

Državno natjecanje iz fizike 2021/2022

Podgora, 26. – 29. travnja 2022.

Srednje škole – 1. grupa

Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (16 bodova)

Najprije možemo izračunati duljinu druge katete pravokutnog trokuta:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

gdje je  $a = 60$  cm i  $c = 100$  cm. Dobije se  $b = 80$  cm. **(1 bod)**

Tijelo #1 giba se niz kosinu koja s horizontalom zatvara kut  $\alpha$ . Ubrzanje tijela niz kosinu odredimo pomoću 2. Newtonovog zakona:

$$ma_1 = mg \sin \alpha = mg \frac{80}{100} \Rightarrow a_1 = \frac{4}{5}g. \text{ (1 bod)}$$

Tijelo #2 giba se niz kosinu koja s horizontalom zatvara kut  $\beta$ . Ubrzanje tijela niz kosinu odredimo pomoću 2. Newtonovog zakona:

$$ma_2 = mg \sin \beta = mg \frac{60}{100} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{5}g. \text{ (1 bod)}$$

Koordinatni sustav postavimo kao na slici. Napišimo jednadžbe gibanja po komponentama u koordinatnom sustavu za oba tijela:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}a_1 t^2 \cdot \cos \alpha = -\frac{6}{25}gt^2,$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 \cdot \sin \alpha = \frac{8}{25}gt^2,$$

$$x_2(t) = x_0 + \frac{1}{2}a_2 t^2 \cdot \cos \beta = -\frac{4}{5}l + \frac{6}{25}gt^2,$$

$$y_2(t) = y_0 + \frac{1}{2}a_2 t^2 \cdot \sin \beta = -\frac{3}{5}l + \frac{9}{50}gt^2, \text{ (2 boda)}$$

gdje je  $l = 30$  cm. Ovisnosti horizontalne i vertikalne udaljenosti tijela o vremenu redom su jednake:

$$\Delta x(t) = x_1(t) - x_2(t) = \frac{4}{5}l - \frac{12}{25}gt^2, \text{ (1 bod)}$$

$$\Delta y(t) = y_1(t) - y_2(t) = \frac{3}{5}l + \frac{7}{50}gt^2. \text{ (1 bod)}$$

Horizontalna udaljenost tijela jednaka je nuli u trenutku  $t'$ . Odredimo izraz za  $t'$ :

$$0 = \frac{4}{5}l - \frac{12}{25}gt'^2 \Rightarrow t'^2 = \frac{5}{3} \frac{l}{g} \text{ (1 bod)}$$

Vertikalna udaljenost u trenutku  $t'$  je:

$$\Delta y(t') = \frac{3}{5}l + \frac{7}{50}g \frac{5}{3} \frac{l}{g} = \frac{5}{6}l = 25 \text{ cm} \text{ (2 boda)}$$

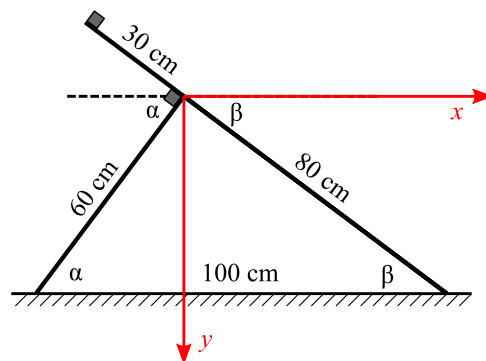
Udaljenost dva tijela  $D$  u trenutku  $t$  dana je sljedećim izrazom:

$$D^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \text{ (1 bod)}$$

gdje je

$$\Delta x(t) = x_1(t) - x_2(t) = \frac{4}{5}l - \frac{12}{25}gt^2 = \frac{1}{5}(4l - \frac{12}{5}gt^2),$$

$$\Delta y(t) = y_1(t) - y_2(t) = \frac{3}{5}l + \frac{7}{50}gt^2 = \frac{1}{5}(3l + \frac{7}{10}gt^2).$$



