $N(\Delta t)/\Delta t$  koji možemo ubaciti u (7). Sređivanjem konačno slijedi izraz za silu:

$$\vec{F} = \frac{kh^2v}{2c} \{ [1 + (1 - \eta) \cos 2\alpha - \eta \cos \theta] \hat{x} + [(1 - \eta) \sin 2\alpha - \eta \sin \theta] \hat{y} \}. \quad [1 \text{ bod}] \quad (21)$$



Slika 2: Promjena impulsa jednog fotona usred refleksije na prvoj ravnini ( $\Delta \vec{p}_r$ ) i promjena impulsa jednog fotona nakon dva uzastopna loma ( $\Delta \vec{p}_l$ ).

c.) Izjednačavanjem iznosa  $y$ -komponente sile na prizmu zbog obasjavanja sa gravitacijskom silom dolazimo do:

$$\frac{kh^2v}{2c} [(1 - \eta) \sin 2\alpha - \eta \sin \theta] = \rho V g, \quad [1 \text{ bod}] \quad (22)$$

a s obzirom da je volumen prizme  $V = h^2v \tan \alpha$  slijedi (uz  $\eta = 0$ ):

$$k = \frac{\rho g c}{\cos^2 \alpha}. \quad [2 \text{ boda}] \quad (23)$$

Snaga izvora jednaka je:

$$P = \bar{I}_{-h/5, h} \cdot \frac{6hv}{5} = k \cdot \frac{3h}{5} \cdot \frac{6hv}{5} = \frac{18kh^2v}{25}, \quad [2 \text{ boda}] \quad (24)$$

gdje je  $\bar{I}_{-h/5, h}$  srednji intenzitet za cijelo površinu za koju je intenzitet različit od nule. Uvrštavanjem (23) u (24) se dobije konačan izraz za  $P$ :

$$P = \frac{18h^2v\rho g c}{25 \cos^2 \alpha} = 0.43 \text{ W}. \quad [1 \text{ bod}] \quad (25)$$

d.) Malim pomakom prizme u  $+\hat{y}$  smjeru smanji se sila uzrokovana obasjavanjem, pa je ukupna sila na prizmu u  $-\hat{y}$  smjeru. Malim pomakom prizme u  $-\hat{y}$  smjeru ukupna sila je u  $+\hat{y}$  smjeru jer intenzitet zračenja monotono raste u  $-\hat{y}$  smjeru sve do  $y = -h/5$ . Dakle, uvjet ravnoteže je stabilan na male pomake. **[2 boda]**

Kada ne bi bilo zračenja u intervalu  $-h/5 < y < 0$  onda bi malim pomakom prizme u  $-\hat{y}$  smjeru ukupna sila bila u  $-\hat{y}$  smjeru, tj. ravnoteža bi se bespovratno narušila. **[1 bod]**

#### 4. zadatak (20 bodova)

a.) Fazna razlika se javlja zbog različitog indeksa refrakcije dvaju valova kroz plazmu, i dana je sa:

$$\Delta \phi = (k_+ - k_-) \Delta z = \frac{\omega \Delta z}{c} (n_+ - n_-). \quad [1 \text{ bod}] \quad (26)$$

Iz zadatka možemo vidjeti da je:

$$n_+^2 - n_-^2 = (n_+ + n_-)(n_+ - n_-) = \frac{\omega_p^2}{\omega} \left( \frac{1}{\omega - \omega_c} - \frac{1}{\omega + \omega_c} \right). \quad [1 \text{ bod}] \quad (27)$$