Uvrstimo u izraz za kvadrat udaljenosti tijela:

$$D^2 = \frac{1}{25} \left( 16l^2 - \frac{96}{5}lgt^2 + \frac{144}{25}g^2t^4 + 9l^2 + \frac{21}{5}lgt^2 + \frac{49}{100}g^2t^4 \right),$$

$$D^2 = \frac{1}{25} \left( 25l^2 - \frac{75}{5}lgt^2 + \frac{625}{100}g^2t^4 \right),$$

$$D^2 = l^2 - \frac{3}{5}lgt^2 + \frac{1}{4}g^2t^4. \quad (1 \text{ bod})$$

Možemo uvesti supstituciju  $u = t^2$  pa tada kvadratna jednadžba postaje

$$D^2 = l^2 - \frac{3}{5}lgu + \frac{1}{4}g^2u^2. \quad (1 \text{ bod})$$

Sada možemo primijeniti činjenicu da kvadratna funkcija  $f(u) = au^2 + bu + c$  poprima minimalnu vrijednost za  $u_0 = -\frac{b}{2a}$ . U našem slučaju  $a = \frac{1}{4}g^2$ ,  $b = -\frac{3}{5}lg$ . Dobije se:

$$u_0 = \frac{3}{5}lg \cdot \frac{1}{2\frac{1}{4}g^2} = \frac{6}{5}\frac{l}{g}, \quad (1 \text{ bod})$$

$$D_{min}^2 = l^2 - \frac{3}{5}lg \cdot \frac{6}{5}\frac{l}{g} + \frac{1}{4}g^2 \frac{36}{25}\frac{l^2}{g^2} = \frac{16}{25}l^2, \quad (1 \text{ bod})$$

$$D_{min} = \frac{4}{5}l = 0.24 \text{ m} = 24 \text{ cm}. \quad (1 \text{ bod})$$

## 2. zadatak (17 bodova)

Kut  $\alpha$  pod kojim mala kuglica udara u zdjelu je kut između smjera brzine kuglice i okomice na dodirnu površinu. Dodirna površina kuglice i zdjele je tangencijalna na zdjelu u toči dodira, a pravac okomit na tu površinu odgovara polumjeru zdjele. Neka je  $h'$  visina s koje pada kuglica u odnosu na visinu točke udara u zdjelu. Tada je brzina kuglice u trenutku udara u zdjelu jednaka:

$$v_0^2 = 2gh'. \quad (2 \text{ boda})$$

Nakon elastičnog odbijanja od zdjele gibanje kuglice je kosi hitac s početnom brzinom  $v_0$  čiji smjer zatvara kut  $2\alpha$  s vertikalom (1 bod). Ako postavimo ishodište koordinatnog sustava u tjeme zdjele, tada je početni položaj kuglice  $(x_0, y_0)$  jednak:

$$x_0 = b = \frac{7}{25}R, \quad (1 \text{ bod})$$

$$y_0 = R - a = R - \sqrt{R^2 - \frac{49}{625}R^2} = R - \frac{24}{25}R = \frac{1}{25}R. \quad (1 \text{ bod})$$

Komponente početne brzine su:

$$v_{0x} = -v_0 \sin(2\alpha), \quad (1 \text{ bod})$$

$$v_{0y} = v_0 \cos(2\alpha). \quad (1 \text{ bod})$$

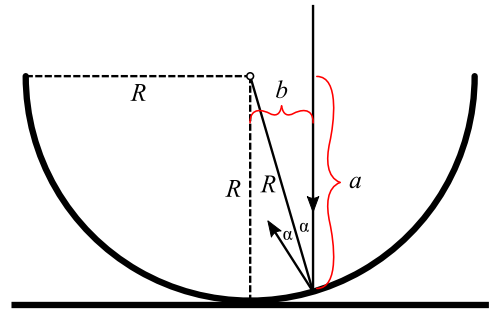
Jednadžbe gibanja kuglice za  $x$  i  $y$  smjer su:

$$x(t) = x_0 - v_{0x}t = x_0 - v_0 \sin(2\alpha)t, \quad (1 \text{ bod})$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + v_0 \cos(2\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1 \text{ bod})$$

Minimalni uvjet da kuglica iskoči iz zdjele je da dotakne njezin lijevi rub koji se nalazi na koordinati  $(x, y) = (-R, R)$  (1 bod). Naći ćemo jednadžbu putanje kuglice tako da iz izraza  $x(t)$  i  $y(t)$  eliminiramo vrijeme  $t$ .

$$t = \frac{x_0 - x}{v_0 \sin(2\alpha)}$$



$$y = y_0 + \frac{v_0 \cos(2\alpha)}{v_0 \sin(2\alpha)} (x_0 - x) - \frac{g (x_0 - x)^2}{2v_0^2 \sin^2(2\alpha)} \quad (2 \text{ boda})$$

Uvrstimo izraz za  $v_0$  i sredimo jednadžbu:

$$y = y_0 + \frac{x_0 - x}{\tan(2\alpha)} - \frac{(x_0 - x)^2}{4h' \sin^2(2\alpha)}$$

$$\frac{(x_0 - x)^2}{4h' \sin^2(2\alpha)} = \frac{x_0 - x}{\tan(2\alpha)} + y_0 - y$$

Sada možemo uvrstiti poznate veličine:

$$x_0 - x = \frac{7}{25}R + R = \frac{32}{25}R,$$

$$y_0 - y = \frac{1}{25}R - R = -\frac{24}{25}R,$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{R} = \frac{\frac{7}{25}R}{R} = \frac{7}{25},$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{R} = \frac{\frac{24}{25}R}{R} = \frac{24}{25},$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{4^2 \cdot 21}{25^2} = \frac{336}{625} = 0.5376,$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{576}{625} - \frac{49}{625} = \frac{527}{25^2} = \frac{527}{625} = 0.8432,$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{\frac{4^2 \cdot 21}{25^2}}{\frac{527}{25^2}} = \frac{4^2 \cdot 21}{527}.$$

Uvrštavanjem se dobije:

$$\frac{1}{4h'} \cdot \frac{2^2 \cdot 4^4}{25^2} \cdot R^2 \cdot \frac{25^4}{4^4 \cdot 21^2} = \frac{2 \cdot 4^2}{25} \cdot R \cdot \frac{25^2}{4^2 \cdot 21} \cdot \frac{527}{25^2} - \frac{3 \cdot 2^3}{25} \cdot R,$$

$$\frac{R}{h'} \cdot \frac{25^2}{21^2} = \frac{22}{21},$$

$$h' = \frac{25^2}{21 \cdot 22} R = 1.35R. \quad (4 \text{ boda})$$

Alternativno, iz izraza  $\sin \alpha = \frac{7}{25}$  može se izračunati kut  $\alpha$ :  $\alpha = \arcsin \frac{7}{25} = 16.26^\circ$ .

Visina  $h$  u odnosu na horizontalnu podlogu je:

$$h = h' + \frac{1}{25}R = 1.39R. \quad (1 \text{ bod})$$

### 3. zadatak (17 bodova)

Za gibanje ISS-a po kružnoj orbiti oko Zemlje vrijedi 2. Newtonov zakon:

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{mm_Z}{r^2}, \quad (1 \text{ bod})$$

gdje je  $r = r_Z + h = 6771 \text{ km}$ . (1 bod)

Sljedi da je brzina ISS-a:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_Z}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6.771 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7.67 \text{ km/s}. \quad (2 \text{ boda})$$

Period orbite izračunamo na sljedeći način:

$$v = \frac{2r\pi}{T}, \quad (1 \text{ bod})$$

$$T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2 \cdot 6.771 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \pi}{7.67 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 92.5 \text{ min}. \quad (1 \text{ bod})$$

U jednom danu (24 sata) ISS obiđe Zemlju  $n$  puta:

$$n = \frac{24 \cdot 60 \text{ min}}{92.5 \text{ min}} = 15.6. \quad (1 \text{ bod})$$