Također koristeći  $(1+x)^{-1} \approx 1-x$  za  $x \ll 1$  slijedi:

$$\frac{1}{\omega \pm \omega_c} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_c}{\omega}} \approx \frac{1}{\omega} \left( 1 \mp \frac{\omega_c}{\omega} \right), \quad [1 \text{ bod}] \quad (28)$$

pa zajedno sa  $n_+ + n_- \approx 2$  slijedi:

$$n_+ - n_- = \frac{\omega_p^2}{2\omega} \cdot \frac{1}{\omega} \left( 1 + \frac{\omega_c}{\omega} - 1 + \frac{\omega_c}{\omega} \right) = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega^3}, \quad [2 \text{ boda}] \quad (29)$$

iz čega onda napokon dobivamo izraz za faznu razliku:

$$\Delta\phi = \frac{\omega_p^2 \omega_c \Delta z}{\omega^2 c} \quad [1 \text{ bod}] \quad (30)$$

b.) Električno polje linearno polariziranog vala je dano sa  $\vec{E} = A \cos(\omega t - kz) \hat{n}$ , gdje je  $\hat{n}$  smjer polarizacije. Radi jednostavnosti možemo definirati koordinatni sustav tako da je  $\hat{n} = \hat{x}$ . Tada možemo linearno polarizirani val rastaviti na lijevo i desno polarizirani kružni val, tj.:

$$A \cos(\omega t - kz) \hat{x} = \frac{A}{2} [\cos(\omega t - kz) \hat{x} + \sin(\omega t - kz) \hat{y}] + \frac{A}{2} [\cos(\omega t - kz) \hat{x} - \sin(\omega t - kz) \hat{y}]. \quad [3 \text{ boda}] \quad (31)$$

Iz a.) dijela zadatka znamo da prolaskom kroz plazmu u magnetskom polju ova dva vala imaju razliku faza danu sa (30), pa je nakon prolaska kroz plazmu jednadžba za  $\vec{E}$  dana sa:

$$\vec{E} = \frac{A}{2} \{ [\cos(\omega t - kz + \Delta\phi) \hat{x} + \sin(\omega t - kz + \Delta\phi) \hat{y}] + [\cos(\omega t - kz) \hat{x} - \sin(\omega t - kz) \hat{y}] \}. \quad [3 \text{ boda}] \quad (32)$$

Korištenjem identiteta  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$  i  $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$  dobivamo:

$$\vec{E} = \frac{A}{2} \left[ 2 \cos \left( \omega t - kz + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\Delta\phi}{2} \right) \hat{x} + 2 \cos \left( \omega t - kz + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \sin \left( \frac{\Delta\phi}{2} \right) \hat{y} \right]. \quad [2 \text{ boda}] \quad (33)$$

Jednadžba (33) se može preurediti u oblik:

$$\vec{E} = A \cos \left( \omega t - kz + \frac{\Delta\phi}{2} \right) \left[ \cos \left( \frac{\Delta\phi}{2} \right) \hat{x} + \sin \left( \frac{\Delta\phi}{2} \right) \hat{y} \right], \quad (34)$$

iz kojeg se jasno vidi da je prolaskom kroz plazmu zračenje i dalje linearno polarizirano, ali je kut polarizacije zakrenut za  $\frac{\Delta\phi}{2}$  u odnosu na početno zračenje, tj. za kut zakreta  $\Theta = \frac{\Delta\phi}{2}$  vrijedi:

$$\Theta = \frac{\omega_p^2 \omega_c \Delta z}{2\omega^2 c} = \frac{2\pi N e^3 B}{m^2 c \omega^2} \Delta z. \quad [2 \text{ boda}] \quad (35)$$

d.) S grafa vidimo da je  $N_1 = 2.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$  između 150 – 350 km, i  $N_2 = 6 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$  između 350 – 1000 km. Srednje vrijednosti magnetskog polja u tim područjima su otprilike  $B(250 \text{ km}) = 36.3 \mu\text{T}$  i  $B(675 \text{ km}) = 30 \mu\text{T}$ , pa je ukupni kut zakreta:

$$\Theta = \frac{e^3}{2\pi m^2 c f^2} [N_1 \cdot B(250 \text{ km}) \cdot 200 \text{ km} + N_2 \cdot B(675 \text{ km}) \cdot 650 \text{ km}] = 1.98 \times 10^{-3} \text{ rad}. \quad [4 \text{ boda}] \quad (36)$$