Put koji prijeđe točka na ekvatoru između dva uzastopna prolaska ISS-a iznad ekvatora jednak je duljini kružnog luka:

$$l = r_Z \varphi, \text{ (1 bod)}$$

gdje je  $\varphi$  kut u radijanima za koji se zakrenula Zemlja u jednom periodu ISS-a:

$$\varphi = \omega_{Zemlja} T_{ISS}, \text{ (1 bod)}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \text{ min}} 92.5 \text{ min} = 0.4036 \text{ rad. (1 bod)}$$

Uvrštavanjem u izraz za duljinu kružnog luka dobije se:

$$l = 6371 \text{ km} \cdot 0.4036 \text{ rad} = 2571 \text{ km. (1 bod)}$$

Zakon očuvanja energije je:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm_Z}{r} = \frac{1}{2}mv'^2 - G\frac{mm_Z}{r'} + W, \text{ (2 boda)}$$

gdje je  $r' = r - 2 \text{ km} = 6769 \text{ km}$  (1 bod) i  $v'$ :

$$v' = \sqrt{\frac{Gm_Z}{r'}}. \text{ (1 bod)}$$

Uvrstimo u zakon očuvanja energije:

$$G\frac{mm_Z}{2r} - G\frac{mm_Z}{r} = G\frac{mm_Z}{2r'} - G\frac{mm_Z}{r'} + W,$$

$$-G\frac{mm_Z}{2r} = -G\frac{mm_Z}{2r'} + W,$$

$$W = G\frac{mm_Z}{2} \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right), \text{ (1 bod)}$$

$$W = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 4.2 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{2} \left( \frac{1}{6.769} - \frac{1}{6.771} \right) \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1} =$$

$$3.65 \cdot 10^9 \text{ J. (1 bod)}$$

#### 4. zadatak (20 bodova)

Ukupna udaljenost koju prelazi kamen #2 do zaustavljanja je:

$$d = 6.4 \text{ m} - r_{crveni} = 6.4 \text{ m} - 0.61 \text{ m} = 5.79 \text{ m. (1 bod)}$$

Zakon očuvanja energije za gibanje kamena #2 je:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_1 mgd_1 + \mu_2 mgd_2, \text{ (1 bod)}$$

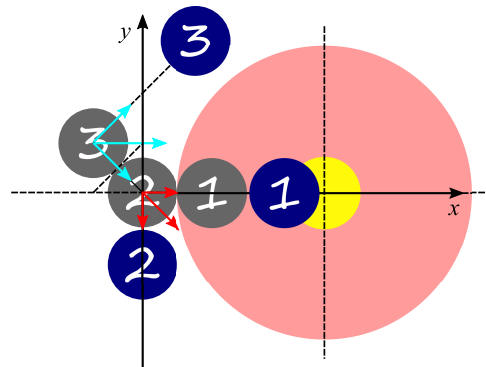
gdje je  $\mu_1 = 0.025$ ,  $\mu_2 = \mu_1 - 0.4\mu_1 = 0.015$ ,  $d_1 + d_2 = d$ . (1 bod)

$$\frac{v_0^2}{2} = \mu_1 g (d - d_2) + \mu_2 g d_2,$$

$$\frac{v_0^2}{2} = \mu_1 g d - (\mu_1 - \mu_2) g d_2,$$

$$d_2 = \frac{\mu_1 d}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{v_0^2}{2g(\mu_1 - \mu_2)} = 4.675 \text{ m. (1 bod)}$$

U b) dijelu zadatka postavimo ishodište koordinatnog sustava u središte kamena #2 prije sudara. Na slici su prikazani položaji sva tri kamena neposredno prije sudara (sivo) i nakon što su se zaustavili nakon sudara (plavo). Možemo odrediti koordinate njihovih položaja u koordinatnom sustavu.



	položaj kamena neposredno prije sudara
kamen #1	$(2R, 0)$
kamen #2	$(0, 0)$
kamen #3	$(-\sqrt{2}R, \sqrt{2}R)$

U trenutku neposredno prije sudara kamen #2 i kamen #3 diraju se u točki koja se nalazi na polovici spojnice njihovih središta. Iz zadane udaljenosti  $b$  zaključujemo da je kut između spojnica središta kamena #3 i #2 i smjera brzine kamena #3  $45^\circ$  (**1 bod**). Nakon sudara kamen #2 dobit će brzinu u smjeru spojnice središta kamena #3 i #2. Brzinu kamena #3 prije sudara rastavimo na komponentu paralelnu spojnici središta i okomito na spojnicu. Obje komponente imaju jednak iznos  $v_{3,paralelno} = v_{3,okomito} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_3$  (**1 bod**). Sada možemo napisati zakon očuvanja količine gibanja i zakon očuvanja energije za sudar kamena #3 i #2:

$$mv_{3,paralelno} = mv'_{3,paralelno} + mv'_2, \text{ (1 bod)}$$

$$mv_{3,okomito} = mv'_{3,okomito},$$

$$\frac{1}{2}m(v_{3,paralelno}^2 + v_{3,okomito}^2) = \frac{1}{2}m(v_{3,paralelno}'^2 + v_{3,okomito}'^2) + \frac{1}{2}mv_2'^2. \text{ (1 bod)}$$

Sređivanjem se dobije:

$$v_{3,paralelno} = v'_{3,paralelno} + v'_2,$$

$$v_{3,paralelno}^2 = v_{3,paralelno}'^2 + v_2'^2,$$

Rješavanjem sustava jednačbi dobije se:

$$v'_2 = v_{3,paralelno} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_3, \text{ (1 bod)}$$

$$v'_{3,paralelno} = 0. \text{ (1 bod)}$$

Nakon sudara kamen #3 giba se brzinom  $v'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_3$  u smjeru koji zatvara kut  $45^\circ$  s pozitivnim smjerom  $x$  osi. (**1 bod**)

Slična analiza sudara provede se za sudar kamena #2 i kamena #1. Dobije se da se nakon sudara kamen #1 giba brzinom  $v''_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}v'_2 = \frac{1}{2}v_3$  u  $+x$  smjeru (**2 boda**). Kamen #2 se nakon sudara giba brzinom  $v''_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v'_2 = \frac{1}{2}v_3$  u  $-y$  smjeru (**2 boda**). Nadalje možemo odrediti koliki će put prijeći do zaustavljanja. Kamen #1 i kamen #2 prelaze jednak put:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}v_3\right)^2 = \mu_2 mgs_{1,2},$$

$$s_{1,2} = \frac{v_3^2}{8\mu_2 g} = 0.3 \text{ m} = 30 \text{ cm},$$

a kamen #3 do zaustavljanja prelazi put:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}v_3\right)^2 = \mu_2 mgs_3,$$

$$s_3 = \frac{v_3^2}{4\mu_2 g} = 0.6 \text{ m} = 60 \text{ cm}. \text{ (1 bod)}$$

Sada možemo odrediti i koordinate konačnih položaja:

	položaj kamena nakon sudara (kad se zaustave)
kamen #1	$(2R + s_{1,2}, 0) = (59 \text{ cm}, 0)$
kamen #2	$(0, -s_{1,2}) = (0, -30 \text{ cm})$
kamen #3	$(-\sqrt{2}R + \frac{\sqrt{2}}{2}s_3, \sqrt{2}R + \frac{\sqrt{2}}{2}s_3) = (21.9 \text{ cm}, 62.9 \text{ cm})$

Koordinata središta S je  $(r_{crveni} + R, 0) = (75.5 \text{ cm}, 0)$ .

Udaljenost pojedinog kamena od središta izračunamo uvrštavanjem u formulu:

$$d = \sqrt{(x_S - x_{kamen})^2 + (y_S - y_{kamen})^2} \text{ (1 bod)}$$

Redom dobivamo udaljenosti od središta S:  $d_1 = 16.5 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 81.2 \text{ cm}$ ,  $d_3 = 82.6 \text{ cm}$ .

**(3 boda)**